Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Н. Г. Абрашина-Жадаева, Л. Л. Березкина, М. А. Глецевич

Приведение уравнений второй степени к каноническому виду

Учебно-методическая разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий

Минск
2019

УДК 514.12(075.8)+512(075.8)
А 164

Решение о депонировании вынес:
Совет физического факультета БГУ
протокол № 10 от 25.04.2019г.

Авторы:
зав. кафедрой высшей математики и математической физики
Белорусского государственного университета, к. ф.-м. н., доцент
Абрашина-Жадаева Наталья Григорьевна;
доцент кафедры высшей математики и математической физики
Белорусского государственного университета, к. ф.-м. н., доцент
Березкина Лариса Лукинична;
старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета
Глецевич Марина Александровна.

Рецензенты:
Белько И. В., доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры высшей математики БГАТУ;
Поклонский Н. А., доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры физики полупроводников и наноэлектроники БГУ.

Абрашина-Жадаева, Н. Г. Приведение уравнений второй степени к каноническому виду : учебно-методическая разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий / Н. Г. Абрашина-Жадаева, Л. Л. Березкина, М. А. Глецевич ; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики. – Минск : БГУ, 2019. – 21 с. : ил. – Библиогр.: с. 21.

Приводятся краткие теоретические сведения из теории уравнений второй степени (подробные сведения можно найти в пособии [1]). Рассматривается алгоритм приведения линий и поверхностей второго порядка к каноническому виду. В качестве приложения проиллюстрированы этапы практического применения алгоритма. Разбирается большое количество примеров. Предлагаются задачи для самостоятельного решения с ответами.

Приведение уравнений второй степени к каноническому виду

В прямоугольной декартовой системе координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ трехмерного пространства поверхность второго порядка задается уравнением второй степени, т.е. уравнением вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (1)$$

где a_0 и а $a_{ij}, a_i, i, j = \overline{1,3}$ – некоторые действительные числа, причем среди коэффициентов a_{ij} есть отличные от нуля. Заметим, что слагаемые в левой части уравнения естественным образом разбиваются на три группы:

$$k(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \; -$$

квадратичная форма,

$$l(x,y,z) = 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z \; -$$

линейная форма, a_0 – свободный член.

Введем следующие обозначения: $X = [x \quad y \quad z]^T$ – координатный столбец радиус-вектора произвольной точки, $2B = [2a_1 \;\; 2a_2 \; 2a_3]^T$ – столбец коэффициентов линейной формы, $A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной формы. Тогда уравнение поверхности можно переписать в виде:

$$X^T AX + X^T 2B + a_0 = 0.$$

Вспомним, что уравнение второй степени называется каноническим в том случае, когда оно удовлетворяет следующим условиям.

1. Не содержит произведений переменных, т.е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

2. Если содержит квадрат какой-либо переменной, то не содержит ее первой степени, т.е., если $a_{ii} \neq 0$, то $a_i = 0$.

3. Если содержит первую степень, то только одной переменной, и тогда свободный член равен нулю.

4. Если свободный член отличен от нуля, то он равен 1 или -1.

Теорема. *Для любой поверхности второго порядка в трехмерном пространстве существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта поверхность задается каноническим уравнением.*

Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду основано на двух утверждениях.

1. Для любой квадратичной формы на евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_n$ в $\boldsymbol{E}_n$ существует ортонормированный базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид.

2. Столбец X_0, удовлетворяющий системе линейных уравнений $AX + B = O$, является координатным столбцом радиус-вектора центра сим-

метрии (точки O') этой поверхности, в том случае, когда этот центр симметрии существует. Если при помощи параллельного переноса начало координат перенести в центр симметрии (точку O'), то в новом уравнении поверхности коэффициенты при первых степенях обратятся в нули, квадратичная часть не изменится, а свободный член нового уравнения можно найти по формуле: $a_0' = X_0^T B + a_0$.

Аналогичные утверждения справедливы и для линии второго порядка.

На основании вышесказанного получаем следующий

Алгоритм приведения уравнения линии или поверхности второго порядка к каноническому виду

Пусть поверхность или линия задана уравнением

$$X^T AX + X^T(2B) + a_0 = 0.$$

1. Записываем матрицу A квадратичной формы и столбец $2B$ коэффициентов линейной формы. Затем составляем и решаем систему линейных уравнений

$$AX + B = O. \qquad (2)$$

Дальнейшие действия зависят от того, имеет ли эта система решение.

1-й случай. Система совместна.

2. Пусть X_0 – некоторое решение системы (2). Применим преобразование параллельного переноса $X = X' + X_0$, переводящее начало координат в точку O', имеющую координатный столбец X_0. При этом квадратичная форма уравнения не изменится, линейная форма исчезнет, свободный член нового уравнения находится по формуле $a_0' = X_0^T B + a_0$.

3. Вычисляем собственные значения λ_i матрицы A, для чего составляем и решаем ее характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$.

4. Записываем новое уравнение $\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2 + a_0' = 0$. Если свободный член отличен от нуля, то делим на него и получаем каноническое уравнение, по которому определяем вид поверхности или линии. Если же $a_0' = 0$, то каноническое уравнение уже получено.

5. Определяем взаимное расположение старой и новой систем координат. С этой целью находим собственные векторы, решая систему $(A - \lambda E)X = O$ для каждого из найденных λ_i, и составляем из них ортогональный базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Оси новой системы координат направлены по этим векторам, а начало находится в точке O'. В новой системе координат рисуем линию или поверхность по ее каноническому уравнению.

2-й случай. Система несовместна.

2. Вычисляем собственные значения λ_i матрицы A.

3. Для каждого из собственных значений находим собственные векторы и составляем из них ортогональный базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Нормируя базисные векторы, получаем ортонормированный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Записываем матрицу перехода T от исходного базиса к построенному ортонормированному базису из собственных векторов.

4. Пересчитываем коэффициенты линейной формы по формуле

$$2\tilde{a}_1 \quad 2\tilde{a}_2 \quad 2\tilde{a}_3 \;^T = 2\tilde{B} = T^T(2B).$$

Новое уравнение поверхности имеет вид

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2 + 2\tilde{a}_1\tilde{x} + 2\tilde{a}_2\tilde{y} + 2\tilde{a}_3\tilde{z} + a_0 = 0.$$

5. В случае необходимости избавляемся от первых степеней (см. замечание 1).

6. Определяем положение точки O' по формуле $X_0 = T\tilde{X}_0$, где X_0 – координатный столбец точки O' в исходной системе координат, $\tilde{X}_0$ – координатный столбец этой точки в системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

7. Оси новой системы координат направлены по векторам $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, начало находится в точке O'. По полученному каноническому уравнению определяем вид линии или поверхности и рисуем ее.

Замечание 1. Если в уравнении поверхности второго порядка, не содержащем произведений переменных, наряду с квадратом некоторой переменной присутствует ее первая степень, следует выделить полный квадрат с этой переменной и применить преобразованием параллельного переноса. Если же уравнение содержит квадрат только одной переменной и первые степени двух других, то этим способом воспользоваться не удастся.

Предположим, что уравнение поверхности имеет вид $z^2 + Ax + By + C = 0.$ Выберем новый ортонормированный базис так: в качестве первого вектора возьмем единичный вектор нормали к плоскости $Ax + By + C = 0$, третий вектор оставим без изменения, а второй выберем так, чтобы базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ получился ортонормированным и правым:

$$\vec{e}_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\vec{j}, \vec{e}_2 = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\vec{i} + \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \vec{e}_3 = \vec{k}.$$

Если T_1 –матрица перехода от исходного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ к построенному базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, то старые и новые координаты векторов связаны соотношениями $X' = T_1^{-1}X = T_1^T X$. После перехода к новому базису уравнение поверхности примет вид: $(z')^2 + \sqrt{A^2+B^2}\,x' + C = 0$. Избавиться от свободного члена можно опять же с помощью параллельного переноса. ▲

Пример 1. Определить вид линии второго порядка при помощи приведения уравнения к каноническому виду и нарисовать эту линию, если ее уравнение имеет вид

$$9x^2+16y^2-24xy-20x+110y-50=0.$$

►**1.** $A=\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$, $2B=\begin{matrix} -20 \\ 110 \end{matrix}$. Решаем систему (2), составляя и преобразовывая ее расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & -12 & 10 \\ -12 & 16 & -55 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 10/3 \\ 3 & -4 & 55/3 \end{array}\right].$$

Очевидно, эта система решений не имеет, поэтому рассматриваемая линия не имеет центра. Дальнейшее решение проводим по плану второго случая.

2. Находим собственные значения матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-25\lambda, \quad \lambda_1=0,\ \lambda_2=25.$$

3. Чтобы найти первый собственный вектор, решаем однородную систему линейных уравнений с матрицей $A-\lambda E$ при $\lambda=0$, т.е. с матрицей $A=\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$: $\vec{a}_1=(4;3)$. Собственный вектор с другим собственным значением обязательно ортогонален $\vec{a}_1$, так как матрица A симметрична, поэтому его можно найти, переставив местами координаты вектора $\vec{a}_1$ и в одной из них поменяв знак. Итак, $\vec{a}_2=(-3;4)$. Длина каждого из векторов равна 5. Нормируем $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, разделив каждый на его длину, и получаем ортонормированный базис: $\vec{e}_1=(4/5;3/5)$, $\vec{e}_2=(-3/5;4/5)$.

4. Записываем матрицу перехода и пересчитываем линейную форму:

$$T=\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2\tilde{a}_1 \\ 2\tilde{a}_2 \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Новое уравнение линии имеет вид $25(\tilde{y})^2+100\tilde{y}+50\tilde{x}-50=0$ или $(\tilde{y})^2+4\tilde{y}+2\tilde{x}-2=0$.

5. Это уравнение еще не каноническое, так как наряду с квадратом переменной $\tilde{y}$ содержит и ее первую степень. Чтобы избавиться от последней, выделим полный квадрат с переменной $\tilde{y}$, полученное уравнение преобразуем к виду $(\tilde{y}+2)^2=-2(\tilde{x}-3)$ и применим преобразование параллельного переноса $x'=\tilde{x}-3;\ y'=\tilde{y}+2$. При этом начало координат переходит в точку $O'(\tilde{x}=3;\ \tilde{y}=-2)$. После этого уравнение линии принимает канонический вид $(y')^2=-2x'$, откуда видно, что рассматриваемая линия – парабола с ветвями, направленными в отрицательную сторону оси $O'x'$.

6. Определяем координаты точки O' в исходной системе координат по формуле:

$$X_0 = T\tilde{X}_0 = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}6 \\ 0{,}2 \end{bmatrix},\ O'(x_0 = 3{,}6; y_0 = 0{,}2).$$

7. Приступаем к рисованию. Как обычно, на одном рисунке изображаем и старую систему координат, и новую. Намечаем новое начало координат – точку $O'(x_0 = 3{,}6; y_0 = 0{,}2)$ и **от этой точки** откладываем собственные векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, которые задают направление новых осей. В полученной системе координат рисуем полученную параболу (рис. 1). ◄

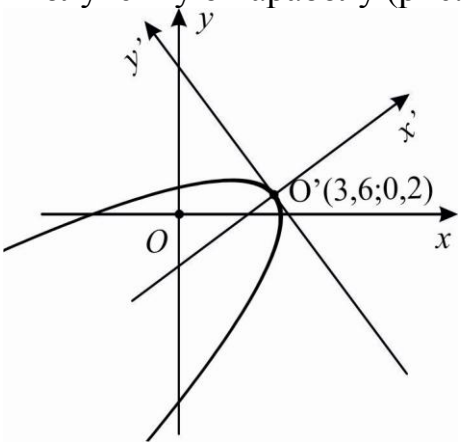

Рис. 1.

Пример 2. Определить вид линии второго порядка, приведя ее уравнение к каноническому виду, и нарисовать эту линию, если ее уравнение имеет вид

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

►**1.** Записываем матрицу квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы. Затем решаем систему (2), составляя и преобразовывая ее расширенную матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},\ 2B = \begin{bmatrix} -12 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 13 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 13 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{array}\right];\ O'(x = -1; y = 2).$$

Линия имеет центр симметрии, решение продолжаем по плану первого случая.

2. Находим свободный член нового уравнения:

$$a_0' = X_0^T B + a_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -13 \end{bmatrix} + 11 = -9.$$

3. Вычисляем собственные значения матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9, \quad \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -1.$$

4. Новое уравнение линии имеет вид $9\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 9 = 0$ (коэффициенты при квадратах совпадают с найденными собственными значениями). Разделив на 9, получаем каноническое уравнение $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2/9 = 1$. Оно задает гиперболу, действительной осью которой является ось $O'\tilde{x}$.

5. Для нахождения первого собственного вектора решаем систему линейных уравнений с матрицей $A - \lambda E$ при $\lambda = 9$: $A - 9E = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_1 = (1; 3)$; $\vec{a}_2 = (-3;1)$.

Теперь можно приступить к рисованию. На одном рисунке изображаем и старую систему координат, и новую. Намечаем новое начало координат – точку $O'(x = -1; y = 2)$ и от этой точки откладываем собственные векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, которые задают направление новых осей. В полученной системе координат рисуем полученную гиперболу, заданную каноническим уравнением (рис.2). ◄

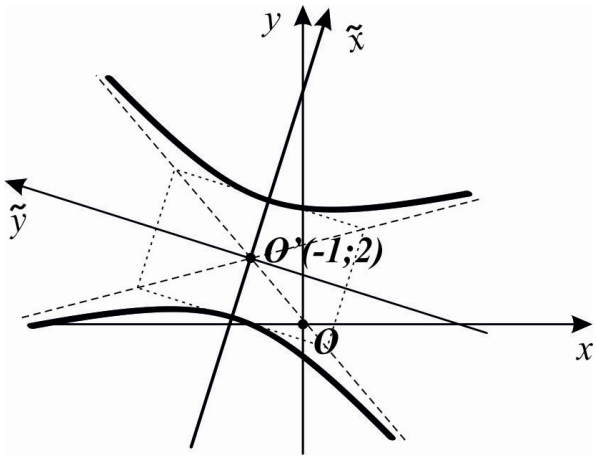

Рис. 2

Замечания. 2. Для кривой второго порядка только один из базисных векторов ищется как собственный (решение системы с матрицей $A - \lambda_i E$), а второй записывается по первому: координаты: меняются местами и в одной из них меняется знак.

3. Коэффициенты при квадратах (собственные значения) в каноническом уравнении пишутся в произвольном порядке, а собственные векторы в новом базисе имеют порядок, соответствующий порядку собственных значений. При этом новая система координат не обязательно получится правой.

4. При первом способе решения нет необходимости выписывать ни преобразование параллельного переноса, ни матрицу перехода, т. к. мы и без непосредственной подстановки знаем, как преобразуется уравнение. Нет необходимости даже нормировать собственные векторы: матрица перехода не нужна, а векторы с целочисленными координатами легче рисовать. Именно поэтому задачу приведения линии второго порядка к канони-

ческому виду в том случае, когда эта линия имеет центр симметрии, сложной не назовешь.

Пример 3. Определить вид поверхности второго порядка

$$x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8zx-14x-4y+14z+16=0,$$

приведя ее уравнение к каноническому виду, и нарисовать эту поверхность.

► **1.** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$, $2B=\begin{bmatrix}-14\\ -4\\ 14\end{bmatrix}$ Проверяем существование центра симметрии, решая систему вида (2):

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -4 & 7\\ 2 & -2 & -2 & 2\\ -4 & -2 & 1 & -7\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -4 & 7\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -4 & -2 & 1 & -7\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -4 & 7\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 6 & -15 & 21\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -4 & 7\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 6 & -15 & 21\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -9 & 9\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right]\Leftrightarrow.$$

Получаем: $O'(x=1; y=1; z=-1)$. Решаем по плану 1-ого случая.

2. $a_0'=X_0^TB+a_0=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7\\ -2\\ 7\end{bmatrix}+16=0.$

3. Находим собственные значения матрицы A:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 2 & -2-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 2 & -2-\lambda & -2\\ -3-\lambda & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & -4\\ 4 & -2-\lambda & -2\\ 0 & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(-3-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-18)=-(3+\lambda)^2(\lambda-6);$$

$$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-3,\ k_2=2.$$

4. Каноническое уравнение поверхности имеет вид $6(\tilde{x})^2-3(\tilde{y})^2-3(\tilde{z})^2=0$ или $2(\tilde{x})^2-(\tilde{y})^2-(\tilde{z})^2=0$, это конус второго порядка, вытянутый вдоль оси OX.

5. Ищем собственные векторы:

$$\lambda_1 = 6: A - \lambda_1 E = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_1' = (36; 18; -36); \ \vec{a}_1 = (2; 1; -2)$$

(используем алгебраические дополнения к элементам первой строки).

$$\lambda_2 = -3: A - \lambda_2 E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} .$$

Все три уравнения системы пропорциональны. Это значит, что существует целая плоскость собственных векторов с собственным значением $\lambda_2 = -3$. Для искомого базиса достаточно взять любые два из них, но взаимно ортогональные. По матрице записываем единственное уравнение системы $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Его общим решением является вектор $\vec{a} = (x_1; -2x_1 + 2x_3; x_3)$. В качестве вектора $\vec{a}_2$ можно взять любое частное решение, например, $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$. Для нахождения координат третьего вектора можно предложить два способа.

а) $\vec{a}_3 = (x_1; -2x_1 + 2x_3; x_3)$, $\vec{a}_3 \perp \cdot \vec{a}_2$, значит, $\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = 0$. Отсюда следует, что $x_1 + x_3 = 0$, т.е. $x_1 = -x_3$. Полагая $x_1 = 1$, получаем $\vec{a}_3 = (1; -4; -1)$.

б) Так как базис должен быть ортогональным, то вектор $\vec{a}_3$ ортогонален как вектору $\vec{a}_1$, так и вектору $\vec{a}_2$, поэтому их векторное произведение как раз и даст нам вектор $\vec{a}_3$:

$$\vec{a}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} .$$

Теперь будем рисовать. Для определения положения точки O' из начала координат идем по ломаной, звенья которой параллельны координатным осям. Вначале идем вдоль оси Ox на одну единицу в положительном направлении, затем от полученной точки передвигаемся на единицу вправо параллельно оси Oy, и, наконец, от последней точки идем на единицу вниз параллельно оси Oz (рис. 3).

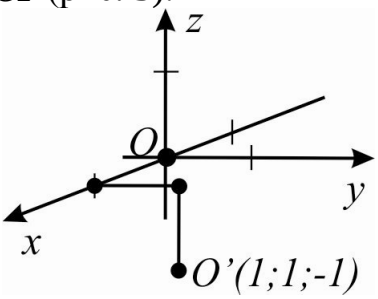

Рис. 3.

От полученной точки откладываем найденные базисные векторы, которые определяют направления новых осей. В полученной системе координат рисуем конус второго порядка (рис. 4).◄

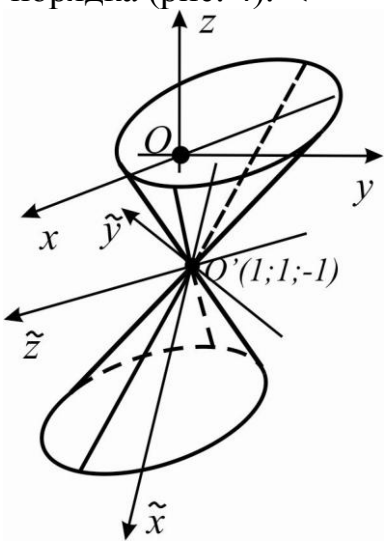

Рис. 4.

Пример 4. Определить вид поверхности второго порядка, приведя ее уравнение к каноническому виду, и нарисовать эту поверхность, если ее уравнение имеет вид

$$2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0.$$

►**1.** $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $2B=\begin{bmatrix}2\\ -10\\ -2\end{bmatrix}$;

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -2 & -1\\ -1 & 5 & 1 & 5\\ -2 & 1 & 2 & 1\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 9 & 0 & 9\\ -1 & 5 & 1 & 5\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 1 & 5\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right].$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений, значит, поверхность имеет бесчисленно много центров симметрии, целую прямую. В качестве точки O' выберем какое-либо частное решение, например, положим $O'(x=0; y=1; z=0)$. Опять проводим решение по плану 1-ого случая.

2. Находим $a_0'=-6$.

3. Вычисляем собственные значения матрицы A:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -2\\ -1 & 5-\lambda & 1\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -2\\ -1 & 5-\lambda & 1\\ -\lambda & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & -2\\ -2 & 5-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda(\lambda^2-9\lambda+18)=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-6),\quad \lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=0.$$

4. Каноническое уравнение поверхности имеет вид $3\tilde{x}^2+6\tilde{y}^2-6=0$ или $\tilde{x}^2/2+\tilde{y}^2=1$, это эллиптический цилиндр.

5. Ищем собственные векторы:

$$\lambda_1 = 3: A - \lambda_2 E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_1' = (-3; -3; 3); \ \vec{a}_1 = (1; 1; -1);$$

$$\lambda_2 = 6: A - \lambda_2 E = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2' = (3; -6; -3); \ \vec{a}_2 = (1; -2; -1);$$

$$\lambda_3 = 0: A - \lambda_2 E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3' = (9; 0; 9); \ \vec{a}_3 = (1; 0; 1)$$

(во всех трех случаях используем алгебраические дополнения к элементам первой строки).

Приступаем к рисованию. В старой системе координат намечаем точку $O'(x = 0, y = 1, z = 0)$ и от нее откладываем базисные векторы, задающие направление новых осей. В полученной системе координат рисуем эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси $O\tilde{z}$ (рис. 5).◄

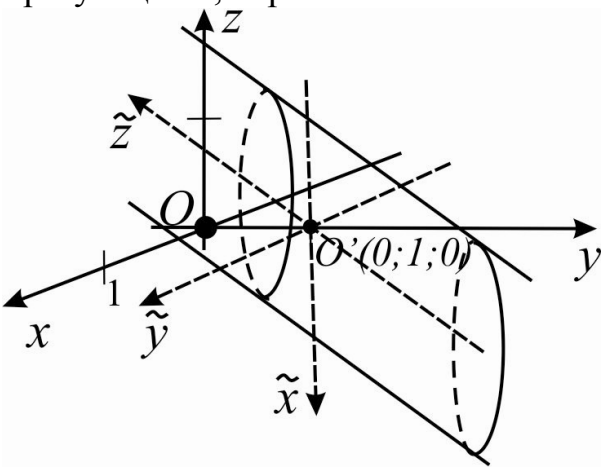

Рис. 5.

Пример 5. Определить вид поверхности второго порядка при помощи приведения уравнения этой поверхности к каноническому виду и нарисовать эту поверхность, если ее уравнение имеет вид

$$7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8xz - 8yz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0.$$

►**1.** Проверяем наличие центра симметрии:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -4 \\ -5 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{bmatrix}, \ 2B = \begin{bmatrix} -16 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix};$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & -4 & 8 \\ -5 & 7 & -4 & 8 \\ -4 & -4 & 16 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & -4 & 8 \\ -5 & 7 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 0 & 9 \\ -6 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right].$$

Система не имеет решений, значит, поверхность не имеет центра. Решение проводим по плану второго случая.

2. Вычисляем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 & -4 \\ -5 & 7-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 & -4 \\ \lambda-12 & 12-\lambda & 0 \\ -4 & -4 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -4 \\ 0 & 12-\lambda & 0 \\ -8 & -4 & 16-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(12-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)(\lambda^2-18\lambda);\ \lambda_1=12,\ \lambda_2=18,\ \lambda_3=0.$$

3. Находим собственные векторы:

$$\lambda_1=12: A-\lambda_2 E = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_1' = (-36;\,36;0);\ \vec{a}_1 = (1;\,-1;\,0);$$

$$\lambda_2=18: A-\lambda_2 E = \begin{bmatrix} -11 & -5 & -4 \\ -5 & -11 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2' = (6;\,6;-24);\ \vec{a}_1 = (1;\,1;\,-4);$$

$$\lambda_3=0: A-\lambda_2 E = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -4 \\ -5 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3' = (96;\,96;48);\ \vec{a}_1 = (2;\,2;\,1)$$

(во всех трех случаях используем алгебраические дополнения к элементам первой строки). Нормируем векторы (каждый делим на его длину) и записываем матрицу перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов:

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{2},\ |\vec{a}_2| = \sqrt{18},\ |\vec{a}_3| = 3,$$

$$\vec{e}_1 = (1/\sqrt{2};\,-1/\sqrt{2};0),\ \vec{e}_2 = (1/\sqrt{18};\,1/\sqrt{18};-4/\sqrt{18}),\ \vec{e}_3 = (2/3;\,2/3;1/3).$$

Матрица перехода имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \end{bmatrix}.$$

4. Пересчитываем коэффициенты линейной формы:

$$2\tilde{B} = 2T^T B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

Новое уравнение имеет вид $12(\tilde{x})^2 + 18(\tilde{y})^2 - 24\tilde{z} + 72 = 0$ или $2(\tilde{x})^2 + 3(\tilde{y})^2 = 4(\tilde{z}-3)$.

5. После преобразования параллельного переноса $x' = \tilde{x};\ y' = \tilde{y};\ z' = \tilde{z} - 3$ уравнение принимает канонический вид $2(x')^2 + 3(y')^2 = 4z'$, оно задает эллиптический параболоид.

6. Новое начало координат $O'(\tilde{x} = 0; \tilde{y} = 0; \tilde{z} = 3)$. Пересчитываем координаты точки O':

$$X_0 = T\tilde{X}_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ O'(x = 2; y = 2; z = 1).$$

7. Оси новой системы координат направлены по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, начало находится в точке O'. Поверхность изображена на рис. 6.◄

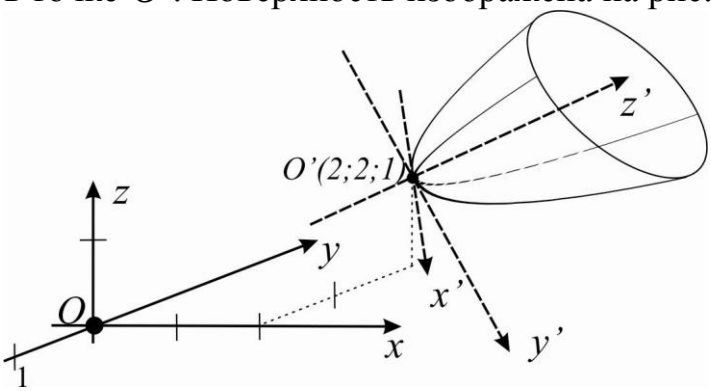

Рис. 6.

Пример 6. Определить вид поверхности второго порядка при помощи приведения ее уравнения к каноническому виду и нарисовать эту поверхность, если ее уравнение имеет вид

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 15x + 20y + 50z = 0.$$

1. Эта поверхность не имеет центра симметрии, в чем вы легко можете убедиться самостоятельно. Решаем по плану второго случая.

2. Составляем матрицу квадратичной формы $16x^2 - 24xy + 9y^2$ и вычисляем собственные значения:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -12 & 0 \\ -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 & 0 \\ -12 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 25),\ \lambda_1 = 0,\ k_1 = 2; \lambda_3 = 25$$

.

3. Находим собственные векторы.

$$\lambda_3 = 25 : A - \lambda_3 E = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ -12 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix},\ \vec{a}_3 = (-4; 3; 0),\quad \vec{e}_3 = (-4/5; 3/5; 0).$$

Для собственного значения $\lambda_1 = 0$ существует целая плоскость собственных векторов. Все они ортогональны вектору $\vec{a}_3 = (4; -3; 0)$ и поэтому

все имеют координаты $\vec{a}=(3a;4a;b)$ при некоторых a и b. Положим, например, $\vec{e}_1=(0;0;1)$, $\vec{a}_2=(3;4;0)$, $\vec{e}_2=(3/5;4/5;0)$.

4. Записываем матрицу перехода и пересчитываем линейную форму:

$$T_1=\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2\tilde{a}_1 \\ 2\tilde{a}_2 \\ 2\tilde{a}_3 \end{bmatrix}=T_1^T\begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 50 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Новое уравнение имеет вид $25\tilde{z}^2+50\tilde{x}+25\tilde{y}=0$ или $\tilde{z}^2+2\tilde{x}+\tilde{y}=0$.

5. Воспользуемся замечанием 1 и перейдем к новому базису $\vec{e}_{1'}=(2/\sqrt{5};1/\sqrt{5};0)$, $\vec{e}_{2'}=(-1/\sqrt{5};2/\sqrt{5};0)$; $\vec{e}_{3'}=(0;0;1)$, после чего получим новое уравнение поверхности: $(z')^2+\sqrt{5}x'=0$ или $(z')^2=-\sqrt{5}x'$. Это уравнение задает параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy'.

Запишем матрицы перехода T_2 от базиса $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ к базису $(\vec{e}_{1'},\vec{e}_{2'},\vec{e}_{3'})$ и $T=T_1T_2$ от исходного базиса $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ к $(\vec{e}_{1'},\vec{e}_{2'},\vec{e}_{3'})$:

$$T_2=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5\sqrt{5}} & \frac{6}{5\sqrt{5}} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5\sqrt{5}} & \frac{8}{5\sqrt{5}} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}.$$

По последней матрице находим базисные векторы $(\vec{e}_{1'},\vec{e}_{2'},\vec{e}_{3'})$: их координаты в базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ записаны в столбцах матрицы T. Эти векторы коллинеарны следующим: $\vec{a}_1=(3;4;10)$, $\vec{a}_2=(6;8;-5)$, $\vec{a}_3=(-4;3;0)$.

6,7. Параллельный перенос не применялся, поэтому начало координат по-прежнему находится в точке O. В новых осях, направление которых задают векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ рисуем параболический цилиндр (рис. 7).▲

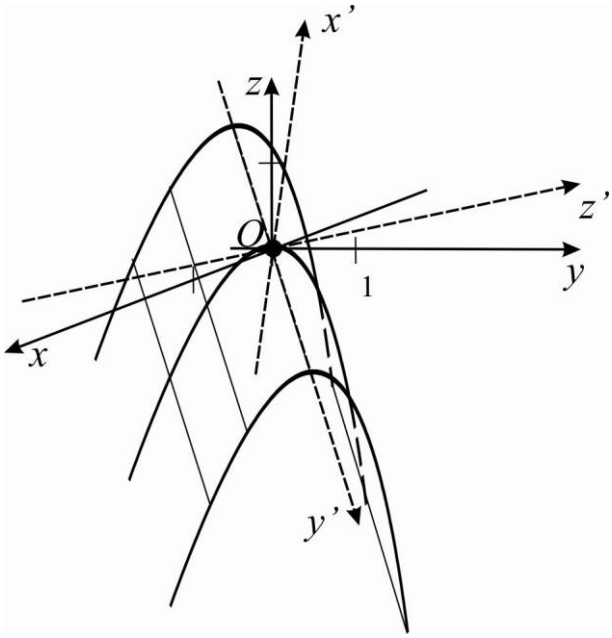

Рис. 7.

Задачи

1. Определить вид линии второго порядка и ее расположение относительно системы координат, если в прямоугольной декартовой системе координат эта линия задана уравнением:

1) $34x^2+24xy+41y^2-72x-246y+319=0$;

2) $x^2-4xy+4y^2-10x+20y+25=0$;

3) $5x^2+4xy+8y^2+12x+48y+36=0$;

4) $x^2+6xy+9y^2+18x-6y+9=0$;

5) $3x^2-8xy-3y^2+20x-10y+30=0$;

6) $x^2+2xy+y^2-2x+6y+2=0$;

7) $13x^2+10xy+13y^2-10x-26y-131=0$;

8) $9x^2+24xy+16y^2-100x+200y-100=0$;

9) $37x^2-18xy+13y^2-18x+26y-27=0$;

10) $25x^2+30xy+9y^2-3x+5y+4=0$;

11) $3x^2-10xy+3y^2-6x+10y-7=0$;

12) $17x^2+18xy+17y^2-34x-18y-191=0$;

13) $8x^2+34xy+8y^2+18x-18y-17=0$;

14) $4x^2+12xy+9y^2-8x-12y-5=0$.

2. Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение относительно системы координат, если в прямоугольной декартовой системе координат эта поверхность задана уравнением:

1) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;

2) $3x^2+3y^2+3z^2+2xy-2xz-2yz-2x-2y-2z-1=0$;

3) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$;

4) $2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x-8y+3=0$;

5) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0$:

6) $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz+10x-4y-2z+4=0$;

7) $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$;

8) $x^2+y^2-xy-yz-zx-1=0$;

9) $2x^2-y^2-z^2+4xy-4xz+8yz+4x-14y+14z-16=0$;

10) $5x^2+7y^2+6z^2-4xz-4yz+18x-6y-24z+30=0$;

11) $4xy+4xz+4yz+4x+4y+4z+3=0$;

12) $3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz+2yz-2x-2y-2z-1=0$;

13) $5x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+6yz+6x+2y-2z=0$;

14) $6x^2+2y^2+2z^2+8yz-8x-4z+2=0$;

15) $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2xz+4y+4z=0$;

16) $x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz-2x+2y+2z=0$;

17) $4y^2-3z^2+4xy-4xz+8yz=0$;

18) $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz+3x+3y-3z=0$;

19) $4x^2+4y^2-4xy-12x-12y-5z+1=0$;

20) $-x^2+y^2+z^2-2yz+2x+3y-5z=0$;

21) $16x^2+9y^2-z^2-24xy-9x-12y+4z+71=0$;

22) $x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz-12x+12y-24z+6=0$;

23) $2x^2+2y^2+2z^2-2xy+2xz+2yz-6x-6y-12z+18=0$;

24) $8y^2+4xy+2xz+4yz+4x+8y=0$;

25) $8y^2+4xy+2xz+4yz+4x+8y-9=0$;

26) $4x^2+9y^2-12xy+2x+10y+13z+1=0$;

27) $9y^2+16z^2+24yz+5x+10y+5z+11=0$.

ОТВЕТЫ

1. Во всех ответах приведены канонические уравнения линий; O' – начало координат, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – направления осей прямоугольной декартовой системы координат, в которой линия задается полученным уравнением. 1) эллипс $X^2+Y^2/2=1$; $O'(x=0;y=3)$, $\vec{a}_1=(3;4)$, $\vec{a}_2=(-4;3)$; 2) сдвоенная прямая $Y^2=0$; $O'(x=5;y=0)$, $\vec{a}_1=(2;1)$, $\vec{a}_2=(-1;2)$; 3) эллипс $X^2/4+Y^2/9=1$; $O'(x=0;y=-3)$, $\vec{a}_1=(1;2)$, $\vec{a}_2=(-2;1)$; 4) парабола $Y^2=-3\sqrt{10}X/5$; $O'(x=-9/20;y=3/20)$, $\vec{a}_1=(3;-1)$, $\vec{a}_2=(1;3)$; 5) гипербола $X^2-Y^2=1$; $O'(x=-2;y=1)$, $\vec{a}_1=(1;2)$, $\vec{a}_2=(-2;1)$; 6) парабола $Y^2=2\sqrt{2}X$; $O'(x=-3/8;y=-5/8)$, $\vec{a}_1=(1;-1)$, $\vec{a}_2=(1;1)$; 7) эллипс $X^2/8+Y^2/18=1$; $O'(x=0;y=1)$, $\vec{a}_1=(1;1)$, $\vec{a}_2=(-1;1)$; 8) парабола $Y^2=8X$; $O'(x=-2;y=-1)$, $\vec{a}_1=(4;-3)$, $\vec{a}_2=(3;4)$; 9) эллипс $X^2/4+Y^2=1$; $O'(x=0;y=-1)$, $\vec{a}_1=(1;3)$, $\vec{a}_2=(-3;1)$; 10) парабола $Y^2=X/\sqrt{34}$; $O'(x=6/17;y=-10/17)$, $\vec{a}_1=(3;-5)$, $\vec{a}_2=(5;3)$; 11) гипербола $X^2/5-Y^2/(5/4)=-1$; $O'(x=1;y=0)$, $\vec{a}_1=(1;1)$, $\vec{a}_2=(-1;1)$; 12) эллипс $X^2/8+Y^2/26=1$; $O'(x=1;y=0)$, $\vec{a}_1=(1;1)$, $\vec{a}_2=(-1;1)$;

13) гипербола $X^2/(1/25)-Y^2/(1/9)=-1$; $O'(x=1;y=-1)$, $\vec{a}_1=(1;1)$, $\vec{a}_2=(-1;1)$; 14) пара параллельных прямых $13Y^2=9$; $O'(x=1;y=0)$, $\vec{a}_1=(3;-2)$, $\vec{a}_2=(2;3)$.

2. Во всех ответах приведены канонические уравнения поверхностей; O' – начало координат, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$– направления осей прямоугольной декартовой системы координат, в которой поверхность задается полученным уравнением. Если поверхность является поверхностью вращения, то направления осей, перпендикулярных оси вращения, определяются неоднозначно. Если поверхность цилиндрическая, то неоднозначно определяется точка O'. В этих случаях ваш ответ может не совпасть с ответом задачника. 1) двуполостный гиперболоид $X^2/(4/5)+Y^2/(4/15)-Z^2/(4/25)=-1$; $O'(x=0;y=1;z=-0{,}4)$, $\vec{a}_1=(1;-1;0)$, $\vec{a}_2=(1;1;0)$, $\vec{a}_3=(0;0;1)$; 2) эллипсоид вращения $X^2/(6/5)+Y^2/(6/5)+Z^2/(12/25)=1$; $O'(x=0{,}4;y=0{,}4;z=0{,}6)$, $\vec{a}_1=(1;0;1)$, $\vec{a}_2=(1;-2;-1)$, $\vec{a}_3=(1;1;-1)$; 3) однополостный гиперболоид $X^2/(1/3)+Y^2/(1/6)-Z^2/(1/2)=1$; $O'(x=-1/3;y=-2/3;z=2/3)$, $\vec{a}_1=(1;-1;1)$, $\vec{a}_2=(1;2;1)$, $\vec{a}_3=(1;0;-1)$; 4) двуполостный гиперболоид вращения $X^2/(1/6)+Y^2/(1/6)-Z^2/(1/2)=-1$; $O'(x=-1/3;y=2/3;z=2/3)$, $\vec{a}_1=(1;0;1)$, $\vec{a}_2=(0;1;0)$, $\vec{a}_3=(1;0;-1)$; 5) гиперболический цилиндр $X^2/(1/3)-Y^2/(1/3)=1$; $O'(x=-1;y=0;z=0)$, $\vec{a}_1=(1;0;-1)$, $\vec{a}_2=(1;-1;1)$, $\vec{a}_3=(1;2;1)$; 6) эллиптический цилиндр вращения, или прямой круговой цилиндр $X^2/(1/6)+Y^2/(1/6)=1$; $O'(x=-1;y=0;z=0)$, $\vec{a}_1=(1;0;-1)$, $\vec{a}_2=(1;-1;1)$, $\vec{a}_3=(1;2;1)$; 7) эллиптический цилиндр $X^2/2+Y^2/(4/3)=1$; $O'(x=-1;y=0;z=-1)$, $\vec{a}_1=(1;0;1)$, $\vec{a}_2=(1;-1;-1)$, $\vec{a}_3=(1;2;-1)$; 8) однополостный гиперболоид $X^2+Y^2/(2/3)-Z^2/2=1$; $O'(x=y=z=0)$, $\vec{a}_1=(1;1;-1)$, $\vec{a}_2=(1;-1;0)$, $\vec{a}_3=(1;1;2)$; 9) конус второго порядка вращения, или прямой круговой конус $X^2+Y^2-Z^2/(1/2)=0$; $O'(x=1;y=-1;z=1)$, $\vec{a}_1=(0;1;1)$, $\vec{a}_2=(4;1;-1)$, $\vec{a}_3=(1;-2;2)$; 10) эллипсоид $X^2/2+Y^2-Z^2/(2/3)=1$; $O'(x=-1;y=1;z=2)$, $\vec{a}_1=(2;1;2)$, $\vec{a}_2=(2;-2;-1)$, $\vec{a}_3=(1;2;-2)$; 11) конус второго порядка вращения, или прямой круговой конус $X^2+Y^2-2Z^2=0$; $O'(x=-0{,}5;y=-0{,}5;z=-0{,}5)$, $\vec{a}_1=(1;-1;0)$, $\vec{a}_2=(1;1;-2)$, $\vec{a}_3=(1;1;1)$; 12) эллипсоид вращения $X^2/(6/5)+Y^2/(6/5)+Z^2/(12/25)=1$; $O'(x=0{,}6;y=0{,}4;z=0{,}4)$, $\vec{a}_1=(1;1;0)$, $\vec{a}_2=(1;-1;2)$, $\vec{a}_3=(1;-1;-1)$; 13) однополостный гиперболоид $X^2/(1/6)+Y^2/(1/3)-Z^2/(1/2)=1$; $O'(x=-2/3;y=2/3;z=-1/3)$, $\vec{a}_1=(2;1;1)$, $\vec{a}_2=(-1;1;1)$, $\vec{a}_3=(0;1;-1)$; 14) конус второго порядка вращения, или прямой

круговой конус $3X^2+3Y^2-Z^2=0$; $O'(x=2/3; y=2/3; z=-1/3)$, $\vec{a}_1=(1;0;0)$, $\vec{a}_2=(0;1;1)$, $\vec{a}_3=(0;1;-1)$; 15) эллиптический цилиндр $X^2/2+Y^2/(4/3)=1$; $O'(x=0; y=-1; z=-1)$, $\vec{a}_1=(0;1;1)$, $\vec{a}_2=(1;1;-1)$, $\vec{a}_3=(2;-1;1)$; 16) параболический цилиндр $Y^2=Z/\sqrt{3}$; $O'(x=y=z=0)$, $\vec{a}_1=(1;1;0)$, $\vec{a}_2=(1;-1;2)$, $\vec{a}_3=(1;-1;-1)$; 17) конус второго порядка $X^2+6Y^2-6Z^2=0$; $O'(x=y=z=0$), $\vec{a}_1=(2;0;-1)$, $\vec{a}_2=(1;5;2)$, $\vec{a}_3=(1;-1;2)$; 18) эллиптический параболоид вращения $X^2+Y^2=-2\sqrt{3}Z$; $O'(x=y=z=0)$, $\vec{a}_1=(1;0;1)$, $\vec{a}_2=(1;-2;-1)$, $\vec{a}_3=(1;1;-1)$; 19) эллиптический параболоид $2X^2+6Y^2=5Z$; $O'(x=3; y=3; z=-7)$, $\vec{a}_1=(1;1;0)$, $\vec{a}_2=(1;-1;0)$, $\vec{a}_3=(0;0;1)$; 20) гиперболический параболоид $2X^2-Y^2=\sqrt{2}Z$; $O'(x=1; y=-2,5; z=-0,5)$, $\vec{a}_1=(0;1;-1)$, $\vec{a}_2=(1;0;0)$, $\vec{a}_3=(0;1;1)$; 21) гиперболический параболоид $25X^2-Y^2=15Z$; $O'(x=3; y=4; z=2)$, $\vec{a}_1=(4;-3;0)$, $\vec{a}_2=(0;0;1)$, $\vec{a}_3=(3;4;0)$; 22) пара параллельных плоскостей $Y^2=5$; $O'(x=6; y=0; z=0)$, $\vec{a}_1=(1;1;0)$, $\vec{a}_2=(1;-1;2)$, $\vec{a}_3=(1;-1;-1)$; 23) ось $X^2+Y^2=0$; $O'(x=3; y=3; z=0)$, $\vec{a}_1=(1;0;1)$, $\vec{a}_2=(1;-2;-1)$, $\vec{a}_3=(1;1;-1)$; 24) пара пересекающихся плоскостей $9X^2-Y^2=0$; $O'(x=2; y=-1; z=0)$, $\vec{a}_1=(1;4;1)$, $\vec{a}_2=(1;0;-1)$, $\vec{a}_3=(2;-1;2)$; 25) гиперболический цилиндр $X^2-Y^2/9=1$; $O'(x=2; y=-1; z=0)$, $\vec{a}_1=(1;4;1)$, $\vec{a}_2=(1;0;-1)$, $\vec{a}_3=(2;-1;2)$; 26) параболический цилиндр $Y^2=-\sqrt{17/13}Z$; $O'(x=2; y=-3; z=0)$, $\vec{a}_1=(3;2;-2)$, $\vec{a}_2=(2;-3;0)$, $\vec{a}_3=(6;4;13)$; 27) параболический цилиндр $Y^2=-(\sqrt{2}/5)Z$; $O'(x=-1; y=-23/25; z=11/25)$, $\vec{a}_1=(5;-4;3)$, $\vec{a}_2=(0;3;4)$, $\vec{a}_3=(5;4;-3)$.

Литература

1. Березкина Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра /Л.Л.Березкина – Минск: РИВШ, 2015. – 354с.
2. Бурдун А.А. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.А. Бурдун, Е.А. Мурашко, М.М. Толкачев, А.С. Феденко — Мн.: Універсітэцскае, 1999. — 302с.
3. Высшая математика. Сборник задач. Часть 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной. — Мн.:БГУ, 2013. — 359с.
4. Высшая математика. Сборник задач. Часть 2. Линейная алгебра. Анализ функций многих переменных. — Мн.:БГУ, 2014. — 384с.
5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер — Санкт-Петербург: Лань, 2003 — 336с.
6. Постников М.М. Аналитическая геометрия / Постников М.М. – Москва: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 415с.
7. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия / Постников М.М. – Москва: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 312с.