УДК 517.968.73

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. РАСОЛЬКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Построены и обоснованы вычислительные схемы решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Прандтля с сингулярным интегралом по отрезку действительной оси, понимаемым в смысле главного значения по Коши. Данное уравнение приводится к равносильным уравнениям Фредгольма второго рода с помощью обращения сингулярного интеграла в трех классах функций по Мусхелишвили и применения спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Одновременно исследуются условия разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром специального вида и такие уравнения приближенно решаются. Новые вычислительные схемы основаны на применении к интегралу, входящему в равносильное уравнение, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Получены равномерные оценки погрешностей приближенных решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; уравнение Прандтля; численное решение; метод ортогональных многочленов.

Образец цитирования:
Расолько ГА. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:58–68.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68

For citation:
Rasolko GA. To the numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:58–68. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68

Автор:
Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Author:
Galina A. Rasolko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web-technologies and computer modeling, faculty of mechanics and mathematics.
rasolka@bsu.by

TO THE NUMERICAL SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL PRANDTL EQUATION BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. A. RASOLKO[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In the paper, computational schemes for solving the Cauchy problem for the singular integro-differential Prandtl equation with a singular integral over a segment of the real axis, understood in the sense of the Cauchy principal value, are constructed and justified. This equation is reduced to equivalent Fredholm equations of the second kind by inversion of the singular integral in three classes of Muskhelishvili functions and applying spectral relations for the singular integral. At the same time, we investigate the conditions for the solvability of integral Fredholm equations of the second kind with a logarithmic kernel of a special form and are approximately solved. The new computational schemes are based on applying the spectral relations for the singular integral to the integral entering into the equivalent equation. Uniform estimates of the errors of approximate solutions are obtained.

Key words: integro-differential equation; Prandtl equation; numerical solution; method of orthogonal polynomials.

Введение

В теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt = f(x),\ -1 < x < 1, \tag{1}$$

которое называется уравнением Прандтля [1–3]. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ – известные функции из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$, $\Gamma(x)$ – искомая функция. К уравнению (1) присоединяются дополнительные условия

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \tag{2}$$

Число работ, посвященных этому уравнению, огромно. Известно, что оно точно решается лишь в редких частных случаях [4]. В значительной части публикаций, начиная с самой первой, рассматриваются вопросы разработки и обоснования приближенных методов решения уравнения (1). Среди приближенных методов наиболее распространенным является метод Мультхоппа.

В настоящей работе предлагаются и обосновываются вычислительные схемы для численного решения уравнения (1). Первоначально уравнение сводится к равносильным уравнениям с логарифмической особенностью. Указываются условия разрешимости полученных уравнений. Новые вычислительные схемы основаны на применении к интегралу, входящему в уравнение, которое равносильно исходному, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Отметим, что в [5] предложена и обоснована вычислительная схема для уравнения (1), отличающаяся от описанной ниже.

Предварительные сведения

В данной работе использованы известные спектральные соотношения [6, с. 188]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x),\\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x} = -T_n(x),\ \ -1 < x < 1,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots,\end{gathered} \tag{3}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

При построении вычислительной схемы использован интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода, указанный в теореме 7.9 [7, с. 89]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}^{0} c_j T_j(x), \tag{4}$$

где $c_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k),\ j = 0, 1, \ldots, n,\ x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k = 0, 1, \ldots, n.$

Здесь и далее $\sum_{j=0}^{n}{}^{0} a_j = \frac{1}{2}a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$

Отметим, что в теореме 7.9 из [7] используется и другая – классическая – форма интерполяционного многочлена по узлам Чебышева первого рода, которая равносильна (4). Мы говорим, что (4) – это разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева первого рода.

О классах функций по Мусхелишвили напомним следующее [8, с. 31]:

• функция $\psi(x)$ принадлежит классу $h(-1)$, если на отрезке $[-1, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = 1$ допускает интегрируемую особенность;

• функция $\psi(x)$ принадлежит классу $h(1)$, если на отрезке $[-1+\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = -1$ допускает интегрируемую особенность.

Класс функций $h(-1, 1)$ – класс ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$ функций.

Приведение уравнения (1) к уравнениям Фредгольма

Сведем уравнение (1) к уравнениям с логарифмической особенностью в трех классах функций по Мусхелишвили: $h(-1, 1)$, $h(1)$ и $h(-1)$.

Пусть

$$u(x) \triangleq -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt. \tag{5}$$

Обращение сингулярного интеграла в классе $h(-1, 1)$. Так как для интеграла (5) очевидно выполнены условия разрешимости $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = 0,$ применим формулы обращения сингулярного интеграла (5) в указанном классе функций – классе функций $h(-1, 1)$, ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$:

$$\Gamma'(x) = \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{u(t)}{t-x}dt.$$

Отсюда при условии (2) имеем

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^{x}\Gamma'(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H_1(x, t)u(t)dt, \tag{6}$$

$$H_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{x}\left(\sqrt{1-\tau^2}\,\frac{d\tau}{t-\tau}\right) = H_1^0(x, t) + H(x, t), \tag{7}$$

где

$$H_1^0(x, t) = \frac{-\sqrt{1-x^2} + t(\pi - \arccos x)}{\sqrt{1-t^2}}; \tag{8}$$

$$H(x, t) = \sqrt{1-t^2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right) = \ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}. \tag{9}$$

Функция $H(x, t)$ симметрична и неотрицательна [5].

На основании (7) имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|H_1(x, t)|dt \le \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|H_1^0(x, t)|dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x, t)dt \le 2\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi - \arccos x}{\pi}\right) < \pi.$$

Принимая во внимание (6), введем линейный оператор

$$K_1(u;\, x) = \frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_1(x,\, t)u(t)dt = \frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\big(H_1^0(x,\, t) + H(x,\, t)\big)u(t)dt. \qquad (10)$$

Тогда граничная задача (1), (2) сводится к уравнению

$$u(x) + K_1(u;\, x) = f(x). \qquad (11)$$

Учитывая (8)–(10), применим формулу интегрирования по частям в следующем интеграле:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_1(x,\, t)u(t)dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x},\;\; \Phi'(x) = u(x). \qquad (12)$$

Отсюда с учетом теоремы Племеля – Привалова (см., например, [8, с. 58]) заключаем, что оператор $K_1(u;\, x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1,\, 1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1,\, 1]$ или даже $b^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1,\, 1]$, где $b(x) = \dfrac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|K_1 u\|_{\mathbb{C}} \le \rho_1 \|u\|_{\mathbb{C}}, \qquad (13)$$

где

$$\rho_1 = \max_{|x|\le 1}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2} + \dfrac{\pi - \arccos x}{\pi}\right)}{|B(x)|}. \qquad (14)$$

Теорема 1. *Пусть функция* $B(x)$*, входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию*

$$\rho_1 < 1,\;\; \rho_1 = \max_{|x|\le 1}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2} + \dfrac{\pi - \arccos x}{\pi}\right)}{|B(x)|}. \qquad (15)$$

Тогда уравнение (11) с оператором (10), и вместе с ним граничная задача (1), (2), имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(-1,\, 1)$ *при любой* $f(x) \in \mathbb{C}[-1,\, 1]$.

Обращение сингулярного интеграла в классе $h(1)$. Применим формулы обращения сингулярного интеграла (5) в указанном классе (класс функций, ограниченных в окрестности точки $x = 1$) и получим

$$\Gamma'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{u(t)}{t-x}dt.$$

Отсюда

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^{x}\Gamma'(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_2(x,\, t)u(t)dt, \qquad (16)$$

где

$$H_2(x,\, t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\int_{-1}^{x}\left(\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right) = H_2^0(x,\, t) + H(x,\, t),$$

$$H_2^0(x,\, t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}(\pi - \arccos x),\;\; H(x,\, t) = \ln\frac{1 - xt + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Очевидно, что функция $H_2(x,\, t)$ неотрицательна и имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|H_2(x,\, t)|dt \le \pi - \arccos x + \sqrt{1-x^2} \le \pi.$$

Тогда граничная задача (1), (2) сводится к уравнению

$$u(x)+K_2(u;\,x)=f(x), \tag{17}$$

где

$$K_2(u;\,x)=\frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H_2(x,\,t)u(t)dt. \tag{18}$$

Аналогично предыдущему пункту получим следующий результат: оператор $K_2(u;\,x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1,\,1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x)\in\mathbb{C}[-1,\,1]$ или даже $b^{-1}(x)\in\mathbb{C}[-1,\,1]$, где $b(x)=\dfrac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|K_2u\|_{\mathbb{C}}\le\rho_2\|u\|_{\mathbb{C}}, \tag{19}$$

$$\rho_2=\max_{|x|\le 1}\frac{\pi-\arccos x+\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $B(x)$, *входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию*

$$\rho_2<1,\ \rho_2=\max_{|x|\le 1}\frac{\pi-\arccos x+\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}. \tag{21}$$

Тогда уравнение (17) с оператором (18), и вместе с ним граничная задача (1), (2), имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x)\in h(1)$ *при любой* $f(x)\in\mathbb{C}[-1,\,1]$.

Обращение сингулярного интеграла в классе $h(-1)$. Применим формулы обращения сингулярного интеграла (5) в указанном классе (класс функций, ограниченных в окрестности точки $x=-1$) и получим

$$\Gamma'(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{u(t)}{t-x}dt.$$

Отсюда

$$\Gamma(x)=\int_{-1}^{x}\Gamma'(\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H_3(x,\,t)u(t)dt, \tag{22}$$

$$H_3(x,\,t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\int_{-1}^{x}\left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right)=H_3^0(x,\,t)+H(x,\,t),$$

$$H_3^0(x,\,t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}(\arccos x-\pi),\ \ H(x,\,t)=\ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Таким образом, уравнение (1) свелось к уравнению

$$u(x)+K_3(u;\,x)=f(x), \tag{23}$$

где

$$K_3(u;\,x)=\frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H_3(x,\,t)u(t)dt. \tag{24}$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|H_3(x,\,t)|dt\le\pi-\arccos x+\sqrt{1-x^2}\le\pi.$$

Как и в предыдущих пунктах, получим следующий результат: оператор $K_3(u;\,x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1,\,1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x)\in\mathbb{C}[-1,\,1]$ или даже $b^{-1}(x)\in\mathbb{C}[-1,\,1]$, где $b(x)=\dfrac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|K_3u\|_{\mathbb{C}}\le\rho_3\|u\|_{\mathbb{C}}, \tag{25}$$

$$\rho_3 = \max_{|x| \le 1} \frac{\pi - \arccos x + \sqrt{1 - x^2}}{|B(x)|}. \tag{26}$$

Теорема 3. *Пусть функция* $B(x)$, *входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию*

$$\rho_3 < 1,\ \rho_3 = \max_{|x| \le 1} \frac{\pi - \arccos x + \sqrt{1 - x^2}}{|B(x)|}. \tag{27}$$

Тогда уравнение (23) с оператором (24), и вместе с ним граничная задача (1), (2), имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(-1)$ *при любой* $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$.

Приближенное решение уравнения (1)

Схема 1. Решение в классе $h(-1, 1)$. На основании (11) и (5) приближенное решение уравнения (1) при условии (2) найдем как решение уравнения

$$u_n(x) + K_1(u_n;\, x) = F_n(x), \tag{28}$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\Gamma_n'(t)}{t - x}\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \tag{29}$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0, 1, \ldots, n$;

$$K_1(u_n;\, x) = \frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_1(x, t)\,u_n(t)\,dt; \tag{30}$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos\dfrac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Очевидно, что для уравнения (28) с оператором (30), тождественным (10), имеет место аналог теоремы 1, т. е. вследствие (13)–(15) уравнение (28) также разрешимо.

Для обращения сингулярного интеграла (29) в классе ограниченных функций подчиним его условию разрешимости $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{u_n(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt = 0$, т. е. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt = 0$. Следовательно, $c_0 = 0$.

Используя (29) и учитывая (3), как и ранее, вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_1(u_n;\, x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_1(x, t)\,u_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \gamma_k(x), \tag{31}$$

$$\gamma_k(x) = \int_{-1}^{x} \sin(k \arccos \tau)\,d\tau = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(\pi + 2x\sqrt{1 - x^2} + 2\arcsin x\right), & k = 1, \\ \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{2}\left(\dfrac{U_k(x)}{k + 1} - \dfrac{U_{k-2}(x)}{k - 1}\right), & k > 1, \end{cases} \tag{32}$$

так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_1(x, t)\,u_n(t)\,dt = \int_{-1}^{x}\left(\sqrt{1 - \tau^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\frac{u_n(t)}{t - \tau}\,dt\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{-1}^{x}\left(\sqrt{1 - \tau^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\frac{T_k(t)}{t - \tau}\,dt\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{-1}^{x} \sqrt{1 - \tau^2}\,U_{k-1}(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{-1}^{x} \sin(k \arccos \tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} c_k \gamma_k(x).$$

Поэтому из (30)–(32) следует, что

$$K_1(u_n;\, x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=1}^{n} c_k \gamma_k(x). \tag{33}$$

Уравнение (28) с учетом (33) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x) = F_n(x). \tag{34}$$

В качестве внешних узлов x в (34) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos\dfrac{2j+1}{2n+2}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Из (34) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left(\frac{1}{B(x_j)} \gamma_k(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j),\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{35}$$

Уравнение (34), а следовательно, и система (35), и интегральное уравнение (28) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (28) в (35), в обратном порядке, из (35) получим разрешимое уравнение (28). Значит, система (35) разрешима и имеет единственное решение c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (31).

Схема 2. Решение в классе $h(1)$. На основании (17) и (5) приближенное решение уравнения (1) при условии (2) найдем как решение уравнения

$$u_n(x) + K_2(u_n;\, x) = F_n(x), \tag{36}$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Gamma_n'(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \tag{37}$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0, 1, \ldots, n$;

$$K_2(u_n;\, x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} H_2(x, t) u_n(t) dt; \tag{38}$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos\dfrac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Очевидно, что для уравнения (36) с оператором (38), тождественным (18), имеет место аналог теоремы 2, т. е. вследствие (19)–(21) уравнение (36) также разрешимо.

Используя (37) и учитывая (3), как и ранее, вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_2(u_n;\, x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} H_2(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_k(x), \tag{39}$$

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} d\tau, \ k = 0, \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} \sqrt{1-\tau^2} U_{k-1}(\tau) d\tau, \ k > 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + \pi - \arccos x, \ k = 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2\arcsin x\right), \ k = 1, \\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}\left(\dfrac{U_k(x)}{k+1} - \dfrac{U_{k-2}(x)}{k-1}\right), \ k > 1, \end{cases} \tag{40}$$

так как

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} H_2(x, t) u_n(t) dt = \int_{-1}^{x} \left(\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1+\tau+t-\tau}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) \frac{dt}{t-\tau} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \left((1+\tau) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-\tau} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) d\tau = \sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_k(x).$$

Поэтому из (38)–(40) следует, что

$$K_2(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_k(x). \tag{41}$$

Уравнение (36) с учетом (41) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) = F_n(x). \tag{42}$$

В качестве внешних узлов x в (42) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Из (42) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{1}{B(x)} \gamma_k(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j),\ j = 0, 1, \ldots, n. \tag{43}$$

Уравнение (42), а следовательно, и система (43), и интегральное уравнение (36) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (36) в (43), в обратном порядке, из (43) получим разрешимое уравнение (36). Значит, система (43) разрешима и имеет единственное решение c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (39).

Схема 3. Решение в классе $h(-1)$. На основании (23) и (5) приближенное решение уравнения (1) при условии (2) найдем как решение уравнения

$$u_n(x) + K_3(u_n; x) = F_n(x), \tag{44}$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Gamma_n'(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \tag{45}$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0, 1, \ldots, n$;

$$K_3(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} H_3(x, t) u_n(t) dt; \tag{46}$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Очевидно, что для уравнения (44) с оператором (46), тождественным (24), имеет место аналог теоремы 3, т. е. вследствие (25)–(27) уравнение (44) также разрешимо.

Используя (45) и учитывая (3), вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_3(u_n; x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} H_3(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_k(x), \tag{47}$$

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} d\tau,\ k = 0, \\ \int_{-1}^{x} \sqrt{1-\tau^2}\, U_{k-1}(\tau) d\tau,\ k > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + 3\pi - \arccos x,\ k = 0, \\ \frac{1}{\pi}\left(\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2\arcsin x\right),\ k = 1, \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\left(\frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{U_{k-2}(x)}{k-1}\right),\ k > 1, \end{cases} \tag{48}$$

так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_3(x,\,t)u_n(t)dt = \int_{-1}^{x}\left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{u_n(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x}\left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{T_k(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-\tau-t+\tau}{\sqrt{1-t^2}}T_k(t)\frac{dt}{t-\tau} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\left((1-\tau)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-\tau} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right)d\tau = \sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_k(x).$$

Поэтому из (46)–(48) следует, что

$$K_3(u_n;\,x) = \frac{1}{B(x)}\sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_k(x). \tag{49}$$

Уравнение (44) с учетом (49) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{B(x)}\gamma_k(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) = F_n(x). \tag{50}$$

В качестве внешних узлов x в (50) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos\dfrac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0,\,1,\,\ldots,\,n$. Из (50) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\left(\frac{1}{B(x)}\gamma_k(x_j) + T_k(x_j)\right) = f(x_j),\; j = 0,\,1,\,\ldots,\,n. \tag{51}$$

Уравнение (50), а следовательно, и система (51), и интегральное уравнение (44) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (44) в (51), в обратном порядке, из (51) получим разрешимое уравнение (44). Значит, система (51) разрешима и имеет единственное решение c_k, $k = 0,\,1,\,\ldots,\,n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (47).

Обоснование сходимости

Рассмотрим вначале схему 1. Изучим структурные свойства функции $u(x)$, определяемой формулой (5) и удовлетворяющей уравнению (11). Для этого уравнение (11) на основании (7) и (12) запишем в виде

$$u(x) + \frac{1}{B(x)}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{-\sqrt{1-x^2}\, + t(\pi - \arccos x)}{\sqrt{1-t^2}}u(t)dt + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}\right) = f(x),$$
$$\Phi'(x) = u(x), \tag{52}$$

и отметим, что сингулярный интеграл принадлежит классу $H(1/2)$. В самом деле,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)-\Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x},$$

и, поскольку в окрестности точки $t = 1$

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}} \in H(1/2),$$

по теореме Племеля – Привалова в окрестности точки $x = 1$ и сингулярный интеграл принадлежит классу $H(1/2)$. Аналогичная ситуация имеет место и в окрестности точки $x = -1$. Из (52) вытекает, что если функции $B(x)$ и $f(x)$ из класса $H(\mu)$, $\mu \ge 1/2$, то $u(x) \in H(1/2)$, $-1 \le x \le 1$. Мы здесь учитываем также тот факт, что $\arccos x \in H(1/2)$, $-1 \le x \le 1$.

Далее имеет место следующее (см., например, [9, с. 318]).

Предложение. *Если в качестве узлов интерполирования берутся нули многочлена Чебышева первого рода, т. е. точки* $x_k = \cos\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *то для констант Лебега* λ_n *справедлива оценка* $\lambda_n = O(\ln n)$, $n = 2, 3, \ldots$.

Отсюда с учетом (6) и (31) получаем, что в любой точке $x \in [-1, 1]$ выполняется

$$\left\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\right\|_{\mathbb{C}} = \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_1(x, t)\big(u(t) - u_n(t)\big)dt\right\|_{\mathbb{C}} \leq$$

$$\leq \left\|u(x) - u_n(x)\right\|_{\mathbb{C}} \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_1(x, t)\,dt\right\|_{\mathbb{C}} \leq O\big(\ln n \cdot E_n(u)\big).$$

Так как имеет место оценка $E_n(u) = O(n^{-\alpha})$, если $u(x) \in H(\alpha)$ на $[-1, 1]$ (см., например, [9, с. 391]), то, таким образом, получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть функции* $B(x)$ *и* $f(x)$, *входящие в уравнение (1), принадлежат классу* $H(\mu)$, $\mu \geq 1/2$, *и выполнено условие (15). Тогда система (35) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение* $\Gamma_n(x)$ *задачи (1), (2), полученное по формуле (31), сходится к точному* $\Gamma(x)$, *полученному по формуле (6), со скоростью*

$$\left\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\right\|_{\mathbb{C}} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

После аналогичных исследований функции $u(x)$, определяемой формулой (5), удовлетворяющей уравнениям (17) (с ядром (18)) и (23) (с ядром (24)), на основании которых получены вычислительные схемы 2 и 3, имеем следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть функции* $B(x)$ *и* $f(x)$, *входящие в уравнение (1), принадлежат классу* $H(\mu)$, $\mu \geq 1/2$, *и выполнено условие (21). Тогда система (43) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение* $\Gamma_n(x)$ *задачи (1), (2), найденное по формуле (39), сходится к точному* $\Gamma(x)$, *полученному по формуле (16), со скоростью*

$$\left\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\right\|_{\mathbb{C}} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема 6. *Пусть функции* $B(x)$ *и* $f(x)$, *входящие в уравнение (1), принадлежат классу* $H(\mu)$, $\mu \geq 1/2$, *и выполнено условие (27). Тогда система (51) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение* $\Gamma_n(x)$ *задачи (1), (2), найденное по формуле (47), сходится к точному* $\Gamma(x)$, *полученному по формуле (22), со скоростью*

$$\left\|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\right\|_{\mathbb{C}} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Численные эксперименты на модельном примере

В заключение приведем результаты численного эксперимента, выполненного по схемам 1–3.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt = B(x)\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}\,\operatorname{arcth}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} + 1,\ -1 < x < 1, \tag{53}$$

при $B(x) = 3\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{1+32x^2}{1+2x^2}$. Известно, что решением задачи (53), (2) в данном случае является функция $\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}\,\operatorname{arcth}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$.

Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *MathCad 15*, уже при сравнительно небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения уравнения (53).

Схема 1. Решая систему (35) при $n = 10$ и $n = 34$, точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (31) в системе точек $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$, не более чем на $5{,}7 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $conde \le 12$ и $conde \le 50$ соответственно.

Схема 2. Решая систему (43) при $n = 10$ и $n = 34$, точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (39) в системе точек $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$, не более чем на $5{,}6 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $conde \le 26$ и $conde \le 36$ соответственно.

Схема 3. Решая систему (51) при $n = 10$ и $n = 34$, точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (47) в системе точек $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$, не более чем на $5{,}7 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}5 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $conde \le 14$ и $conde \le 37$ соответственно.

Замечание. Отметим, что в работе [10] предложена и обоснована вычислительная схема для уравнения (1), отличающаяся от описанной выше.

Библиографические ссылки

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilungen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1918;1918:451–477.
2. Голубев ВВ. *Лекции по теории крыла*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1949. 482 с.
3. Каландия АИ. *Математические методы двумерной упругости*. Москва: Наука; 1973.
4. Векуа ИН. О интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. *Прикладная математика и механика*. 1945:9(2);143–150.
5. Шешко МА, Расолько ГА, Мастяница ВС. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля. *Дифференциальные уравнения*. 1993;29(9):1550–1560.
6. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 2*. Москва: Наука; 1966.
7. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Москва: Наука; 1983.
8. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва: Наука; 1968.
9. Суетин ПК. *Классические ортогональные многочлены*. Москва: Наука; 1979.
10. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:68–74.

References

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilungen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1918;1918:451–477. German.
2. Golubev VV. *Lektsii po teorii kryla* [Lectures on the theory of the wing]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1949. 482 p. Russian.
3. Kalandiya AI. *Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti* [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]. Moscow: Nauka; 1973. Russian.
4. Vekua IN. O integro-differentsial'nom uravnenii Prandtlya. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1945:9(2);143–150. Russian.
5. Sheshko MA, Rasolko GA, Mastyanitsa VS. To the approximate solution of the integro-differential Prandtl equation. *Differentsial'nye uravneniya*. 1993;29(9):1550–1560. Russian.
6. Bateman G, Erdei A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2* [Higher transcendental functions. Volume 2]. Moscow: Nauka; 1966. Russian.
7. Pashkovsky S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of polynomials and Chebyshev series]. Moscow: Nauka; 1983. Russian.
8. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka; 1968. Russian.
9. Suetin PK. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka; 1979. Russian.
10. Rasolko GA. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:68–74. Russian.

Статья поступила в редколлегию 28.06.2018.
Received by editorial board 28.06.2018.