

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОТСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕРХНИХ ЧАСТЕЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ ПЛОСКОСТЬЮ

Я. Б. Задворный

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

E-mail: slava.zadvorny@gmail.com

Рассматривается задача интерактивной визуализации пространственных геометрических объектов – обсуждаются вопросы программной реализации графического сервиса в системе Wolfram Mathematica и расчетных алгоритмов в C++. Эффективность программного средства иллюстрируется примерами интерактивной визуализации пространственной сцены, включающей изображения усеченных плоскостью параллелепипедов.

Ключевые слова: параллелепипед, плоскость, сечение, метод координат.

Основной целью данного проекта является разработка алгоритма для визуализации пространственных объектов и демонстрация этого алгоритма на примере визуализации отсечения четырех параллелепипедов плоскостью. Используются средства системы Wolfram Mathematica, для удобства часть алгоритма запрограммирована в C++. Основным аппаратом исследования явился метод координат в пространстве – на нем основывается алгоритм расчета координат вершин, образующихся при отсечении фигур (с применением подобных алгоритмов можно ознакомиться, например, на <http://algolist.manual.ru/graphics/delinvis.php>). Алгоритм заключается в рассмотрении различных возможных расположений параллелепипеда и секущей плоскости и в зависимости от него – расчета координат вершин образующейся фигуры. В алгоритме расчета и программе реализованы возможности изменения уровня и наклона секущей плоскости, размеров. Нижние основания параллелепипедов располагаются в одной и той же плоскости Oxy .

Для удобства управления наклоном секущей плоскости будем строить ее по трем точкам, в которых она пересекает координатные оси. Обозначим координаты этих точек соответственно $\{a, 0, 0\}$, $\{0, b, 0\}$ и $\{0, 0, c\}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Уравнение плоскости имеет вид (все формулы далее вставь в таблицу, как здесь):

Легко видеть, что уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, может быть записано в виде

$$kx + ly + mz = 1. \quad (1)$$

Вычислим коэффициенты k , l и m . Учитывая координаты трех отмеченных выше точек плоскости, нетрудно получить:

$$k = \frac{1}{a}, l = \frac{1}{b}, m = \frac{1}{c}. \quad (2)$$

Таким образом, уравнение секущей плоскости может быть записано в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3)$$

Выразим из предыдущего уравнения z :

$$z = c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b}. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение функцию $f(x,y) = c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b}$. Данная функция описывает поведение плоскости в зависимости от координат x и y . Заметим, что функция убывает по обоим аргументам (т. к. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

Для визуализации усеченных параллелепипедов необходимо вычислить координаты их вершин.

Приведем алгоритм, позволяющий визуализировать усеченный параллелепипед в пакете Wolfram Mathematica. Расчеты, приведенные ниже, запрограммированы в C++, создана dll, содержащая необходимые функции.

Рассмотрим параллелепипед, расположенный в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с гранями, параллельными плоскостям Oxy , Oxz , Oyz . Пусть вершины параллелепипеда имеют следующие координаты: $\{a_1, a_2, 0\}$, $\{b_1, a_2, 0\}$, $\{b_1, b_2, 0\}$, $\{a_1, b_2, 0\}$, $\{a_1, a_2, h\}$, $\{b_1, a_2, h\}$, $\{b_1, b_2, h\}$, $\{a_1, b_2, h\}$, где $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, $h > 0$.

Заметим, что параллелепипед, усеченный плоскостью, может иметь не более семи граней: шесть граней, расположенных в плоскостях граней исходного параллелепипеда, и седьмая, лежащая в секущей плоскости. Будем называть вертикальными грани, параллельные оси Oz , горизонтальными – грани, параллельные плоскости Oxy , и секущей гранью – грань, лежащую в секущей плоскости. Заметим при этом, что в некоторых случаях параллелепипед будет иметь менее семи граней. Это может произойти, например, в случае, если одна из граней будет полностью «срезана» секущей плоскостью (такую грань назовем абстрактной).

Чтобы сформировать параллелепипед, усеченный плоскостью, для каждой из семи его граней вычислим координаты ее вершин. Рассмотрим случай вертикальной грани.

Пусть секущая плоскость пересекает некое ребро параллелепипеда. Укажем способ, с помощью которого можно вычислить координаты точки пересечения. Продемонстрируем на примере. Пусть ребро, которое пересекает плоскость, соединяет вершины с координатами $\{b_1, a_2, h\}$, $\{a_1, a_2, h\}$. В таком случае две из трех координат точки пересечения уже известны (координата y точки пересечения равна a_2 , координата z точки пересечения равна h). Кроме того, точка пересечения лежит в секущей плоскости. Исходя из этого координата x точки A равна

$$x = \frac{a}{c} \left(c - \frac{ca_1}{b} - h \right). \quad (5)$$

Таким образом можно вычислять координаты точек пересечения ребер параллелепипеда с секущей плоскостью.

Рассмотрим вертикальную грань, вершины которой в исходном (неусеченном) параллелепипеде имеют координаты $\{a_1, a_2, 0\}$, $\{b_1, a_2, 0\}$, $\{b_1, a_2, h\}$, $\{a_1, a_2, h\}$. Вычислим координаты вершин этой грани после усечения ее плоскостью:

а) пусть $f(b_1, a_2) > h$. Это означает, что в точке (b_1, a_2) плоскость пройдет выше данной грани. В силу убывания функции $f(x,y)$ по обоим аргументам это означает, что плоскость эту грань не пересечет; следовательно, координаты вершин грани после усечения те же, что и у исходной грани;

б) аналогично, если $f(a_1, a_2) < 0$, то это означает, что плоскость проходит ниже данной грани, следовательно, данная грань становится абстрактной;

в) пусть теперь $f(b_1, a_2) \leq h$ и $f(a_1, a_2) \geq 0$. Этот случай требует более тщательного рассмотрения. Возможные варианты:

1) Если $f(a_1, a_2) > h$, $f(b_1, a_2) < 0$, то из геометрических соображений понятно, что грань будет иметь следующий вид (рис. 1):

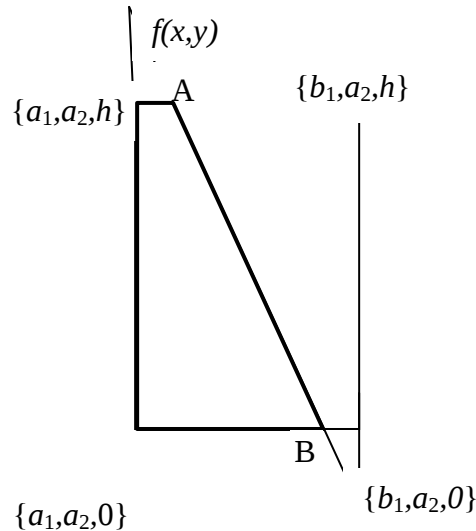


Рис. 1. Отсечение, случай 1

Остается вычислить только координаты точек А и В. Применим для этого алгоритм восстановления третьей координаты. Тогда получим, что координаты точки А –

$$\left\{ \frac{a}{c} \left(c - \frac{ca_1}{b} - h \right), a_2, h \right\}. \text{ Аналогично, координаты точки В } - \left\{ \frac{a}{c} \left(c - \frac{ca_1}{b} \right) a_2, 0 \right\}.$$

Далее остается аналогичным образом рассмотреть еще три случая:

- 2) $f(a_1, a_2) > h$, $h > f(b_1, a_2) > 0$;
- 3) $h > f(a_1, a_2) > 0$, $h > f(b_1, a_2) > 0$;
- 4) $h > f(a_1, a_2) > 0$, $f(b_1, a_2) < 0$.

В результате рассмотрения всех перечисленных выше случаев можно вычислить координаты всех вершин вертикальной грани и визуализировать ее.

Алгоритмы построения горизонтальных и секущей граней аналогичны алгоритму построения вертикальной грани. Различие заключается лишь в переборе возможных вариантов взаимного расположения параллелепипеда и секущей плоскости.

В нашем проекте мы поставили цель реализовать возможность изменения размеров параллелепипедов таким образом, чтобы параллелепипеды не пересекались между собой. Далее приведен алгоритм, позволяющий при интерактивном уточнении размеров и положения определять, в каких пределах допустимо изменение размеров параллелепипедов. Данный алгоритм запрограммирован в С++, функция сохранена в dll.

Отметим, что поскольку в нашем проекте нижние основания параллелепипедов расположены в одной плоскости, то, следовательно, параллелепипеды будут пересекаться тогда и только тогда, когда будут пересекаться их нижние основания.

Заметим, что основания двух параллелепипедов не пересекаются тогда и только тогда, когда не пересекаются их проекции на ось Ox или не пересекаются их проекции на ось Oy . Исходя из этого легко определить по координатам вершин нижних оснований параллелепипедов, пересекаются они или нет. Для этой цели на языке С++ была написана функция

IsAllRight. Функция вернет true в случае, если такие основания не пересекаются, и false – в противном случае.

Обратим внимание, что всего в данной задаче фигурирует 8 длин сторон (т. к. мы ищем две длины для каждого параллелепипеда).

Для начала зафиксируем длины всех восьми сторон равными единице, будем увеличивать длины сторон до тех пор, пока параллелепипеды не пересекаются. Для этого создадим булевский массив размерности 8, присвоим изначально всем элементам массива значение true; каждый элемент массива будет соответствовать одной из восьми сторон. Со всеми сторонами по очереди будем проделывать следующую операцию: прибавим к длине стороны единицу и при помощи функции IsAllRight проверим, будут ли параллелепипеды пересекаться. Если какие-то два параллелепипеда пересекутся, вычтем из длины стороны единицу и установим значение соответствующего элемента булевого массива в false (это будет означать, что больше увеличивать длину этой стороны нельзя). Будем проводить эту операцию со всеми сторонами по очереди, пока все элементы массива не станут равны false. В результате получим наибольшие значения, которые может принимать каждая из длин сторон.

Для решения описанной выше задачи на языке C++ написана функция, предназначенная для расчета координат вершин, получающихся в результате отсечения пространственных фигур. Данная функция сохранена в dll, далее непосредственно для визуализации использованы средства системы Wolfram Mathematica. А именно используются стандартные функции GraphicsComplex, Manipulate. Синтез dll и выполняемых секций СКА обеспечивается при помощи NETLink.

Использование базовых инструментов, основных опций и функции Manipulate системы Wolfram Mathematica позволяет в дружественном интерфейсе реализовать возможности поворота образовавшейся конструкции, изменения наклона плоскости, размеров параллелепипедов. Пользователю предоставлены возможности. Реализована возможность изменять размеры параллелепипедов таким образом, что не допустить их пересечения друг с другом.

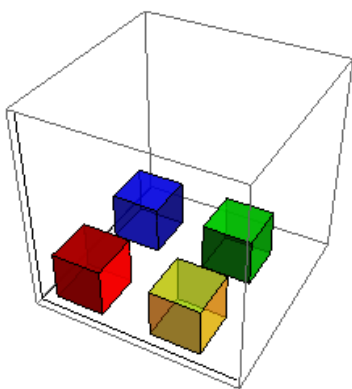


Рис. 2. Конструкция до отсечения

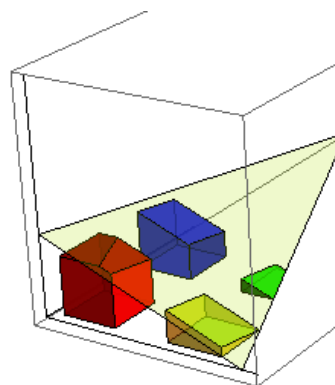


Рис. 3. Конструкция после отсечения

ЛИТЕРАТУРА

Никулин, Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики / Е. А. Никулин. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2003. 558 с.

Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. М. : Мир, 2001. 606 с.