
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 531/534:[57+61]

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СРЕДНЕГО УХА, ПОДВЕРГНУТОГО ТОТАЛЬНОЙ ТИМПАНОПЛАСТИКЕ И ОССИКУЛОПЛАСТИКЕ, ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ ПОДНОЖНОЙ ПЛАСТИНЫ СТРЕМЕНИ

С. М. БОСЯКОВ¹⁾, Г. И. МИХАСЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Патологические изменения колебательной системы среднего уха могут привести к снижению порога восприимчивости слухового анализатора к звуковым колебаниям и вследствие этого – к частичной или полной потере слуха. Для реконструкции тимпанальной мембранны наиболее часто используются хрящевые имплантаты, поскольку они позволяют избежать осложнений после лечения. Наиболее важным при анализе качества операций, улучшающих слуховую проводимость, и выработке дальнейших рекомендаций по оптимальному протезированию является нахождение динамических характеристик (собственных форм и частот колебаний) реконструированного среднего уха. Цель настоящей работы – определение частот свободных колебаний среднего уха после протезирования на основании математической модели, предусматривающей поперечные колебания хрящевого

Образец цитирования:

Босяков СМ, Михасев ГИ. Свободные колебания среднего уха, подвергнутого тотальной тимпанопластике и оссикулопластике, при функциональной подвижности подножной пластины стремени. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:46–57.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-46-57>

For citation:

Bosiakov SM, Mikhasev GI. Free oscillations of the middle ear after total tympanoplasty and ossiculoplasty with functional mobility of the foot plate of stapes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:46–57. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-46-57>

Авторы:

Сергей Михайлович Босяков – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой биомеханики и наномеханики механико-математического факультета.

Authors:

Sergei M. Bosiakov, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
bosiakov@bsu.by
Gennadi I. Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of biomechanics and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
mikhasev@bsu.by

трансплантата и движение протеза, соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану и основание подножной пластины стремени. Значения собственных частот вычислены для различных положений узловых линий, усредненных геометрических параметров и упругих свойств тимпанальной мембранны, а также подножной пластины стремени и протеза.

Ключевые слова: среднее ухо; реконструкция; тимпанопластика; протез типа TORP; свободные колебания; собственная частота.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция» (задание 1.8.01.1).

FREE OSCILLATIONS OF THE MIDDLE EAR AFTER TOTAL TYMPANOPLASTY AND OSSICULOPLASTY WITH FUNCTIONAL MOBILITY OF THE FOOT PLATE OF STAPES

S. M. BOSIAKOV^a, G. I. MIKHASEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: S. M. Bosiakov (bosiakov@bsu.by)

Pathological changes in the oscillating system of the middle ear can lead to a decrease of the susceptibility threshold of the auditory analyser to sound vibrations and, consequently, to partial or complete hearing loss. Cartilage implants are most often used for the reconstruction of the tympanic membrane, since they help to avoid complications after treatment. Evaluation of the dynamic characteristics (eigenmodes and eigenfrequencies) of the reconstructed middle ear is the most important problem for analysing the quality of operations that improve the auditory conductivity and develop further recommendations for optimal prosthetics. The aim of this study is to estimate the eigenfrequencies of the middle ear free oscillations after prosthetics on the basis of a mathematical model involving transverse vibrations of the cartilage graft and movement of the prosthesis connecting the reconstructed tympanic membrane and the base of the foot stapes plate. The values of natural frequencies are evaluated for different positions of the nodal lines, averaged geometrical parameters and elastic properties of the tympanic membrane, as well as the foot plate of stapes and prosthesis.

Key words: middle ear; reconstruction; tympanoplasty; TORP prosthesis; free oscillations; natural frequency.

Acknowledgements. The study was supported by the State Program of Scientific Research «Convergence» (instruction 1.8.01.1).

Введение

Для улавливания звуковых волн у человека развита сложная система органов и рецепторов, позволяющая передавать их от ушной раковины в улитку с кохлеарной жидкостью, а затем преобразовывать в электрические сигналы, поступающие в мозг [1]. Как правило, выделяют три части уха человека: внешнее, среднее и внутреннее ухо. Функциональное назначение колебательной системы среднего уха заключается в преобразовании звуковых сигналов, улавливаемых наружным ухом, в механические колебания тимпанальной мембранны и цепи слуховых косточек *молоточек – наковальня – стремя*, передающих осцилляции в улитку внутреннего уха [2]. Патологические изменения одного или нескольких элементов колебательной системы среднего уха могут привести к снижению порога восприимчивости слухового анализатора к акустическим сигналам и вследствие этого – к частичной или полной потере слуха, для улучшения или восстановления которого в этом случае прибегают к хирургической реконструкции среднего уха, заключающейся во введении имплантатов и протезов, заменяющих поврежденные компоненты [3]. Для реконструкции тимпанальной мембранны наиболее часто применяются хрящевые имплантаты, поскольку они позволяют избежать осложнений после лечения. Однако динамические свойства реконструированного среднего уха, в котором вместо тимпанальной мембранны используется хрящевой имплантат, довольно сильно отличаются от таковых среднего уха в норме [3]. Поэтому, как правило, сохраняются остатки тимпанальной мембранны, на которые накладывается имплантат. Устанавливаемый при тимпанопластике протез соединяет реконструированную тимпанальную мембранны с головкой или основанием стремени [4].

Наиболее важным при анализе качества тимпанопластики (и других операций, улучшающих слуховую проводимость) и выработке дальнейших рекомендаций по оптимальному протезированию является нахождение динамических характеристик (собственных форм и собственных частот колебаний) реконструированного среднего уха [5]. Цель настоящей работы – определение частот свободных колебаний среднего уха после тимпанопластики на основании математической модели, описывающей изгибные колебания кольцевой пластинки, моделирующей восстановленную барабанную перепонку, и плоскостные движения протеза, замещающего звено *молоточек – наковальня* и соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану с подвижным основанием подножной пластины стремени.

Материалы и методы

В соответствии с [2; 4] введем глобальную систему координат ($Cxyz$), начало которой располагается в центре реконструированной тимпанальной мембранны. Ось Cz перпендикулярна ее плоскости и направлена в сторону внешнего слухового прохода. Центр основания протеза совпадает с началом C глобальной системы координат; конец стержня протеза закреплен шарнирно на подножной пластине стремени в точке $S(x_s, y_s, z_s)$. Считаем, что протез является недеформируемым твердым телом. Формы собственных колебаний механической системы *тимпанальная мембрана – протез – подножная пластина стремени* можно классифицировать исходя из возможных форм колебаний круглой кольцевой пластинки, моделирующей восстановленную тимпанальную мембрану с учетом жесткого сращивания пластинки с круглым основанием протеза по его контуру. Из всех форм колебаний пластинки мы будем рассматривать лишь те, которые сопровождаются образованием не более чем одного узлового (неподвижного) диаметра. Формы колебаний с образованием двух и более узловых диаметров на пластинке не стимулируют движение присоединенного протеза и поэтому не представляют интереса. Пусть Cy' – один из таких узловых диаметров, вокруг которого протез совершает повороты. Обозначим через ψ угол между осями Cy' и Cy и введем новую систему координат ($Cx'y'z$). При исследовании малых низкочастотных колебаний системы движением основания протеза в плоскости пластины, жесткость которой велика, можно пренебречь. Тогда с учетом принятой формы колебаний пластинки перемещения протеза можно разложить на два элементарных – поступательное перемещение W_p вдоль оси Cz и угловое перемещение Θ_p относительно оси Cy' . В результате данного перемещения конец ствола протеза (точка S) занимает новое положение. Исходное и конечное положения колебательной системы *тимпанальная мембрана – протез – подножная пластина стремени* после элементарного перемещения – поворота на угол Θ_p – показаны на рис. 1 (в точку S_Θ переходит точка S после указанного поворота протеза).

Уравнение малых колебаний круглой упругой кольцевой пластинки, моделирующей реконструированную тимпанальную мембрану, имеет вид

$$D\Delta^2 W(r, \varphi, t) + \rho h \frac{d^2 W(r, \varphi, t)}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластины, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона хрящевого трансплантата соответственно; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат; $W(r, \varphi, t)$ – прогиб пластины, r и φ – полярные координаты (φ – угол, отсчитываемый в плоскости $x'Cy'$ от оси Cx' против часовой стрелки); ρ – плотность пластины.

Границные условия на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластины, совершающей малые колебания, описываются уравнениями

$$\begin{aligned} W(b, \varphi, t) &= W_p(t) + b\Theta_p(t)\cos\varphi, \quad W(a, \varphi, t) = 0, \\ \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=b} &= \Theta_p(t)\cos\varphi, \quad \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где a и b – радиусы внешних контуров тимпанальной мембранны и протеза соответственно.

Пусть

$$W_p = w_p \sin\omega t, \quad \Theta_p = \theta_p \sin\omega t, \quad (3)$$

где w_p и θ_p – амплитуды поступательного и вращательного движений протеза соответственно; ω – исходная частота свободных колебаний системы.

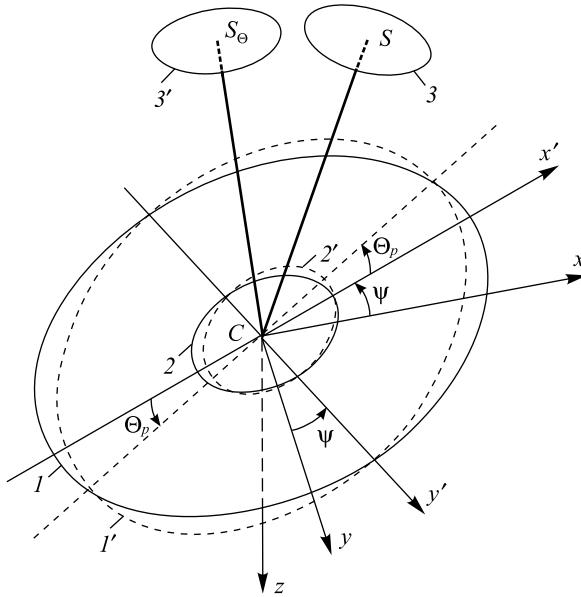


Рис. 1. Положения пластиинки и протеза до и после элементарного перемещения – поворота на угол Θ_p .

Исходное расположение: 1 – реконструированная тимпанальная мембрана; 2 – основание протеза; 3 – основание стремени. Конечное расположение: 1' – реконструированная тимпанальная мембрана; 2' – основание протеза; 3' – основание стремени

Fig. 1. Initial and final positions of the plate and the prosthesis after an elementary displacement, which is a rotation on the Θ_p angle: C is the center of the reconstructed tympanic membrane and the base of the prosthesis; 1 and 2 are the initial positions of the reconstructed tympanic membrane and the base of the prosthesis; 3 is the initial position of the base of foot stapes plate; 1' and 2' are the locations of the reconstructed tympanic membrane and the base of the prosthesis after rotation on the angle Θ_p ; 3' is the location of base of the foot stapes plate after turning the base of the prosthesis on the angle Θ_p

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2), (3) можно представить как

$$W(r, \varphi, t) = (w_0(r) + w_1(r)\cos\varphi)\sin\omega t,$$

где w_0 и w_1 – амплитуды колебаний пластины при поступательном и вращательном движении протеза, а соответствующие граничные условия для этих функций есть

$$\begin{aligned} w_0(b) &= w_p, \quad w_0(a) = 0, \quad w_1(b) = b\theta_p, \quad w_1(a) = 0, \\ \left. \frac{\partial w_0(r)}{\partial r} \right|_{r=b} &= 0, \quad \left. \frac{\partial w_1(r)}{\partial r} \right|_{r=b} = \theta_p, \quad \left. \frac{\partial w_0(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial w_1(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (4) функции $w_0(r)$ и $w_1(r)$ представимы в виде

$$\begin{aligned} w_0(r) &= A_1 I_0(k_0 r) + A_2 J_0(k_0 r) + A_3 Y_0(k_0 r) + A_4 K_0(k_0 r), \\ w_1(r) &= B_1 I_1(k_0 r) + B_2 J_1(k_0 r) + B_3 Y_1(k_0 r) + B_4 K_1(k_0 r), \end{aligned}$$

где $k_0^4 = \frac{h\rho\omega^2}{D}$; $I_n(k_0 r)$ и $K_n(k_0 r)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка, $J_n(k_0 r)$ и $Y_n(k_0 r)$ – функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка ($n = 0, 1$); неизвестные константы A_k и B_k ($k = \overline{1, 4}$) находятся из граничных условий (4).

Рассмотрим колебания протеза, основание которого (круглая пластина радиусом b) жестко скреплено с кольцевой пластиинкой по внутреннему контуру, а другой конец шарнирно закреплен на подножной пластине стремени. Обозначим силы и моменты, действующие на протез в результате его поступательного перемещения вдоль оси Cz и поворота вокруг оси Cy' , следующим образом: Q_{10} – перезывающие силы, возникающие при смещении протеза по нормали к его поверхности; Q_{1p} и M_{1p} –

перерезывающие силы и изгибающие моменты, возникающие при повороте протеза на угол Θ_p ; F_x и F_z – компоненты реакции F подножной пластины стремени, действующие на протез со стороны основания стремени вдоль осей Cx' и Cz соответственно. С учетом принятых обозначений уравнения движения протеза примут вид

$$2 \int_0^{\pi} \left[(M_{1p} + Q_{1p} b) \cos(\varphi) r \right]_{r=b} d\varphi + F_x z_{S'} - F_z y_{S'} = J \frac{d^2 \Theta_p}{dt^2}, \quad (5)$$

$$2 \int_0^{\pi} [Q_{10} r]_{r=b} d\varphi + F_z = m \frac{d^2 W_p}{dt^2}.$$

Здесь m – масса протеза; J – момент инерции протеза относительно оси Cy' , определяемый по формуле

$$J = \frac{1}{4} m_1 r_1^2 + \frac{1}{24} m_2 \left(\left((4l^2 + 9r_2^2) \cos 2\beta \right) \cos 2\beta \right) \cos^2 \alpha +$$

$$+ 2 \left((4l^2 + 3r_2^2) \sin^2 \alpha \right) \cos^2 \psi + 2 \left(6r_1^2 \cos^2 \beta + (4l^2 + 3r_2^2) \sin^2 \beta \right) \sin^2 \psi,$$

где m_1 и m_2 – масса основания и ствола протеза соответственно ($m = m_1 + m_2$ – масса протеза); r_1 и r_2 – радиус основания и ствола протеза соответственно; $l = \sqrt{(x_s - x_c)^2 + (y_s - y_c)^2 + (z_s - z_c)^2}$ – длина ствола протеза; $\cos \alpha = \frac{x_s}{l}$ – косинус угла между стволов и осью Cx ; $\cos \beta = \frac{y_s}{l}$ – косинус угла между стволов и осью Cy .

Перерезывающие силы и моменты, действующие на основание протеза со стороны пластинки, равны

$$M_{1p} = D \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} \right) \sin \omega t,$$

$$Q_{10} = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} \right) \sin \omega t,$$

$$Q_{1p} = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} \right) \sin \omega t.$$

С учетом гармонического характера колебаний и преобразования координат из системы $(Cx'y'z')$ в систему $(Cxyz)$ и в предположении малости угла Θ_p имеем

$$F_x = f_x \sin \omega t, \quad F_z = f_z \sin \omega t, \quad (6)$$

$$x_{S'} = x_s \cos \psi - y_s \sin \psi + \Theta_p z_s,$$

$$y_{S'} = x_s \sin \psi + y_s \cos \psi, \quad (7)$$

$$z_{S'} = \Theta_p (y_s \sin \psi - x_s \cos \psi) + z_s + W_p.$$

Тогда уравнения (5) запишутся в виде

$$2D \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{vw_1}{r^2} - b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{w_1}{r^2} \right) r \right]_{r=b} \cos^2 \varphi d\varphi +$$

$$+ f_x (\Theta_p (y_s \sin \psi - x_s \cos \psi) + z_s + w_p) - f_z (x_s \sin \psi + y_s \cos \psi) + J \omega^2 \Theta_p = 0,$$

$$- 2D \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) r \right]_{r=b} d\varphi + f_z + m \omega^2 w_p = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \pi D \left[r \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{vw_1}{r^2} - b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{w_1}{r^2} \right) \right) \right]_{r=b} + \\ + f_x (\theta_p (y_s \sin \psi - x_s \cos \psi) + z_s + w_p) - \\ - f_z (x_s \sin \psi + y_s \cos \psi) + J \omega^2 \theta_p = 0, \\ - 2\pi D \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right]_{r=b} + f_z + m \omega^2 w_p = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Центр тяжести подножной пластины стремени при движении протеза также смещается в точку S' с координатами $(\xi_{S'}, \eta_{S'}, \zeta_{S'})$ в локальной системе координат $(S'\xi\eta\zeta)$, связанной с подножной пластиной стремени, совершая повороты α_ξ , α_η и α_ζ относительно координатных осей $S'\xi$, $S'\eta$ и $S'\zeta$. На рис. 2 обозначены компоненты F_x и F_z реакции F стержня протеза, действующие на основание стремени со стороны стержня протеза вдоль осей Cx' и Cz соответственно ($x_{S'}$, $y_{S'}$ и $z_{S'}$ – координаты точки S' в системе координат $(Cx'y'z)$).

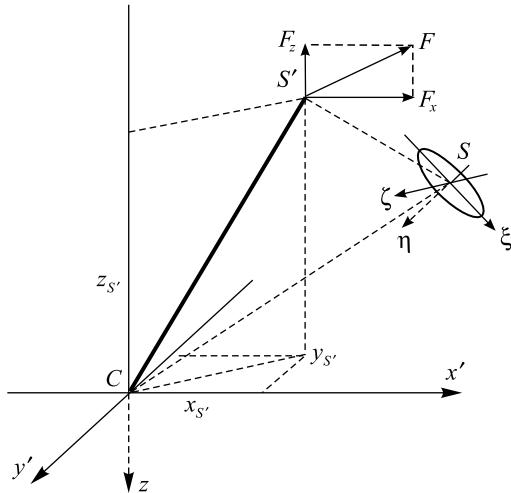


Рис. 2. Силы, действующие на подножную пластину стремени
 Fig. 2. The forces acting on the base of the foot stapes plate

С учетом действующих на подножную пластину стремени сил уравнения движения основания стремени можно представить в виде

$$\begin{aligned} F_x + F_\xi \cos(\delta_{x''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{x''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{x''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 x'(t)}{dt^2}, \\ F_\xi \cos(\delta_{y''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{y''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{y''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 y'(t)}{dt^2}, \\ F_z + F_\xi \cos(\delta_{z''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{z''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{z''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \\ m_\xi = J_\xi \frac{d^2 \alpha_\xi}{dt^2}, \quad m_\eta = J_\eta \frac{d^2 \alpha_\eta}{dt^2}, \quad m_\zeta = J_\zeta \frac{d^2 \alpha_\zeta}{dt^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где F_ξ , F_η и F_ζ – проекции реакции связки овального окна, возникающие при колебаниях протеза и направленные на оси координат $S'\xi$, $S'\eta$ и $S'\zeta$ соответственно; m_{pp} – масса основания стремени; $\delta_{x''\xi}$, $\delta_{x''\eta}$ и $\delta_{x''\zeta}$ – углы между осью Cx' и осями $S'\xi$, $S'\eta$ и $S'\zeta$ соответственно; $\delta_{y''\xi}$, $\delta_{y''\eta}$ и $\delta_{y''\zeta}$ – углы между осью Cy'

и осями $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно; $\delta_{z''\xi}$, $\delta_{z''\eta}$ и $\delta_{z''\zeta}$ – углы между осью Cz и осями $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно; m_ξ , m_η и m_ζ – реактивные моменты относительно осей $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно; $J_\xi = \frac{m_{pp}a^2}{2}$, $J_\eta = \frac{m_{pp}b^2}{2}$ и $J_\zeta = \frac{m_{pp}(a^2 + b^2)}{2}$ – главные центральные моменты инерции подножной пластины стремени относительно осей $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно (a и b – полуоси эллиптической подножной пластины стремени).

Реактивные силы и моменты, действующие со стороны связки овального окна, выразим следующим образом [2; 4]:

$$\begin{aligned} F_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{11}\xi_{S'} + c_{12}\eta_{S'} + c_{13}\zeta_{S'} + c_{14}\alpha_\xi + c_{15}\alpha_\eta + c_{16}\alpha_\zeta), \\ F_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{21}\xi_{S'} + c_{22}\eta_{S'} + c_{23}\zeta_{S'} + c_{24}\alpha_\xi + c_{25}\alpha_\eta + c_{26}\alpha_\zeta), \\ F_\zeta &= c_{\text{ref}} (c_{31}\xi_{S'} + c_{32}\eta_{S'} + c_{33}\zeta_{S'} + c_{34}\alpha_\xi + c_{35}\alpha_\eta + c_{36}\alpha_\zeta), \\ m_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{41}\xi_{S'} + c_{42}\eta_{S'} + c_{43}\zeta_{S'} + c_{44}\alpha_\xi + c_{45}\alpha_\eta + c_{46}\alpha_\zeta), \\ m_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{51}\xi_{S'} + c_{52}\eta_{S'} + c_{53}\zeta_{S'} + c_{54}\alpha_\xi + c_{55}\alpha_\eta + c_{56}\alpha_\zeta), \\ m_\zeta &= c_{\text{ref}} (c_{61}\xi_{S'} + c_{62}\eta_{S'} + c_{63}\zeta_{S'} + c_{64}\alpha_\xi + c_{65}\alpha_\eta + c_{66}\alpha_\zeta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь c_{ref} – коэффициент, определяющий общую жесткость связки овального окна. Коэффициенты c_{ij} описывают жесткостные свойства связки и образуют симметричную матрицу [2; 4]:

$$C = \begin{pmatrix} 51,4 & -0,24 & -1,37 & 0,04 \text{ мм} & 9,66 \text{ мм} & 0,35 \text{ мм} \\ -0,24 & 49,2 & -0,6 & -7,87 \text{ мм} & -1,01 \text{ мм} & -8,4 \text{ мм} \\ -1,34 & -0,6 & 27,8 & 0,37 \text{ мм} & 17,1 \text{ мм} & 0,96 \text{ мм} \\ 0,04 \text{ мм} & -7,87 \text{ мм} & 0,37 \text{ мм} & 8,29 \text{ мм}^2 & 0,58 \text{ мм}^2 & 2,6 \text{ мм}^2 \\ 9,66 \text{ мм} & -1,01 \text{ мм} & 17,1 \text{ мм} & 0,58 \text{ мм}^2 & 29,7 \text{ мм}^2 & 1,6 \text{ мм}^2 \\ 0,35 \text{ мм} & -8,4 \text{ мм} & 0,96 \text{ мм} & 2,6 \text{ мм}^2 & 1,6 \text{ мм}^2 & 12,9 \text{ мм}^2 \end{pmatrix}.$$

Косинусы углов между осями координат Cx' , Cy' , Cz и $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ при колебаниях протеза определим следующим образом (в предположении малости угла Θ_p):

$$\begin{aligned} \cos \delta_{z''\xi} &= -\cos(\beta_y) \cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) - \cos(\psi) \sin(\beta_y) \sin(\beta_z) \Theta_p - \\ &\quad - \cos(\beta_z) \sin(\beta_x) \sin(\psi) + \cos(\beta_x) (\cos(\beta_z) \cos(\psi) - \cos(\beta_y) \sin(\beta_z) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{z''\eta} &= \cos(\beta_x) \cos(\psi) \sin(\beta_z) + \cos(\beta_z) \cos(\psi) \sin(\beta_y) \Theta_p - \\ &\quad - \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) \sin(\psi) + \cos(\beta_y) \cos(\beta_z) (\cos(\psi) \sin(\beta_x) + \cos(\beta_x) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{z''\zeta} &= \cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) - \cos(\beta_y) \cos(\psi) \Theta_p + \cos(\beta_x) \sin(\beta_y) \sin(\psi), \\ \cos \delta_{y''\xi} &= -\cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) - \cos(\beta_z) \sin(\psi) (\cos(\beta_y) \sin(\beta_x) + \\ &\quad + \sin(\beta_y) \Theta_p) + \cos(\beta_x) (\cos(\beta_y) \cos(\beta_z) \cos(\psi) - \sin(\beta_z) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{y''\eta} &= \cos(\beta_x) \cos(\psi) \sin(\beta_z) + \cos(\beta_z) \cos(\psi) \sin(\beta_y) \Theta_p - \\ &\quad - \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) \sin(\psi) + \cos(\beta_y) \cos(\beta_z) (\cos(\psi) \sin(\beta_x) + \cos(\beta_x) \sin(\psi)), \\ \cos \delta_{y''\eta} &= \cos(\beta_x) \cos(\psi) \sin(\beta_z) + \cos(\beta_z) \cos(\psi) \sin(\beta_y) \Theta_p - \\ &\quad - \sin(\beta_x) \sin(\beta_z) \sin(\psi) + \cos(\beta_y) \cos(\beta_z) (\cos(\psi) \sin(\beta_x) + \cos(\beta_x) \sin(\psi)), \end{aligned}$$

$$\cos \delta_{y''\zeta} = \cos(\psi) \sin(\beta_x) \sin(\beta_y) - \cos(\beta_y) \cos(\psi) \Theta_p + \cos(\beta_x) \sin(\beta_y) \sin(\psi),$$

$$\cos \delta_{z''\xi} = \sin(\beta_y) \sin(\beta_z) + \Theta_p (\cos(\beta_x) \cos(\beta_z) - \cos(\beta_y) \sin(\beta_x) \sin(\beta_z)),$$

$$\cos \delta_{z''\eta} = \cos(\beta_x) \sin(\beta_z) \Theta_p + \cos(\beta_z) (\cos(\beta_y) \sin(\beta_x) \sin(\theta_p) - \sin(\beta_y)),$$

$$\cos \delta_{z''\zeta} = \cos(\beta_y) + \sin(\beta_x) \sin(\beta_y) \Theta_p,$$

где β_x , β_y и β_z – углы Эйлера, определяющие связь между системами координат $(S\xi\eta\zeta)$ и $(Cxyz)$.

Подставим в уравнения движения (9) выражения для координат точки S' в локальной системе координат $(C\xi\eta\zeta)$ (в предположении малости угла Θ_p):

$$\begin{aligned}\xi &= x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S, \\ \eta &= x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S, \\ \zeta &= W_p - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi).\end{aligned}\tag{11}$$

После соответствующих преобразований с учетом соотношений между координатами (7) уравнения движения (9) примут вид

$$\begin{aligned}F_x + F_\xi \cos \delta_{x''\xi} + F_\eta \cos \delta_{x''\eta} + F_\zeta \cos \delta_{x''\zeta} &= m_{pp} z_S \frac{d^2 \Theta_p(t)}{dt^2}, \\ F_\xi \cos \delta_{y''\xi} + F_\eta \cos \delta_{y''\eta} + F_\zeta \cos \delta_{y''\zeta} &= 0, \\ F_z + F_\xi \cos \delta_{z''\xi} + F_\eta \cos \delta_{z''\eta} + F_\zeta \cos \delta_{z''\zeta} &= \\ &= m_{pp} (y_S \sin \psi - x_S \cos \psi) \frac{d^2 \Theta_p(t)}{dt^2} + m_{pp} \frac{d^2 W_p(t)}{dt^2}, \\ m_\xi = J_\xi \frac{d^2 \alpha_\xi}{dt^2}, \quad m_\eta = J_\eta \frac{d^2 \alpha_\eta}{dt^2}, \quad m_\zeta = J_\zeta \frac{d^2 \alpha_\zeta}{dt^2}. &\end{aligned}\tag{12}$$

Здесь проекции реакции на оси координатной системы $(S\xi\eta\zeta)$ и моменты сил относительно соответствующих координатных осей ввиду (10) и (11) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}F_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{11} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{12} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{13} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{14} \alpha_\xi + c_{15} \alpha_\eta + c_{16} \alpha_\zeta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{21} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{22} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{23} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{24} \alpha_\xi + c_{25} \alpha_\eta + c_{26} \alpha_\zeta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_\zeta &= c_{\text{ref}} (c_{31} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{32} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{33} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{34} \alpha_\xi + c_{35} \alpha_\eta + c_{36} \alpha_\zeta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_\xi &= c_{\text{ref}} (c_{41} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{42} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{43} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{44} \alpha_\xi + c_{45} \alpha_\eta + c_{46} \alpha_\zeta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_\eta &= c_{\text{ref}} (c_{51} (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi + z_S \Theta_p - x_S) + c_{52} (x_S \sin \psi + y_S \cos \psi - y_S) + \\ &+ c_{53} (z_S - \Theta_p (x_S \cos \psi - y_S \sin \psi) - z_S + W_p) + c_{54} \alpha_\xi + c_{55} \alpha_\eta + c_{56} \alpha_\zeta),\end{aligned}$$

$$m_\zeta = c_{\text{ref}} \left(c_{61} (x_s \cos \psi - y_s \sin \psi + z_s \Theta_p - x_s) + c_{62} (x_s \sin \psi + y_s \cos \psi - y_s) + c_{63} (z_s - \Theta_p (x_s \cos \psi - y_s \sin \psi) - z_s + W_p) + c_{64} \alpha_\xi + c_{65} \alpha_\eta + c_{66} \alpha_\zeta \right).$$

Выполним преобразование и линеаризацию системы уравнений (8), (12) с учетом выражений (6) для реакций F_x и F_z , а также соотношений для перемещений и углов поворота

$$\alpha_\xi = \alpha_{\xi A} \sin \omega t, \quad \alpha_\eta = \alpha_{\eta A} \sin \omega t, \quad \alpha_\zeta = \alpha_{\zeta A} \sin \omega t.$$

В результате будем иметь систему 7 уравнений относительно неизвестных амплитудных значений f_x , f_z , w_p , Θ_p и $\alpha_{\xi A}$, $\alpha_{\eta A}$, $\alpha_{\zeta A}$:

$$\begin{aligned} & 8bf_x z_s - 8bf_z (y_s \cos \psi + x_s \sin \psi) + \Theta_p (8bJ\omega^2 - \\ & - bB_1 Dk_0 \pi (3b^2 k_0^2 - 4(2+v)) I_0(bk_0) - 8B_1 D\pi (2+v) I_1(bk_0) + \\ & + 8bB_1 Dk_0 \pi I_2(bk_0) - 4b^3 B_1 Dk_0^3 \pi I_2(bk_0) + 4bB_1 Dk_0 \pi v I_2(bk_0) - \\ & - b^3 B_1 Dk_0^3 \pi I_4(bk_0) + 8bB_2 Dk_0 \pi J_0(bk_0) + 3b^3 B_2 Dk_0^3 \pi J_0(bk_0) + \\ & + 4bB_2 Dk_0 \pi v J_0(bk_0) - 16B_2 D\pi J_1(bk_0) - 8B_2 D\pi v J_1(bk_0) - \\ & - 8bB_2 Dk_0 \pi J_2(bk_0) - 4b^3 B_2 Dk_0^3 \pi J_2(bk_0) - 4bB_2 Dk_0 \pi v J_2(bk_0) + \\ & + b^3 B_2 Dk_0^3 \pi J_4(bk_0) - 8bB_4 Dk_0 \pi K_0(bk_0) + 3b^3 B_4 Dk_0^3 \pi K_0(bk_0) - \\ & - 4bB_4 Dk_0 \pi K_0(bk_0) - 16B_4 D\pi K_1(bk_0) - 8B_4 D\pi v K_1(bk_0) - \\ & - 8bB_4 Dk_0 \pi K_2(bk_0) + 4b^3 B_4 Dk_0^3 \pi K_2(bk_0) - 4bB_4 Dk_0 \pi v K_2(bk_0) + \\ & + b^3 B_4 Dk_0^3 \pi K_4(bk_0) + 8bB_3 Dk_0 \pi Y_0(bk_0) + 3b^3 B_3 Dk_0^3 \pi Y_0(bk_0) + \\ & + 4bB_3 Dk_0 \pi v Y_0(bk_0) - 16B_3 D\pi Y_1(bk_0) - 8B_3 D\pi v Y_1(bk_0) - \\ & - 8bB_3 Dk_0 \pi Y_2(bk_0) - 4b^3 B_3 Dk_0^3 \pi Y_2(bk_0) - \\ & - 4bB_3 Dk_0 \pi v Y_2(bk_0) + b^3 B_3 Dk_0^3 \pi Y_4(bk_0) \Big) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & 2bf_z + w_p \left(2bm_{pp} \omega^2 - 2A_1 b Dk_0^2 \pi I_0(bk_0) + A_1 Dk_0 (4 - 3b^2 k_0^2) \pi I_1(bk_0) - \right. \\ & \left. - 2A_1 b Dk_0^2 \pi I_2(bk_0) - A_1 b^2 Dk_0^3 \pi I_3(bk_0) + 2A_2 b Dk_0^2 \pi J_0(bk_0) - \right. \\ & \left. - 4A_2 Dk_0 \pi J_1(bk_0) - 3A_2 b^2 Dk_0^3 \pi J_1(bk_0) - 2A_2 b Dk_0^2 \pi J_2(bk_0) + \right. \\ & \left. + A_2 b^2 Dk_0^3 \pi J_3(bk_0) - 2A_4 b Dk_0^2 \pi K_0(bk_0) - 4A_4 Dk_0 \pi K_1(bk_0) + \right. \\ & \left. + 3A_4 b^2 Dk_0^3 \pi K_1(bk_0) - 2A_4 b Dk_0^2 \pi K_2(bk_0) + A_4 b^2 Dk_0^3 \pi K_3(bk_0) + \right. \\ & \left. + 2A_3 b Dk_0^2 \pi Y_0(bk_0) - 4A_3 Dk_0 \pi Y_1(bk_0) - 3A_3 b^2 Dk_0^3 \pi Y_1(bk_0) - \right. \\ & \left. - 2A_3 b Dk_0^2 \pi Y_2(bk_0) + A_3 b^2 Dk_0^3 \pi Y_3(bk_0) \right) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{f_x}{c_{\text{ref}}} + w_p \left(c_{33} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{33} \cos \delta_{x''\eta} + c_{13} \cos \delta_{x''\xi} \right) + \\ & + \alpha_{\xi A} \left(c_{34} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{34} \cos \delta_{x''\eta} + c_{14} \cos \delta_{x''\xi} \right) + \\ & + \alpha_{\eta A} \left(c_{35} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{35} \cos \delta_{x''\eta} + c_{15} \cos \delta_{x''\xi} \right) + \\ & + \alpha_{\zeta A} \left(c_{36} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{36} \cos \delta_{x''\eta} + c_{16} \cos \delta_{x''\xi} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left(z_S \left(c_{13} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{13} \cos \delta_{x''\eta} + c_{11} \cos \delta_{x''\xi} \right) - \right. \\ \left. - x_S \left(c_{33} \cos \delta_{x''\zeta} + c_{33} \cos \delta_{x''\eta} + c_{13} \cos \delta_{x''\xi} \right) + \frac{m_{pp}}{c_{ref}} z_S \omega^2 \right) \theta_p = 0, \quad (15)$$

$$\frac{f_z}{c_{ref}} + \left(2 \cos \delta_{x''\zeta} + \cos \delta_{x''\eta} \right) \left(c_{33} w_p + c_{34} \alpha_{\xi A} + c_{35} \alpha_{\eta A} + c_{36} \alpha_{\zeta A} + \right. \\ \left. + \theta_p (c_{13} z_S - c_{33} x_S) \right) + \frac{m_{pp}}{c_{ref}} \omega^2 \left(w_p + \theta_p (y_S \sin \psi - x_S \cos \psi) \right) = 0, \quad (16)$$

$$c_{34} w_p + c_{45} \alpha_{\eta A} + c_{46} \alpha_{\zeta A} + (c_{14} z_S - c_{46} x_S) \theta_p + \left(c_{44} + \frac{J_\xi}{c_{ref}} \omega^2 \right) \alpha_{\xi A} = 0, \quad (17)$$

$$c_{35} w_p + c_{45} \alpha_{\xi A} + c_{56} \alpha_{\zeta A} + (c_{15} z_S - c_{35} x_S) \theta_p + \left(c_{55} + \frac{J_\eta}{c_{ref}} \omega^2 \right) \alpha_{\eta A} = 0, \quad (18)$$

$$c_{36} w_p + c_{46} \alpha_{\xi A} + c_{56} \alpha_{\eta A} + (c_{16} z_S - c_{36} x_S) \theta_p + \left(c_{66} + \frac{J_\zeta}{c_{ref}} \omega^2 \right) \alpha_{\zeta A} = 0. \quad (19)$$

Результаты и их обсуждение

Из условия совместности системы (13)–(19) следует характеристическое уравнение, определяющее собственные частоты свободных колебаний (уравнение не приводится в силу громоздкости). Его решение найдем численно для следующих геометрических и материальных постоянных [4; 6; 7]:

$$x_C = y_C = z_C = 0, x_S = 3,637 \text{ мм}, y_S = -1,500 \text{ мм}, z_S = -6,499 \text{ мм}, \\ a = 4,75 \text{ мм}, b = 2,00 \text{ мм}, h = 0,30 \text{ мм}, \beta_x = 11,047^\circ, \beta_y = -20,623^\circ, \beta_z = 3,366^\circ, \\ E = 2,8\text{--}3,4 \text{ МПа}, v = 0,4, c_{ref} = 0,035\text{--}0,050 \text{ Н/м}.$$

Величины полуосей эллиптической подножной пластины стремени и ее массы, согласно экспериментальным данным [8–12], приведены в табл. 1.

Таблица 1
Полуоси эллиптической подножной пластины стремени и ее масса
Table 1
The semi-axes of the elliptical base of the foot stapes plate and its mass

Параметры модели	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
a_0 , мм	2,64	3,12	2,40	2,50	3,36
b_0 , мм	1,32	1,53	1,21	1,38	1,66
m_{pp} , мг	1,93	–	–	2,24	2,05–4,35

В табл. 2 указаны значения собственных частот свободных колебаний системы, состоящей из мембранны среднего уха с протезом и подножной пластины стремени. При расчете частот используются усредненные данные для упругих свойств и геометрических параметров компонент этой системы ($E = 3,1 \text{ МПа}$, $c_{ref} = 0,0425 \text{ Н/м}$, $a_0 = 2,732 \text{ мм}$, $b_0 = 1,324 \text{ мм}$, $m_{pp} = 2,6425 \text{ мг}$, $a = 4,6705 \text{ мм}$).

С возрастанием угла ψ от 0 до $\pi/2$ соответствующие определенному номеру собственные частоты свободных колебаний убывают (см. табл. 2). Отличие между частотами возрастает с увеличением номера узловой линии. При достижении ψ значения $\pi/2$ собственные частоты существенно возрастают для каждого из номеров узловых линий.

В табл. 3 и 4 приведены значения собственных частот свободных колебаний реконструированной системы среднего уха для различных модулей упругости транспланта и жесткостей связки овального окна соответственно. В первом случае полагается $c_{ref} = 0,0425 \text{ Н/м}$, во втором случае модуль упругости составляет 3,1 МПа. В обоих случаях угол ψ принимается равным $\pi/4$, $a_0 = 2,732 \text{ мм}$, $b_0 = 1,324 \text{ мм}$, $m_{pp} = 2,6425 \text{ мг}$ и $a = 4,6705 \text{ мм}$.

Таблица 2

Собственные частоты свободных колебаний тимпанальной мембраны среднего уха и подножной пластины стремени с установленным между ними протезом, кГц

Table 2

The eigenfrequencies of free oscillations of the middle ear tympanic membrane and the foot stapes plate with a prosthesis attached between them, kHz

Угол ψ	$\omega_1 (n_\psi = 0)$	$\omega_2 (n_\psi = 1)$	$\omega_3 (n_\psi = 2)$	$\omega_4 (n_\psi = 3)$
$\pi/6$	15,61	42,81	83,20	135,52
$\pi/4$	15,60	42,74	82,73	133,07
$\pi/3$	15,58	42,58	81,92	129,29
$\pi/2$	15,65	44,20	119,43	168,72

Примечание. n_ψ – соответствующие номера узловых линий.

Таблица 3

Собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха при различных модулях упругости трансплантата, кГц

Table 3

The eigenfrequencies of free oscillations of the reconstructed middle ear system with different elasticity moduli of the graft, kHz

Модуль упругости, МПа	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
2,8	14,83	40,67	78,85	127,37
2,9	15,10	41,37	80,17	129,32
3,0	15,35	42,06	81,46	131,22
3,1	15,60	42,74	82,73	133,07
3,2	16,17	43,40	83,97	134,87
3,3	16,42	44,06	85,19	136,62
3,4	16,67	44,70	86,38	138,33

Таблица 4

Собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха при различных значениях жесткости связки овального окна, кГц

Table 4

The eigenfrequencies of free oscillations of the reconstructed middle ear system for different values of the ligament stiffness of the oval window, kHz

Жесткость связки c_{ref} , Н/м	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0,035	15,57	42,47	81,49	127,87
0,040	15,59	42,67	82,40	131,74
0,045	15,61	42,80	82,99	134,12
0,050	15,62	42,90	83,39	135,64

Заключение

Построена модель, описывающая свободные колебания реконструированного среднего уха, подвергнутого полной тимпанопластике и оссикулопластике в случае функциональной подвижности стремени. Из всех возможных форм изучены колебания, сопровождающиеся поступательным движением протеза вдоль нормали к тимпанальной мемbrane и поворотом вокруг узлового диаметра на мемbrane. Исследовано влияние модуля упругости хрящевого трансплантата и жесткости связки овального окна на собственные частоты колебаний системы. Установлено, что при увеличении модуля упругости

трансплантата и жесткости связки овального окна собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха также возрастают. В то же время изменение модуля упругости трансплантата оказывает более существенное влияние на изменение значений собственных частот, чем изменение жесткости овального окна.

Библиографические ссылки/References

1. Volandri G, Di Puccio F, Forte P, Carmignani C. Biomechanics of the tympanic membrane. *Journal of Biomechanics*. 2011; 44:1219–1236. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2010.12.023.
2. Beer H-J, Bornitz M, Hardtke H-J, Schmidt R, Hofmann G, Vogel U, et al. Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behavior. *Audiology and Neurootology*. 1999;4:156–162. DOI: 10.1159/000013835.
3. Mürbe D, Zahnert T, Bornitz M, Hüttnerbrink KB. Acoustic properties of different cartilage reconstruction techniques of the tympanic membrane. *Laryngoscope*. 2002;112:1769–1776. DOI: 10.1097/00005537-200210000-00012.
4. Mikhasev G, Ermochenko S, Bornitz M. On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 2010;27(4):289–312. DOI: 10.1093/imammb/dqp020.
5. Zwislocki J. Analysis of the middle ear function. *Journal of Acoustical Society of America. Part I. Input Impedance*. 1962; 34(8):1514–1523. DOI: 10.1121/1.1918382.
6. Selyaninov AA, Yelovikov AM, Borodulina TS, Podgaets RM. Choice of parameters of the stapes prosthesis on the basis of eigenfrequencies at the stapedioplasty operation. *Russian Journal of Biomechanics*. 2009;13(4):40–50.
7. Zhao F, Koike T, Wang J, Sienz H, Meredith Rh. Finite-element analysis of the middle ear transfer functions and related pathologies. *Medical Engineering and Physics*. 2009;31(8):907–916. DOI: 10.1016/j.medengphy.2009.06.009.
8. Gan RZ, Feng B, Sun Q. Three-dimensional finite element modeling of human ear for sound transmission. *Annals of Biomedical Engineering*. 2004;32:847–859. DOI: 10.1023/B:ABME.0000030260.22737.53.
9. Koike T, Wada H, Kobayashi T. Modeling of the human middle ear using the finite-element method. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2002;111(3):1306–1317. DOI: 10.1121/1.1451073.
10. Lee CF, Chen PR, Lee WJ, Chen JH, Liu TC. Three-dimensional reconstruction and modeling of middle ear biomechanics by high-resolution computed tomography and finite element analysis. *Laryngoscope*. 2006;116:711–716. DOI: 10.1097/01.mlg.0000204758.15877.34.
11. Sun Q, Chang KH, Dormer KJ, Dyer RKJr, Gan RZ. An advanced computer-aided geometric modeling and fabrication method for human middle ear. *Medical Engineering and Physics*. 2002;24(9):595–605.
12. Wever EG, Lawrence M. *Physiological acoustics*. Princeton: Princeton University Press; 1982. 454 p.

Статья поступила в редакцию 10.12.2018.
Received by editorial board 10.12.2018.