УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО И ПЯТОГО ПОРЯДКОВ

Б. С. КАЛИТИН [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуются задачи устойчивости нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом знакопостоянных функций Ляпунова. Выделены типы скалярных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков общего вида, для которых определены знакопостоянные вспомогательные функции. Для таких уравнений получены достаточные условия устойчивости в целом. Результаты совпадают с необходимыми и достаточными условиями в соответствующем линейном случае. Отмечаются преимущества в использовании знакоположительных функций по сравнению с классическим методом применения определенно-положительных функций Ляпунова.

Ключевые слова: скалярное дифференциальное уравнение; равновесие; устойчивость; знакопостоянная функция Ляпунова.

Образец цитирования:
Калитин БС. Устойчивость некоторых дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:18–27.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-18-27

For citation:
Kalitine BS. Stability of some differential equations of the fourth-order and fifth-order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:18–27. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-18-27

Автор:
Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:
Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

STABILITY OF SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH-ORDER AND FIFTH-ORDER

B. S. KALITINE [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The article is devoted to the study of the problem of stability of nonlinear ordinary differential equations by the method of semi-definite Lyapunov's functions. The types of fourth-order and fifth-order scalar nonlinear differential equations of general form are singled out, for which the sign-constant auxiliary functions are defined. Sufficient conditions for stability in the large are obtained for such equations. The results coincide with the necessary and sufficient conditions in the corresponding linear case. Studies emphasize the advantages in using the semi-positive functions in comparison with the classical method of applying Lyapunov's definite positive functions.

Key words: scalar differential equation; equilibrium; stability; semi-definite Lyapunov's function.

Введение

Устойчивость решений скалярных дифференциальных уравнений четвертого порядка рассматривалась в работах А. И. Огурцова [1–3]. Подробное изложение и анализ этих результатов содержатся в монографии [4]. Работа [5] посвящена исследованию устойчивости решений скалярных дифференциальных уравнений пятого и шестого порядков. Во всех этих публикациях представлено решение задачи об устойчивости в целом (глобальная асимптотическая устойчивость) с использованием прямого метода Ляпунова [6], подразумевающего построение определенно-положительной функции V с неположительной производной по времени $\dot{V}$. Критерием качества полученных достаточных условий устойчивости в целом (а именно оценка близости достаточных условий к необходимым) служит тот факт, что в соответствующем линейном случае такие условия являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости. В работах [7, гл. 2; 8; 9] решается задача об устойчивости равновесия скалярных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков на основании теории знакопостоянных функций Ляпунова [7].

Предлагаемая статья является продолжением исследований [7–9] для скалярных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot \rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ f(0) = 0, \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям, обеспечивающим единственность решений в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решение (1), проходящее через точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t = 0$, будем обозначать $x(x_0, t)$, т. е. $x(x_0, 0) = x_0$. Система (1) обладает тривиальным решением $x = 0$.

Напомним следующие понятия и определения теории устойчивости [10, с. 18–20]. Решение $x = 0$ системы (1) является:

• устойчивым, если $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall x_0 \in B_\delta) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$;

• притягивающим, если $(\exists \sigma > 0)\ (\forall \alpha > 0)\ (\exists T > 0)\ (\forall x_0 \in B_\sigma) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \alpha \ \forall t \geq T$;

• асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее;

• устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво и для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(x_0, t) \to 0$ при $t \to +\infty$;

• неустойчивым, если $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \delta > 0)\ (\exists x_0 \in B_\delta)\ (\exists t^* \geq 0) \Rightarrow \|x(x_0, t^*)\| \geq \varepsilon$.

Пусть $\mathbb{R}^+$ – множество неотрицательных действительных чисел, $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^+$. Если $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, то через

$$\dot{V}(x_0) = \frac{dV(x_0)}{dt} = \left\langle \frac{\partial V(x_0)}{\partial x}, \ f(x_0) \right\rangle$$

обозначают производную по времени функции V в силу системы (1) в точке x_0.

На основании теорем 3.3.2 и 3.3.3 [11, с. 151–152] о глобальной асимптотической устойчивости компактного положительно инвариантного множества динамической системы сформулируем соответствующее утверждение относительно свойств устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 1 [11, с. 151–152]. *Предположим, что для системы (1) существует функция* $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ *такая, что:*

1) $V(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, V(0) = 0;$

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n;$

3) множество $Y_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ *не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий, кроме нулевой;*

4) все решения системы (1) ограничены при $t \geq 0$.

Тогда решение $x = 0$ *системы (1) устойчиво в целом.*

В исследованиях, проводимых ниже, понадобится также следующая лемма.

Лемма. *Пусть задана система дифференциальных уравнений* $\dot{x} = Ax + f(t)$, *где* A *– постоянная* $n \times n$*-матрица;* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *– непрерывная функция. Предположим, что:*

1) все характеристические корни $\lambda_j(A)$ *матрицы* A *имеют отрицательные действительные части,* $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0, \ j = \overline{1, n};$

2) функция $f(t)$ *ограничена при* $t \geq 0$.

Тогда все решения системы $\dot{x} = Ax + f(t)$ *ограничены при* $t \geq 0$.

Доказательство. Для произвольного решения $x(t), \ x(0) = x_0$, заданной системы дифференциальных уравнений при $t > 0$ справедлива формула [12, с. 193]

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds, \ t > 0.$$

Отсюда можно записать неравенство для нормы решения:

$$\|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|f(s)\| ds, \ t > 0.$$

Заметим, что для нормы матрицы имеет место следующая оценка: $\|e^{At}\| \leq Ne^{-\alpha t}, \ t \geq 0$ [13, с. 282], где $N > 0, \ 0 < \alpha < -\max_j \mathrm{Re}(\lambda_j(A))$. Кроме того, по предположению ограниченности вектор-функции $f(t)$ существует число $M > 0$, для которого $\|f(t)\| \leq M$ при всех $t \geq 0$. В результате для решения $x(t)$ получаем оценку в виде

$$\|x(t)\| \leq Ne^{-\alpha t}\|x_0\| + NM\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}ds = Ne^{-\alpha t}\|x_0\| + \frac{NM}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right), \ t > 0.$$

Это и доказывает ограниченность решения $x(t)$.

Теорема 1 и лемма будут использованы для решения проблемы Айзермана (см. [4]).

Пусть $x(t) \ (x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R})$ – скалярная k раз непрерывно дифференцируемая функция. Для краткости положим

$$\dot{x} = x^{(1)} = \frac{dx}{dt}, \ \ddot{x} = x^{(2)} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ \ldots, \ x^{(k)} = \frac{d^kx}{dt^k} \ \ (x^{(0)} = x)$$

для производных по времени высших порядков функции $x(t)$.

Уравнения четвертого порядка

1. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(4)} + (p + \alpha)\dddot{x} + (q + \alpha p + \beta)\ddot{x} + (\alpha q + \beta p)\dot{x} + \beta q x = 0, \tag{2}$$

где α, β и q – постоянные; $p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений уравнения (2) для всех $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем от (2) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с использованием следующей замены переменных:

$$y = \dot{x},\ z = \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x,\ u = \dddot{x} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x}. \tag{3}$$

Отсюда получаем

$$\dot{y} = \ddot{x} = -\beta x - \alpha y + z,\ \dot{z} = u.$$

Кроме того, согласно (2) имеем равенство $\dot{u} + pu + qz = 0$, т. е. дифференциальное уравнение по переменной u. Из предыдущего следуют также равенства

$$\dddot{x} = -\beta\dot{x} - \alpha\dot{y} + \dot{z} = -\beta y - \alpha\left(-\beta x - \alpha y + z\right) + u = \alpha\beta x + \left(\alpha^2 - \beta\right)y - \alpha z + u.$$

Таким образом, в результате замены (3) приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -qz - \varphi\left(x, y, z, u\right)u, \end{cases} \tag{4}$$

где положено

$$\varphi\left(x, y, z, u\right) = p\left(x, y, -\beta x - \alpha y + z,\ \alpha\beta x + \left(\alpha^2 - \beta\right)y - \alpha z + u\right). \tag{5}$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V\left(x, y, z, u\right) = 0{,}5qz^2 + 0{,}5u^2. \tag{6}$$

Ее производная по времени в силу системы (4) равна

$$\dot{V}\left(x, y, z, u\right) = -\varphi\left(x, y, z, u\right)u^2.$$

Для утверждения об устойчивости в целом предположим, что выполнены условия

$$\begin{gathered} \alpha > 0,\ \beta > 0,\ q > 0; \\ \varphi\left(x, y, z, u\right) > 0\ \ \forall\left(x, y, z, u\right) \in \mathbb{R}^4. \end{gathered} \tag{7}$$

Согласно условию 3) теоремы 1 потребуем, чтобы множество $Y_\infty \backslash \{0\}$, где производная $\dot{V}\left(x, y, z, u\right) = 0$, не содержало ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория $\gamma^- = \gamma^-\left(x, y, z, u\right) \neq \{0\}$ существовала, то вдоль нее компонента $u\left(t\right) = 0\ \forall t \le 0$, а значит, и ее производная по времени $\dot{u}\left(t\right) = 0\ \forall t \le 0$. Вдоль полутраектории γ^- система (4) трансформируется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -qz - \varphi\left(x, y, z, u\right)u, \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ \dot{z} = 0, \\ 0 = -qz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z, \\ z = 0. \end{cases}$$

То есть вдоль γ^- система (4) сводится к упрощенной линейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y. \end{cases}$$

Согласно критерию Гурвица (см. [4]), асимптотическая устойчивость нулевого решения этой системы определяется неравенствами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, гарантированными требованием (7). Следовательно, такая линейная система дифференциальных уравнений не может содержать отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий, и мы приходим к противоречию с существованием γ^-. Таким образом, функция (6) удовлетворяет условию 3) теоремы 1.

Покажем теперь, что всякое решение $\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), u\left(t\right)\right)$ системы (4) ограничено при $t > 0$. Действительно, так как $q > 0$, то наличие знакоположительной функции (6) со знакоотрицательной производной по времени означает, что решение $\left(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t)\right)$ системы (4) ограничено по координатам $\left(z(t),\ u(t)\right)$. Покажем ограниченность по остальным координатам.

Рассмотрим два первых уравнения системы (4), предполагая, что $z(t)$ – компонента решения $\left(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t)\right)$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\beta x - \alpha y + z(t). \end{cases} \tag{8}$$

В силу требования $\alpha > 0$, $\beta > 0$ матрица однородной системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\beta x - \alpha y$ обладает лишь характеристическими корнями с отрицательными действительными частями. Кроме того, мы показали ограниченность функции $z(t)$. Следовательно, для системы дифференциальных уравнений (8) выполнены все условия леммы, которая дает ограниченность по координатам $\left(x(t),\ y(t)\right)$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы 1, определяющей устойчивость в целом нулевого решения системы (4).

Поскольку множество точек $(x,\ y,\ 0,\ 0) \in \mathbb{R}^4$ положительно инвариантно, то неустойчивость решения $x = y = 0$ системы (8) влечет неустойчивость решения $x = y = z = u = 0$ исходной системы (4).

В результате приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Нулевое решение* $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = 0$ *скалярного дифференциального уравнения (2) с постоянными* α, β, q *и функцией* $p = p\left(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x}\right)$ *устойчиво в целом, если выполнены условия (7), где функция* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *определена соотношениями (3) и (5).*

Если же $\beta < 0$ *или* $\beta \geq 0$, $\alpha < 0$, *то нулевое решение уравнения (2) неустойчиво.*

Замечание 1. Для линейного дифференциального уравнения (2) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно коэффициента p.

2. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(4)} + (\alpha + s)\dddot{x} + (\beta + \alpha s)\ddot{x} + (\beta s + \gamma)\dot{x} + \gamma s x = 0, \tag{9}$$

где α, β и γ – постоянные; $s = s\left(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x}\right)$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений для всех $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем от уравнения (9) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с помощью замены переменных

$$y = \dot{x},\ \ z = \dot{y},\ u = \dddot{x} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x. \tag{10}$$

Тогда с учетом представления (9) получим дифференциальное уравнение $\dot{u} + su = 0$ относительно переменной u.

Выведем дифференциальное уравнение относительно переменной z. Из (10) имеем

$$\dot{z} = \ddot{y} = \dddot{x} = -\gamma x - \beta\dot{x} - \alpha\ddot{x} + u = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u.$$

Из предыдущего следует также, что $\ddot{x} = \dot{y} = z$. Таким образом, в результате использования новых переменных (10) приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u, \\ \dot{u} = -\varphi(x,\ y,\ z,\ u)u, \end{cases} \tag{11}$$

где положено

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ u) = s(x,\ y,\ z,\ -\gamma x - \beta y - \alpha z + u). \tag{12}$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию с соответствующей производной по времени в силу системы (11):

$$V(x,\ y,\ z,\ u) = 0{,}5u^2,\ \dot{V}(x,\ y,\ z,\ u) = -\varphi(x,\ y,\ z,\ u)u^2. \tag{13}$$

Потребуем, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} \alpha > 0,\ \alpha\beta > \gamma > 0; \\ \varphi(x,\ y,\ z,\ u) > 0\ \ \forall(x,\ y,\ z,\ u) \in \mathbb{R}^4. \end{gathered} \tag{14}$$

Тогда производная $\dot{V}$ будет неположительной.

Согласно условию 3) теоремы 1 потребуем, чтобы множество $Y_\infty \backslash \{0\}$, где производная $\dot{V}(x, y, z, u) = 0$, не содержало ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория $\gamma^- = \gamma^-(x, y, z, u) \neq \{0\}$ существовала, то вдоль нее компонента $u(t) = 0 \ \forall t \le 0$, а значит, и ее производная по времени $\dot{u}(t) = 0 \ \forall t \le 0$. Вдоль полутраектории γ^- система (11) преобразуется в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z. \end{cases} \tag{15}$$

На основании критерия Гурвица нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$, $\alpha\beta > \gamma > 0$, что обеспечено условием (14). Следовательно, линейная система (15) не может содержать отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий, что приводит к противоречию с существованием γ^-. Таким образом, функция (13) удовлетворяет условию 3) теоремы 1.

Покажем теперь выполнение условия 4) теоремы 1, т. е. что все решения системы (14) ограниченны. Действительно, наличие знакоположительной функции (13) со знакоотрицательной производной означает, что всякое решение $(x(t), y(t), z(t), u(t))$ системы (11) ограничено по координате $u(t)$. Покажем ограниченность по остальным координатам. С этой целью рассмотрим первые три уравнения системы дифференциальных уравнений (11):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u(t), \end{cases}$$

где $u(t)$ – компонента решения $(x(t), y(t), z(t), u(t))$. С учетом требования $\alpha > 0$, $\alpha\beta > \gamma > 0$ матрица соответствующей однородной системы имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, показана ограниченность функции $u(t)$. Следовательно, выполнены все условия леммы, из которой следует ограниченность решений системы (11) и по координатам $(x(t), y(t), z(t))$.

Таким образом, удовлетворены все требования теоремы 1, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Нулевое решение* $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = 0$ *скалярного дифференциального уравнения (9) с постоянными* α, β, γ *и функцией* $s = s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})$ *устойчиво в целом, если выполнены условия (14), где функция* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *определена соотношениями (11) и (12).*

Если же нулевое решение линейной системы (15) неустойчиво, то нулевое решение уравнения (9) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из того факта, что множество точек $(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4$ системы (11) положительно инвариантно.

Замечание 2. Для линейного дифференциального уравнения (9) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно коэффициента s.

Дифференциальные уравнения пятого порядка

1. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(5)} + (p + \alpha)x^{(4)} + (q + \alpha p + \beta)\dddot{x} + (\alpha q + \beta p + \gamma)\ddot{x} + (\beta q + p\gamma)\dot{x} + \gamma q x = 0, \tag{16}$$

где α, β, γ, q – постоянные; $p = p\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}\right)$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений для $x \in \mathbb{R}$.

Характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами α, β, γ, p, q, соответствующего уравнению (16), можно представить в виде

$$\left(\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma\right)\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0. \tag{17}$$

Отсюда, согласно критерию Гурвица, следует, что корни характеристического уравнения линейного уравнения (16) будут иметь отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда наряду с неравенствами $p > 0$, $q > 0$ выполняются неравенства

$$\alpha > 0,\ \alpha\beta > \gamma > 0. \tag{18}$$

Отметим, что характеристическое уравнение любого линейного дифференциального уравнения пятого порядка может быть записано в форме (17) вне зависимости от его корней (вещественных или комплексных).

Перейдем от уравнения (16) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с использованием замены переменных

$$y = \dot{x},\ z = \ddot{x},\ u = \dddot{x} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x,\ w = x^{(4)} + \alpha\dddot{x} + \beta\ddot{x} + \gamma\dot{x}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{z} = \dddot{x} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u,\ \ \dot{u} = w.$$

Кроме того, согласно (16) имеем равенство $\dot{w} + pw + qu = 0$, т. е. дифференциальное уравнение по переменной w.

Запишем вытекающее из (19) представление производной $x^{(4)}$:

$$x^{(4)} = w - \alpha\dddot{x} - \beta\ddot{x} - \gamma\dot{x} = w - \alpha(u - \alpha z - \beta y - \gamma x) - \beta z - \gamma y =$$
$$= \alpha\gamma x + (\alpha\beta - \gamma)y + (\alpha^2 - \beta)z - \alpha u + w.$$

Таким образом, в результате замены переменных (19) приходим к системе из пяти дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u, \\ \dot{u} = w, \\ \dot{w} = -qu - \varphi(x, y, z, u, w)w, \end{cases} \tag{20}$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u, w) = p\Big(x, y, z, -\gamma x - \beta y - \alpha z + u, \alpha\gamma x + (\alpha\beta - \gamma)y + (\alpha^2 - \beta)z - \alpha u + w\Big). \tag{21}$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V(x, y, z, u, w) = 0{,}5qu^2 + 0{,}5w^2. \tag{22}$$

Ее производная по времени в силу (20) равна

$$\dot{V}(x, y, z, u, w) = -\varphi(x, y, z, u, w)w^2.$$

Наряду с условиями (18) потребуем выполнение неравенств

$$q > 0 \text{ и } \varphi(x, y, z, u, w) > 0\ \ \forall(x, y, z, u, w) \in \mathbb{R}^5. \tag{23}$$

Тогда функция V будет знакоположительной, а ее производная $\dot{V}$ – знакоотрицательной, значит, будут выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.

На множестве Y_∞, где $\dot{V}(x, y, z, u, w) = 0$, справедливы равенства $u = 0$, $w = 0$. Аналогично рассуждениям, используемым при исследовании системы четвертого порядка (4), можно показать, что функция (22) удовлетворяет условию 3) теоремы 1, если редуцированная система (20), а именно линейная система дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z, \end{cases} \tag{24}$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. По критерию Гурвица последнее будет выполняться тогда и только тогда, когда коэффициенты системы (24) подчинены требованиям (18).

Таким образом, неравенства (18) и (23) обеспечивают выполнение условия 3) теоремы 1.

Наконец, для выполнения условия 4) теоремы 1 покажем, что всякое решение $\big(x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)\big)$ системы (20) ограничено при $t > 0$. Действительно, так как $q > 0$, то наличие знакоположительной функции (22) со знакоотрицательной производной по времени означает, что решение

$\big(x(t),\, y(t),\, z(t),\, u(t),\, w(t)\big)$ системы (20) ограничено по координатам $\big(u(t),\, w(t)\big)$. Рассмотрим первые три уравнения системы (20) с функцией $u(t)$, являющейся компонентой решения $\big(x(t),\, y(t),\, z(t),$ $u(t),\, w(t)\big)$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\gamma x - \beta y - \alpha z + u(t). \end{cases} \tag{25}$$

С учетом требования (18) матрица системы (25) (при отсутствии ее неоднородной части $u(t)$) имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, показана ограниченность функции $u(t)$. Следовательно, выполнены все условия леммы, из которой следует ограниченность и по координатам $\big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)$.

Таким образом, на основании теоремы 1 условия (18) и (23) дают устойчивость в целом нулевого решения системы (20).

Теорема 4. *Нулевое решение* $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = x^{(4)} = 0$ *скалярного дифференциального уравнения (16) с постоянными* $\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, q$ *и функцией* $p = p\big(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}\big)$ *устойчиво в целом, если выполнены условия (18) и (23), где функция* $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *определена соотношениями (19) и (21).*

Если нулевое решение линейной системы (24) неустойчиво, то нулевое решение уравнения (16) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из свойства положительной инвариантности множества точек $(x, y, z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ системы (20).

Замечание 3. Для линейного дифференциального уравнения (16) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно постоянного коэффициента p.

2. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(5)} + (\alpha + s)x^{(4)} + (\alpha s + \beta)\dddot{x} + (\beta s + \gamma)\ddot{x} + (\delta + s\gamma)\dot{x} + \delta s x = 0, \tag{26}$$

где $\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta$ – постоянные; $s = s\big(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}\big)$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений при всех $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем от уравнения (26) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с помощью замены переменных

$$y = \dot{x},\; z = \dot{y},\; u = \dot{z},\; w = x^{(4)} + \alpha\dddot{x} + \beta\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \delta x. \tag{27}$$

Выведем дифференциальное уравнение относительно переменной w. Из (26) следует, что $\dot{w} + sw = 0$. Такое равенство получается дифференцированием последнего уравнения (27) и путем детального рассмотрения левой части уравнения (26) с выделением в нем выражений для w и $\dot{w}$.

Остается определить дифференциальное уравнение относительно переменной u. Согласно (27) $\dot{u} = \ddot{z} = \dddot{y} = x^{(4)}$. Кроме того, последнее равенство (27) дает

$$x^{(4)} = w - \alpha\dddot{x} - \beta\ddot{x} - \gamma\dot{x} - \delta x = w - \alpha u - \beta z - \gamma y - \delta x.$$

Поэтому получаем

$$\dot{u} = w - \alpha u - \beta z - \gamma y - \delta x.$$

Таким образом, в результате замены переменных (27) приходим к системе из пяти дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + w, \\ \dot{w} = -\varphi(x, y, z, u, w)w, \end{cases} \tag{28}$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u, w) = s(x, y, z, u, -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + w). \tag{29}$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию с соответствующей производной по времени в силу системы (28)

$$V = 0{,}5w^2,\ \dot{V} = -\varphi(x,\ y,\ z,\ u,\ w)w^2. \tag{30}$$

Потребуем выполнение условий

$$\begin{gathered} \alpha > 0,\ \alpha\beta > \gamma,\ \alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - \gamma^2 > 0,\ \delta > 0; \\ \varphi(x,\ y,\ z,\ u,\ w) > 0\ \ \forall(x,\ y,\ z,\ u,\ w) \in \mathbb{R}^5. \end{gathered} \tag{31}$$

Тогда функция V – знакоположительна, ее производная $\dot{V}$ – знакоотрицательна, а значит, выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.

На множестве Y_∞, где $\dot{V}(x,\ y,\ z,\ u,\ w) = 0$, выполняется равенство $w = 0$. Аналогично рассуждениям, проведенным при исследовании системы четвертого порядка (11), можно показать, что функция (30) удовлетворяет условию 3) теоремы 1, если редуцированная система (28), а именно линейная система дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u, \end{cases} \tag{32}$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. По критерию Гурвица последнее будет достигнуто тогда и только тогда, когда для коэффициентов системы (24) выполнены требования (31). Таким образом, если имеют место неравенства (31), то функция (30) удовлетворяет условию 3) теоремы 1.

Наконец, покажем, что всякое решение $(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t),\ w(t))$ системы (28) ограничено при $t > 0$. Действительно, наличие знакоположительной функции (30) со знакоотрицательной производной по времени означает, что решение $(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t),\ w(t))$ ограничено по координате $w(t)$. Рассмотрим первые четыре уравнения системы (28) с компонентой $w(t)$ решения $(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t),\ w(t))$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + w(t). \end{cases} \tag{33}$$

В силу (31) матрица соответствующей однородной системы для (33) (отсутствие неоднородной части $w(t)$) имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, показана ограниченность функции $w(t)$. Значит, выполнены все условия леммы, из которой следует ограниченность и по остальным координатам $(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t))$.

Таким образом, условия (31) обеспечивают выполнение всех требований теоремы 1 и имеет место следующий результат.

Теорема 5. *Нулевое решение* $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = x^{(4)} = 0$ *скалярного дифференциального уравнения (26) с постоянными* $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ *и функцией* $s = s\left(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x},\ x^{(4)}\right)$ *устойчиво в целом, если выполнены условия (31), где функция* $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *определена соотношениями (27) и (29).*

Если нулевое решение системы (32) неустойчиво, то нулевое решение уравнения (26) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из того факта, что множество точек $(x,\ y,\ z,\ u,\ 0) \in \mathbb{R}^5$ системы (28) положительно инвариантно.

Замечание 4. Для линейного дифференциального уравнения (26) проблема Айзермана имеет положительное решение относительно постоянного коэффициента s.

Заключение

Достаточные условия устойчивости в целом, полученные в теоремах 2 и 4 относительно коэффициента p и в теоремах 3 и 5 относительно коэффициента s, совпадают с необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости в соответствующем линейном случае скалярных дифференциальных уравнений (2), (16) и (9), (26). Это указывает на общепринятую качественную оценку полученных результатов задачи устойчивости в целом.

Отметим также, что для каждого из двух пар исследованных скалярных дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков задача Айзермана имеет следующую особенность ее решения. В отличие от традиционной постановки проблемы Айзермана [4] постоянный коэффициент в соответствующем линейном случае можно заменить функцией, зависящей от всех фазовых переменных соответствующей системы дифференциального уравнения, и при этом сохраняется свойство устойчивости в целом.

Библиографические ссылки

1. Огурцов АИ. Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика.* 1958;1(2):124–129.
2. Огурцов АИ. Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Прикладная математика и механика.* 1959;23(1):179–181.
3. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия вузов. Математика.* 1959;3:200–209.
4. Барбашин ЕА. *Функции Ляпунова.* Москва: Наука; 1970. 240 с.
5. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений пятого и шестого порядков. *Математические записки.* 1962;3(2):78–93.
6. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения.* Москва: Гостехиздат; 1950. 472 с.
7. Калитин БС. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Саарбрюккен: LAP; 2012. 223 с.
8. Калитин БС. Об устойчивости уравнения Льенара. *Известия вузов. Математика.* 2018;10:17–28.
9. Калитин БС. Об устойчивости дифференциальных уравнений третьего порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:25–33.
10. Руш Н, Абетс П, Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* Москва: Мир; 1980. 300 с.
11. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюккен: LAP; 2013. 259 с.
12. Амелькин ВВ. *Дифференциальные уравнения.* Минск: БГУ; 2012. 288 с.
13. Демидович БП. *Лекции по математической теории устойчивости.* Москва: Наука; 1967. 472 с.

References

1. Ogurtsov AI. On the stability in general of solutions of third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Mathematika.* 1958;1(2):124–129. Russian.
2. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of two non-linear differential equations of the third and fourth orders. *Applied Mathematics and Mechanics.* 1959;23(1):179–181. Russian.
3. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of certain third-order and fourth-order non-linear differential equations. *Izvestiya vuzov. Mathematika.* 1959;3:200–209. Russian.
4. Barbashin EA. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov functions]. Moscow: Nauka; 1970. 240 p. Russian.
5. Ogurtsov AI. On the stability of solutions of certain nonlinear differential equations of the fifth and sixth orders. *Matematicheskie zapiski.* 1962;3(2):78–93. Russian.
6. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow: Gostekhizdat; 1950. 472 p. Russian.
7. Kalitine BS. *Ustoichivost’ differentsial’nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of differential equations (Lyapunov’s method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2012. 223 p. Russian.
8. Kalitine BS. On the stability of the Liénard equation. *Izvestiya vuzov. Mathematika*. 2018;10:17–28. Russian.
9. Kalitine BS. On the stability of third order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:25–33. Russian.
10. Rouche N, Habets P, Laloy M. *Stability theory by Lyapunov’s direct method.* Berlin: Springer; 1977. 300 p.
Russian edition: Rouche N, Habets P, Laloy M. *Pryamoi metod Lyapunova v teorii ustoichivosti.* Moscow: Mir; 1980. 300 p.
11. Kalitine BS. *Ustoichivost’ dinamicheskikh sistem (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of dynamical systems (Lyapunov’s method of constant-valued functions)]. Saarbrücken: LAP; 2013. 259 p.
12. Amel’kin VV. *Differentsial’nye uravneniya* [Differential equations]. Minsk: Belarusian State University; 2012. 288 p. Russian.
13. Demidovich BP. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow: Nauka; 1967. 472 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 26.10.2017.
Received by editorial board 26.10.2017.