*УДК 519.1*

*Е.В. КРЫЛОВ*

# ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ХЕЛЛИЕВОЙ РАЗМЕРНОСТИ ГРАФА

The paper deals with helly dimension of graph – such minimal number $r$ so that every vertex in the graph belongs to at most $r$ maximal cliques. It is proven that the problem of calculation helly dimension is #P in arbitrary case. It is proven that this task is polynomially solvable in the class of domishold graphs and linear algorithm is presented that calculates helly dimension of domishold graph by its degree sequence.

Все рассматриваемые графы конечны, неориентированны, без петель и кратных ребер. Произвольное подмножество попарно смежных вершин графа называется *кликой*. *Максимальная клика* максимальна относительно включения. Граф называется $r$-*мино*, если каждая его вершина принадлежит не более $r$ максимальным кликам. Класс графов $r$-мино обозначается $M_r$. Он интересен по следующим причинам: при фиксированном $r$ для $r$-мино известны эффективные алгоритмы построения структур данных, оптимальных по используемой памяти и позволяющих определять смежность вершин за время O(1) [1]. Также известен полиномиальный алгоритм, который для фиксированного $r$ определяет, является ли данный граф $r$-мино, и в случае, если это так, строит список всех максимальных клик графа [2]. Класс $r$-мино совпадает с классом реберных графов от хеллиевых гиперграфов ранга не более $r$. Минимальное число $r \in N$ такое, что граф $G$ является $r$-мино, называется *хеллиевой размерностью* графа и обозначается $\mathrm{hd}(G)$. Понятие хеллиевой размерности введено и рассмотрено в работе [3]. Класс реберных графов $k$-униформных гиперграфов обозначается $L_k$. *Краусова размерность* $\mathrm{kd}(G)$ – такое минимальное число $k$, что граф $G \in L_k$. В [3] показано, что краусова размерность не превосходит хеллиеву размерность графа (поскольку $M_k \subset L_k$), однако разность $\mathrm{hd}(G) - \mathrm{kd}(G)$ может быть сколь угодно большой.

Сформулируем две задачи, связанные с нахождением хеллиевой размерности.

**Задача 1.** *Для произвольного графа $G$ найти величину* $\mathrm{hd}(G)$.

**Задача 2.** *Для произвольного графа $G$ и фиксированного числа $r$ определить, верно ли, что* $\mathrm{hd}(G) \le r$.

В [3] поставлен вопрос о сложности задачи 1 и показано, что задача 2 полиномиально разрешима. В [2] приведен полиномиальный алгоритм решения задачи 2. Отметим, что аналогичные задачи нахождения краусовой размерности являются NP-полными.

Задачи 1 и 2 естественно рассматривать в терминах #P-полноты [4]. В первой части нашей работы доказано, что задача 1 является #P-полной.

Вершину графа будем называть изолированной, если она не смежна ни с какой другой вершиной графа, и доминирующей, если она смежна со всеми вершинами. Подмножество $S$ вершин графа $G$ будем называть доминирующим, если каждая вершина не из $S$ смежна с какой-либо вершиной из $S$.

Граф $G$ с множеством вершин $VG$ называется доминантно-пороговым, если существуют неотрицательная вещественнозначная функция $w : VG \to \Re_+$ и число $t \in \Re_+$, что $\sum_{v \in U} w(v) \geq t,$ если и только если $U$ – доминирующее подмножество вершин графа $G$.

Во второй части работы рассматривается задача нахождения хеллиевой размерности в классе доминантно-пороговых графов, введенном в [5]. Этот класс включает класс пороговых графов, который хорошо изучен и широко используется как в теории, так и в ряде приложений [6]. Нами предложен полиномиальный алгоритм нахождения хеллиевой размерности доминантно-порогового графа.

Все общеизвестные теоретико-графовые понятия, которые используются в работе, но не определены, взяты из [7].

## 2. Хеллиева размерность

Напомним некоторые понятия, связанные с задачами подсчета.

Пусть $\Sigma$ и $\Gamma$ – непустые алфавиты и $f$: $\Sigma^* \to B(\Gamma^*)$ – функция из множества $\Sigma^*$ слов над $\Sigma$ в булеан $B(\Gamma^*)$. Если $x$ – слово из $\Sigma^*$, то говорят, что $f(x)$ – *множество следов* для $x$, а элементы этого множества называются *следами* для $x$. С любой такой функцией можно связать следующую задачу подсчета: дано слово $x$ из $\Sigma^*$, необходимо найти количество следов для $x$ во множестве $f(x)$. Далее *задачами подсчета* будут называться сами функции.

*Определение 1*. *Классом* #P называют класс таких задач подсчета $f$, что выполняются следующие условия.

1. Существует полиномиальный алгоритм, который для заданных $x$ и $y$ определяет, верно ли, что $y$ – след для $x$ ( т. е. что $y \in f(x)$).

2. Существует такое натуральное число $k$ (которое может зависеть от задачи подсчета), что $|y| \leq |x|^k$ для любых $y \in f(x)$.

*Определение 2*. Пусть $f$: $\Sigma^* \to B(\Gamma^*)$ и $g$:$\Pi^* \to B(P^*)$ – две задачи подсчета. *Сведением* задачи $g$ к задаче $f$ называют пару функций $v$: $\Pi^* \to \Sigma^*$ и $r$: $N \to N$, вычислимых за полиномиальное время, и такую, что

$$|g(x)| = r(|f(v(x))|).$$

*Определение 3*. Задачу подсчета $f$ называют #P-*сложной*, если любую задачу из #P можно свести к задаче $f$. К тому же, если $f \in$#P, то задача $f$ называется #P-*полной*.

Приведем некоторые примеры #P-сложных задач.

**#3-ВЫЧ.** *Вход*: множество $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ булевых переменных и конъюнктивная нормальная формула $F$ над $X$, в каждой дизъюнкции которой ровно 3 литерала. *Выход*: количество функций $t$: $X \to \{0,1\}$, что в точке $(t(x_1), \ldots, t(x_n))$ формула $F$ принимает истинное значение.

**#3-раскраска**. *Вход*: граф $G$. *Выход*: количество правильных 3-раскрасок графа.

#**Независимое множество.** *Вход*: граф $G$. *Выход*: количество наибольших независимых множеств в графе.

Переформулируем задачу о нахождении хеллиевой размерности следующим образом.

**Задача 3.** Дан граф $G$ и функция $f$ следующего вида: $f(G)=\{r \in N\text{: hd}(G)>r\}$. Требуется определить для заданного графа число элементов во множестве $f(G)$.

Очевидно, что $|f(G)|$ и будет хеллиевой размерностью графа.

**Теорема 1.** *Задача нахождения хеллиевой размерности* #P-*полна*.

Доказательство. Покажем, что $f \in$#P. Действительно, существует полиномиальный алгоритм, определяющий для фиксированного числа $r$, является ли граф $r$-мино. То есть за полиномиальное время можно проверить константы $r$ и графа $G$, верно ли, что $r \in f(G)$. Таким образом, первый пункт определения 1 выполняется. Второй пункт также, очевидно, выполняется, поскольку следами являются натуральные числа. Итак, $f \in$#P по определению.

Покажем теперь, что $f$ – #P-сложная задача. Для этого необходимо для некоторой #P-полной задачи $g$ доказать, что $g$ можно вычислить с помощью некоторого числа элементарных операций и вычислений функции $f$. В качестве такой задачи рассмотрим следующую #P-полную задачу подсчета $g$: дан граф $G$, определить число максимальных клик в нем. В этом случае множеством следов будут являться максимальные клики графа $G$. Известно, что эта задача является #P-полной [4].

Очевидно, что число максимальных клик в графе $G$ совпадает с числом хеллиевой размерности графа $G+x$, где $x$ – доминирующая вершина. Таким образом, $|g(G)|=|f(G+x)|$ и задача $f$ является #P-полной. Теорема доказана.

### 3. Хеллиева размерность пороговых и доминантно-пороговых графов

Для рассматриваемых классов графов есть альтернативные определения – через теоретико-графовые операции $\cup$ и $\oplus$. Пусть даны два графа $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1,2$, и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

*Дизъюнктным объединением* графов $G_1$ и $G_2$ называется граф

$$G_1 \cup G_2 =(V, E),$$

где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

*Соединением* графов $G_1$ и $G_2$ называется граф

$$G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2 + \{uv : u\in V_1,\ v\in V_2\},$$

т. е. к дизъюнктному объединению $G_1 \cup G_2$ добавляются все ребра полного двудольного графа с долями $V_1$ и $V_2$.

Пусть $J_{2r} = \overline{rK_2}$ – дополнительный граф к совершенному паросочетанию $rK_2$; $O_p$ – пустой граф на $p$ вершинах; $K_q$ – полный граф на $q$ вершинах.

Известны [6] следующие характеризации пороговых и доминантно-пороговых графов.

**Теорема 2**. *Граф является пороговым тогда и только тогда, когда он может быть получен из пустого графа последовательным применением операции* $G'\to G''$, *где* $G'' = (G'\cup O_p) \oplus K_q$, *где* $p+q>0$.

**Теорема 3**. *Граф является доминантно-пороговым тогда и только тогда, когда он может быть получен из пустого графа последовательным применением операции* $G'\to G''$, *где* $G'' = (G'\cup O_p)\oplus K_q\oplus J_{2r}$ *и* $p+q+r>0$.

Отметим еще некоторые свойства доминантно-пороговых графов [6].

***1***. В каждом пороговом графе есть либо изолированная, либо доминирующая вершина.

***2***. В каждом $n$-вершинном доминантно-пороговом графе есть либо изолированная вершина, либо доминирующая вершина, либо вершина степени $n$–2.

***3***. Индуцированный подграф (доминантно-)порогового графа также является (доминантно-)пороговым.

Вершины графа $J_{2r}$ в графе $G\oplus J_{2r}$ будем называть *псевдодоминирующими*.

Формулировку свойства 2 можно уточнить следующим образом.

***2′***. В каждом $n$-вершинном доминантно-пороговом графе есть либо изолированная вершина, либо доминирующая вершина, либо две псевдодоминирующие вершины.

Пусть $\mathrm{cl}(G)$ – число всех максимальных клик графа $G = (V, E)$.

Легко проверяются следующие леммы.

**Лемма 1**. *Хеллиева размерность графа* $G\oplus K_q$ *и число максимальных клик равны* $\mathrm{cl}(G)$.

**Лемма 2**. *Хеллиева размерность графа* $G\cup O_p$ *равна* $\mathrm{hd}(G)$, *а число максимальных клик равно* $\mathrm{cl}(G)+p$.

**Лемма 3**. *Хеллиева размерность графа* $G\oplus J_{2r}$ *равна* $2^{r-1}\,\mathrm{cl}(G)$.

Доказательство. Очевидно, что $G\oplus J_{2r} = G\oplus J_2\oplus \ldots \oplus J_2$, где графов $J_2$ ровно $r$ штук. Рассмотрим граф $G\oplus J_2$. Пусть $a$, $b$ – вершины из компоненты $J_2$. Тогда для любой максимальной клики $Q$ графа $G$ в графе $G\oplus J_2$ есть максимальная клика $Q_a$, содержащая $a$ и не содержащая $b$, как и максимальная клика $Q_b$ ($b\in Q_b$, $a\notin Q_b$). Каждая из этих двух вершин покрывается ровно $\mathrm{cl}(G)$ кликами, причем все эти клики различны, поэтому хеллиева размерность графа $G\oplus J_2$ равна $\mathrm{cl}(G)$, а количество максимальных клик в графе равно $2\mathrm{cl}(G)$. Следовательно, хеллиева размерность графа $G\oplus J_{2r}$ равна $2^{r-1}\,\mathrm{cl}(G)$.

Пусть $d(G)$ – это *степенная последовательность* графа $G$, т. е. список степеней его вершин:

$$d(G) = (d_1, \ldots, d_n),\ d_i = \deg v_i,\ \{v_1, \ldots, v_n\} = VG;\ v_i \geq v_{i+1}.$$

Пусть далее $G$ – доминантно-пороговый граф. Очевидны следующие утверждения.

***4***. В $d(G\oplus K_p)$ первые $p$ элементов равны $n$–1.

***5***. В $d(G\cup O_q)$ последние $q$ элементов равны 0.

***6***. В $d(G\oplus J_{2r})$ первые $2r$ элементов равны $n$–2.

В силу свойств 1–3 и лемм 1–3 для определения хеллиевой размерности доминантно-порогового графа достаточно работать только с его степенной последовательностью.

По указанным в свойствах 4–6 степенным последовательностям графов легко построить соответствующую $d(G)$.

Кроме того, при удалении из графа всех доминирующих или всех псевдодоминирующих вершин элементы степенной последовательности графа уменьшаются на число удаленных вершин. Поэтому при таких операциях достаточно помнить это число и учитывать его при дальнейшем анализе степенной последовательности.

Все перечисленное подтверждает корректность алгоритма.

**Алгоритм 1.** Определение хеллиевой размерности доминантно-порогового графа.

**Вход алгоритма:** $d(G)$ – степенная последовательность доминантно-порогового графа $G$, упорядоченная по невозрастанию.

**Выход алгоритма:** хеллиева размерность графа $G$.

**Схема алгоритма:**

1. Список $A = \{\}$.

2. $v$:=0 – количество удаленных элементов на этапах 3б и 3в алгоритма.

3. Пока это возможно, по очереди выполняем следующие пункты:

а) удаляем из $d(G)$ элементы, равные $v$; в список $A$ заносим пару $\{O, p\}$, где $p$ – их количество;

б) удаляем из $d(G)$ элементы, равные $n–v–1$; в список $A$ заносим пару $\{K, q\}$, где $q$ – их количество; $v:=v+q$;

в) удаляем из $d(G)$ элементы, равные $n–v–2$; в список $A$ заносим пару $\{J, 2r\}$, где $2r$ – их количество; $v:=v+2r$.

4. $cl := 0$; $hd := 0$. Для каждого элемента списка $A$, начиная с последнего, выполняем следующие шаги:

а) если текущий элемент – пара $\{O, p\}$, то $cl := cl+p$;

б) если текущий элемент – пара $\{K, q\}$, то $hd:=cl$;

в) если текущий элемент – пара $\{J, 2r\}$, то $hd:= 2^{r–1}\, cl$; $cl:= 2^{r–1}\, cl$.

5. Выводим $hd$ – хеллиеву размерность графа $G$. Конец алгоритма.

Пункты 3а, 3б и 3в соответствуют удалению из графа $G$ изолированных вершин, доминирующих вершин и элементов $J_{2r}$ соответственно. Полученный граф также является доминантно-пороговым, поэтому результатом выполнения п. 3 будет пустой список $d(G)$ и список $A$ элементов вида $\{O, p\}$, $\{K, q\}$ и $\{J, 2r\}$, по которому восстанавливается доминантно-пороговый граф $G$ и вычисляется хеллиева размерность этого графа.

Список степеней вершин графа $G$ будет просмотрен один раз и количество элементов списка $A$ не превосходит количества вершин графа.

В силу изложенного верна

**Теорема 4**. *Алгоритм* 1 *вычисляет хеллиеву размерность доминантно-порогового графа по его неубывающей степенной последовательности за время* $O(n)$, *где n – число вершин графа*.

Отметим, что хеллиева размерность доминантно-пороговых графов выражается как экспонента от числа вершин графа в общем случае. Если же число элементов $J_{2r}$, использованных при построении графа, ограничено константой, тогда хеллиева размерность ограничена полиномом от числа вершин графа. В этом случае, используя алгоритмы из [2], задачу перечисления всех максимальных клик графа возможно решить за полиномиальное время.

Работа написана в рамках проекта НИР 608/28 «Комбинаторные и теоретико-графовые методы и алгоритмы построения и анализа дискретных моделей», который является частью Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели».

1. Morgan D. Useful names for vertices: An introduction to dynamic implicit informative labeling schemes // TR05-04. University of Alberta. 2005.
2. Крылов Е.В., Перез Чернов А.Х // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 1. С. 98.
3. Metelsky Y., Tyshkevich R. // SIAM Journal of Discrete Mathematics. 16. 2003. № 3. P. 438.
4. Valiant L.G. // SIAM J. Comput. 1979. Vol. 8. P. 410.
5. Chvatal V., Hammer P.L. // Research Report CORR 73-21. 1973.
6. Mahadev N.V.R., Peled U.N. Threshold Graphs and Related Topics. Elsevier, 1995.
7. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М., 1990.

Поступила в редакцию 22.06.09.

***Евгений Вячеславович Крылов*** – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики Р.И. Тышкевич.