

## РЕДКИЕ РАСПАДЫ СТРАННЫХ МЕЗОНОВ

Е. З. АВАКЯН<sup>1)</sup>, С. Л. АВАКЯН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,  
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь

Путем фитирования по константам основных распадов странного сектора мезонов ( $f_K, g_{\phi\gamma}, g_{K^*K\gamma}, g_{K^*K\pi}, g_{\phi K\bar{K}}$ ) определено значение параметра  $\Lambda_S$ , характеризующего размер области конфинмента странного кварка модели конфинмированных кварков. В рамках указанной модели изучен распад  $K_{1s}$ , параметры наклона  $\lambda'_+, \lambda'_-, \lambda'_0$  форм-факторов которого вычислены с использованием полученного значения  $\Lambda_S = 505$  МэВ. Показано, что последовательный учет промежуточных состояний приводит к значительному улучшению найденных численных значений параметров наклона рассматриваемого распада. С 10 % точностью удалось воспроизвести киральное соотношение Каллана – Треймана – Матура – Окубо – Пандита. В работе предсказаны брэнчинги распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$  и  $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$ . Оказалось, что для адекватного описания данных распадов также необходим учет промежуточных состояний. В случае распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  следует принимать во внимание вклады промежуточных мезонов ( $a_1(1260), K_1(1270), \rho(770)$ ). Изучено влияние бозона Хиггса на амплитуды распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ . Вклад диаграмм с промежуточным бозоном Хиггса оказался пренебрежимо мал ввиду большой массы  $m_H \cong 125$  ГэВ и маленькой константы взаимодействия Хиггса с фермионами  $g_{H\bar{f}f} = \frac{m_f}{v}$ , где  $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \approx 246$  ГэВ.

**Ключевые слова:** низкоэнергетические взаимодействия; кварковые модели; каоны; электрослабые взаимодействия.

## RARE DECAYS OF STRANGE MESONS

E. Z. AVAKYAN<sup>a</sup>, S. L. AVAKYAN<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Sukhoi State Technical University of Gomel,  
48 Kastychnika Avenue, Gomel 246746, Belarus

Corresponding author: S. L. Avakyan (avakyan@tut.by)

The value of the parameter  $\Lambda_S$  characterizing the size of the confinement region of the strange quark in the Quark Confinement Model (QCM) was obtained by fitting the constants of the fundamental decays of the strange mesons sector ( $f_K, g_{\phi\gamma}, g_{K^*K\gamma}, g_{K^*K\pi}, g_{\phi K\bar{K}}$ ). The decay  $K_{1s}$  was studied in the framework of QCM. The slope parameters  $\lambda'_+, \lambda'_-, \lambda'_0$  of the form factors of this decay were calculated using the obtained value  $\Lambda_S = 505$  MeV. It is shown that a consistent account of the intermediate states leads to a significant improvement in the obtained numerical values of the slope parameters of the decay under consideration. It should be noted that we managed to reproduce the Callan – Treiman – Maturo – Okubo – Pandit chiral ratio with 10 % accuracy. The branching ratios for  $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$  and  $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$  decays have been predicted

### Образец цитирования:

Авакян ЕЗ, Авакян СЛ. Редкие распады странных мезонов. Журнал Белорусского государственного университета. Физика. 2019;1:51–62.

### For citation:

Avakyan EZ, Avakyan SL. Rare decays of strange mesons. Journal of the Belarusian State University. Physics. 2019;1:51–62. Russian.

### Авторы:

**Елена Зиновьевна Авакян** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета автоматизированных и информационных систем.  
**Сергей Леонович Авакян** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета автоматизированных и информационных систем.

### Authors:

**Elena Z. Avakyan**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of automated and information systems.  
mikot@tut.by  
**Sergey L. Avakyan**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of automated and information systems.  
avakyan@tut.by

in this work. The account of intermediate states turns out to be required for adequate description of hadron interactions. In the case of  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  decays, the contributions of intermediate mesons ( $a_1(1260)$ ,  $K_1(1270)$ ,  $\rho(770)$ ) should be taken into account. It is shown that a consistent account of intermediate hadron states is extremely important for the description of these processes. We also studied the influence of the Higgs boson on the amplitudes of the  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  decays. The contribution of the diagrams with the intermediate Higgs boson turns out to be negligible because of the large mass  $m_H \cong 125$  GeV and the small interaction constant  $g_{Hff} = \frac{m_f}{v}$ , where  $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \approx 246$  GeV.

**Key words:** low energy interactions; quark models; kaons; electroweak interaction.

## Введение

Задача исследования низкоэнергетических распадов каонов остается актуальной на протяжении многих десятилетий. Это связано с тем, что в указанных распадах тесно сплетены сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия кварков. Изучение распадов  $K$ -мезонов позволяет получить информацию о возможных проявлениях новой физики за рамками стандартной модели (СМ). Их можно назвать окном в мир новой физики. С этой точки зрения представляется крайне важным получение достоверных количественных оценок параметров данных распадов в рамках СМ. Каонные распады рассматриваются в целом ряде обзоров, например в [1; 2], изучаются экспериментально (группы BNL KEK – JAEA IHEP, Protvino INFN, Frascati) [3].

В данной работе исследуются распады  $K \rightarrow \pi/l\nu_l$  (так называемые  $K_s$ -распады) и распады  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ . Для первых определены параметры наклона  $\lambda'_+$ ,  $\lambda'_-$ ,  $\lambda'_0$ , а также воспроизведено соотношение Каллана – Треймана – Матура – Окубо – Пандита (КТМОП) [4; 5]. Получены брэнчинги распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$  и  $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$ . Следует отметить, что найденные значения больше экспериментальных примерно в 1,5 раза, что согласуется с результатами, полученными в других подходах. Однако, как показано в работе, последовательный учет промежуточных адронных состояний позволяет значительно приблизить значения брэнчингов к экспериментальным, что в очередной раз говорит о несомненно важной роли промежуточных мезонов в низкоэнергетической адронной физике.

Также вычислен вклад бозона Хиггса в рассматриваемые распады. Все исследование проводилось в рамках модели конфайнмированных кварков (МКК) [6].

## Кварковая модель

МКК базируется на следующих предположениях.

1. Адронные поля возникают в результате интегрирования по глюонным и кварковым переменным в производящем функционале КХД. В результате получается лагранжиан взаимодействия адронов с кварками

$$\mathcal{L}_M = \frac{g_M}{\sqrt{2}} M_i^\mu \bar{q}_m^a \Gamma_\mu \lambda^{mm} q_n^a, \quad (1)$$

где  $M_i^\mu$  – евклидовы поля, связанные с полями физических частиц;  $q^a = (u^a, d^a, s^a)$  – кварковые поля;  $a$  – цветовой индекс;  $\Gamma_\mu$  – матрицы Дирака;  $\lambda_i$  – матрицы Гелл-Манна; константы взаимодействия  $g_M$  мезонов с кварками определяются из так называемого условия связности

$$Z_M = 1 + \frac{3g_M^2}{4\pi^2} \tilde{\Pi}'_M(m_M),$$

где  $\tilde{\Pi}'_M(m_M)$  – производная массового оператора соответствующего мезона. Для дальнейших расчетов удобно вместо  $g_M$  использовать величину

$$h_M = \frac{3g_M^2}{4\pi^2} = -\frac{1}{\tilde{\Pi}'_M(m_M)}.$$

Все взаимодействия адронов с кварками описываются кварковыми диаграммами, полученными из матрицы  $S$ , усредненной по глюонному вакууму:

$$S = \int d\sigma_{VAC} T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_{int} \right\}.$$

Пропагатор кварка имеет вид

$$S(x_1, x_2 | B_{VAC}) = \langle 0 | T(q(x_1) \bar{q}(x_2)) | 0 \rangle = i(p + B_{VAC})^{-1} \delta(x_1 - x_2).$$

2. Конфайнмент кварков обеспечивается наличием нетривиального глюонного вакуума. Предполагается, что усреднение по вакуумным глюонным полям  $B_{VAC}$  кварковых диаграмм, генерируемых  $S$ -матрицей, должно обеспечивать конфайнмент кварков и делать теорию конечной.

Анзац конфайнмента в МКК в случае однопетлевых кварковых диаграмм состоит в замене

$$S = \int d\sigma_{VAC} \text{Tr} \left| M(x_1) S(x_1, x_2 | B_{VAC}) \dots M(x_n) S(x_n, x_1 | B_{VAC}) \right| \rightarrow \\ \rightarrow \int d\sigma_v \text{Tr} \left| M(x_1) S_v(x_1 - x_2) \dots M(x_n) S_v(x_n - x_1) \right|.$$

Здесь

$$S_v(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{1}{v\Lambda_q - \hat{p}}.$$

Параметр  $\Lambda_q$  характеризует размер области конфайнмента кварка с ароматом  $q = u, d, s$ . Мера интегрирования  $d\sigma_v$  определена так, что

$$\int \frac{d\sigma_v}{v - \hat{z}} = G(z) = a(-z^2) + \hat{z}b(-z^2).$$

Функция  $G(z)$  называется функцией конфайнмента. Она не зависит ни от цвета, ни от аромата кварков.  $G(z)$  представляет собой целую функцию, убывающую в евклидовой области быстрее любой степени  $z$  при  $z^2 \rightarrow \infty$ . Выбор функции  $G(z)$ , или, что то же самое,  $a(-z^2)$  и  $b(-z^2)$ , является одним из модельных предположений. Будем использовать  $a(-z^2)$  и  $b(-z^2)$  в виде

$$a(u) = a_0 e^{-u^2 - a_1 u},$$

$$b(u) = b_0 e^{-u^2 - b_1 u}.$$

Требование выполнения в МКК аномальных тождеств Уорда дает дополнительные соотношения между  $a(0)$  и  $b(0)$ :  $a(0) = 2$ ,  $b(0) = -a'(0)$ . Используя  $a(u)$  и  $b(u)$  в приведенной выше форме, можно получить  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = \frac{b_0}{4}$ . Таким образом, свободными параметрами модели являются  $\Lambda_q, b_0, b_1$ . Параметры модели для нестранного сектора были зафиксированы фитированием по хорошо известным константам низкоэнергетической физики  $f_\pi, g_{\rho\gamma}, g_{\pi\gamma\gamma}, g_{\omega\pi\gamma}, g_{\rho\pi\pi}$ . Оказалось, что наилучшее описание всей совокупности констант достигается при  $b_0 = 2$ ,  $b_1 = 0,2$ ,  $\Lambda_n = 430$  МэВ.

### Параметры странного кварка

Для описания странных мезонов необходимо зафиксировать дополнительный параметр  $\Lambda_s$ , описывающий область конфайнмента странного кварка. Для фитирования используем константы основных распадов странных мезонов, происходящих при слабых, электромагнитных и сильных взаимодействиях (табл. 1).

Таблица 1

Константы основных распадов странных мезонов,  
использованные для фитирования параметра странного кварка

Table 1

The constants of the main decays  
of strange mesons used to fit the strange quark parameter

Распад, переход	Аналитическое выражение	Экспериментальное значение [7]	Значение в МКК
$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$	$f_k = \frac{\Lambda}{\pi} \frac{\sqrt{3}F_p(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)}{\sqrt{2F_{pp}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)}}$	157 МэВ	160 МэВ
$\phi \rightarrow \gamma$	$g_{\phi\gamma} = \frac{F_V(\mu_\phi^2)}{\pi\sqrt{8F_{VV}(\mu_\phi^2, \Lambda_s, 0)}}$	0,0758	0,0901

Распад, переход	Аналитическое выражение	Экспериментальное значение [7]	Значение в МКК
$K^* \rightarrow K\gamma$	$g_{K^*K\gamma} = \frac{F_{PVV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}{\Lambda\pi\sqrt{3F_{PP}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)F_{VV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}}$	1,29 ГэВ <sup>-1</sup>	1,17 ГэВ <sup>-1</sup>
$K^* \rightarrow K\pi$	$g_{K^*K\pi} = \frac{2\pi F_{PVV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}{\Lambda\sqrt{F_{PP}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)F_{PP}(\mu_\pi^2, \Lambda_n, 0)F_{VV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}}$	4,65	4,22
$\varphi \rightarrow K\bar{K}$	$g_{\varphi K\bar{K}}(m_\varphi^2) = \frac{2\pi F_{VPP}(\mu_\varphi^2, \Lambda, \Delta)}{F_{PP}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)\sqrt{F_{VV}(\mu_\varphi^2, \Lambda_s, 0)}}$	4,47	4,02

В табл. 1 функции, входящие в аналитические выражения констант, вычисляются по формулам

$$F_{PP}(x, \Lambda, \Delta) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du b\left(-\frac{ux}{4\Lambda^2}\right) \frac{1 - \frac{u}{2} + u\Delta}{\sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}},$$

$$F_{VV}(x, \Lambda, \Delta) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du b\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \frac{1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + u\Delta}{\sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}},$$

$$F_P(x, \Lambda, \Delta) = \frac{\sqrt{1-\Delta} + \sqrt{1+\Delta}}{2} \left[ \int_0^\infty a(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^1 du a\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2} \right] +$$

$$+ \frac{\Delta}{4} [\sqrt{1-\Delta} - \sqrt{1+\Delta}] \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du u a\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2},$$

$$F_V(x) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4} \int_0^1 du b\left(-u\frac{x}{4}\right) \left(1 + \frac{u}{2}\right) \sqrt{1-u},$$

$$F_{PVV}(x, \Lambda, \Delta) = \frac{1}{4} \int_0^{u_\Delta} du a\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}} \right),$$

$$F_{VPP}^-(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du b\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2} +$$

$$+ \int_0^1 d^3\alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \frac{\Lambda_1(2\Lambda_2 - \Lambda_1)}{\Lambda_1^2\alpha_1 + \Lambda_2^2(1 - \alpha_1)} \frac{x\alpha_1\alpha_2}{\Lambda_1^2\alpha_1 + \Lambda_2^2(1 - \alpha_1)} b\left(-\frac{x\alpha_1\alpha_2}{\Lambda_1^2\alpha_1 + \Lambda_2^2(1 - \alpha_1)}\right)$$

и введены обозначения

$$\Lambda^2 = \frac{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2}{2}, \quad \Delta = \frac{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2},$$

$$\mu = \frac{m^2}{4\Lambda^2}, \quad u_\Delta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \Delta^2}}.$$

Оказалось, что наилучшее согласие (в смысле наименьшего суммарного отклонения) достигается при  $\Lambda_s = 505$  МэВ.

### Параметры $K_l$ -распадов

Матричный элемент распада  $K \rightarrow \pi e \nu_e$  определяется диаграммами, приведенными на рис. 1, и может быть записан в виде

$$M^\mu(p_1, p_2) = F_+(t)(p_1 + p_2)^\mu + F_-(t)(p_1 - p_2)^\mu,$$

где  $p_1, p_2$  – импульсы каона и  $\pi$ -мезона;  $t = (p_1 - p_2)^2$ ;  $F_+(t) = F_+^a(t) + F_+^b(t)$ ;  $F_-(t) = F_-^a(t) + F_-^b(t)$ . Индексы  $a$  и  $b$  означают вклады диаграмм  $a$  и  $b$  (см. рис. 1).

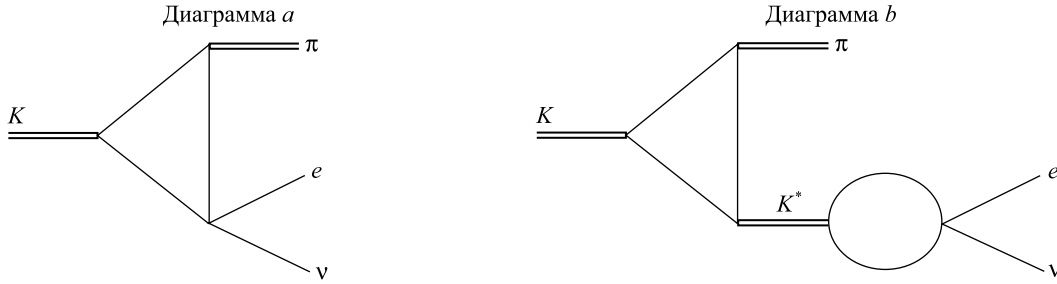


Рис. 1. Диаграммы, описывающие распад  $K \rightarrow \pi e \nu$   
Fig. 1. Diagrams describing decay  $K \rightarrow \pi e \nu$

Указанные вклады в МКК имеют вид

$$F_\pm^a(t) = \sqrt{2h_K h_\pi} F_{VPP}^\mp(t, m_K^2, m_\pi^2, \Lambda_s, \Lambda_u, \Lambda_u),$$

где  $h_K, h_\pi, h_{K^*}$  – константы взаимодействия мезонов с кварками, вычисленные в МКК с помощью условия связности;  $F_{VPP}^\pm(t, m_K^2, m_\pi^2, \Lambda_s, \Lambda_u, \Lambda_u)$  – петлевые интегралы, описывающие переход  $V \rightarrow PP$ :  $K \rightarrow \pi e \nu$ ,

$$F_{VPP}^+(p^2, k_1^2, k_2^2, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{s}{4} \Delta \int_0^{u_\Delta} du u b(-us) \sqrt{1 - u + \left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) b \left( -\frac{P}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2} \right) \times$$

$$\times \frac{P[(\alpha_1 - \alpha_2)(\Lambda_1 - \Lambda_3)(\Lambda_2 - \Lambda_3) + \Lambda_3(\Lambda_1 - \Lambda_2)] + \alpha_1 k_1^2 - \alpha_2 k_2^2}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2},$$

$$F_{VPP}^-(p^2, k_1^2, k_2^2, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{1}{2} \int_0^\infty du b(u) + \frac{s}{2} \int_0^{u_\Delta} du b(-us) \sqrt{1 - u + \left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) b \left( -\frac{P}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2} \right) \times$$

$$\times \frac{P[(\alpha_1 + \alpha_2)(\Lambda_1 - \Lambda_3)(\Lambda_2 - \Lambda_3) + \Lambda_3(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3)] + \alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2}.$$

Здесь  $s = \frac{p^2}{4\Lambda^2}$ ,  $P = \frac{\alpha_1\alpha_2 p^2 + \alpha_1\alpha_3 k_1^2 + \alpha_2\alpha_3 k_2^2}{\alpha_1\Lambda_1^2 + \alpha_2\Lambda_2^2 + \alpha_3\Lambda_3^2}$ .

Учет вклада промежуточных адронных состояний проведен в так называемом цепочном приближении, в котором пропагатор промежуточного векторного мезона определяется следующим образом:

$$h_V G_V^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\Pi_1(p^2) - \Pi_1(m_V^2)} \left\{ -g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu \frac{\Pi_2(p^2)}{\Pi_1(p^2) - \Pi_1(m_V^2) + p^2 \Pi_2(p^2)} \right\}.$$

После стандартных преобразований имеем выражения для вкладов промежуточного векторного мезона в формфакторы  $F_\pm^b(t)$ :

$$F_+^b(t) = -F_+^a(t) \frac{t}{\Pi_1(t) - \Pi_1(m_{K^*}^2)} F_{VV}(t),$$

$$F_-^b(t) = F_-^a(t) \frac{m_k^2 - m_\pi^2}{\Pi_1(t) - \Pi_1(m_{K^*}^2)} F_{VV}(t),$$

где  $F_{VV}(t)$  – петлевой интеграл, описывающий поперечную часть перехода  $V \rightarrow V$ .

В рамках алгебры токов Калланом, Трейманом [4], Матуром, Окубо и Пандитом [5] было установлено простое соотношение между  $F_+(m_K^2)$  и  $F_-(m_K^2)$ :

$$F_+(m_K^2) + F_-(m_K^2) = \frac{f_K}{f_\pi}.$$

Вычисляя значения  $F_\pm(t)$  при  $t = m_K^2 (m_\pi^2 = 0)$ , получим

$$F_+(m_K^2) + F_-(m_K^2) = 0,9 \frac{f_K}{f_\pi}.$$

Таким образом, в рамках МКК с 10 % точностью удалось воспроизвести киральное соотношение КТМОП. Следует заметить, что в данном случае вклады промежуточных состояний сокращаются.

Векторный формфактор  $F_+(t)$  представляет собой  $p$ -волновую проекцию матричного элемента  $\langle 0 | \bar{s} \gamma^\mu u | K \pi \rangle$ , а  $s$ -волновую проекцию определяет скалярный формфактор, являющийся комбинацией  $F_\pm(t)$ :

$$F_0(t) = F_+(t) + \frac{t}{m_k^2 - m_\pi^2} F_-(t).$$

Удобно рассматривать формфакторы, нормированные к значению в нуле:

$$f_{+,0}(t) = \frac{F_{+,0}(t)}{F_{+,0}(0)}.$$

Обычно для анализа экспериментальных данных используют следующую параметризацию:

$$f_{+,0}(t) = 1 + \lambda'_{+,0} \frac{t}{m_\pi^2} + \frac{1}{2} \lambda''_{+,0} \left( \frac{t}{m_\pi^2} \right)^2 + \dots$$

Параметр наклона  $\lambda'_{+,0} = m_\pi^2 f'_{+,0}(0)$ .

Полученные значения параметров  $\lambda'_+$ ,  $\lambda'_-$ ,  $\lambda'_0$ , а также усредненные экспериментальные значения приведены в табл. 2.

Таблица 2  
 Значения параметров наклона  $K_s$   
 Table 2  
 The values of the slope parameters  $K_s$

Параметр	МКК	Эксперимент
$\lambda'_-$	3	0 [7]
$\lambda'_0$	16,5	$11,7 \pm 1,4$ [7]
$\lambda'_+$	31	$29,86 \pm 0,2$ [8]

### Распад $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

Лагранжиан взаимодействия, определяющий распад  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  в МКК, есть

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_w^{\text{eff}},$$

где  $\mathcal{L}_M$  определен формулой (1);  $\mathcal{L}_{em}$  – лагранжиан электромагнитного взаимодействия лептонов и кварков, имеющий стандартный вид:

$$\mathcal{L}_{em} = eA_\mu (\bar{q}_i^a Q_{ij} \gamma^\mu q_j^a + \bar{l} \gamma^\mu l),$$

$A_\mu$  – электромагнитное поле,  $Q = \text{diag}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  – зарядовая матрица.

Для описания слабых взаимодействий кварков воспользуемся эффективным лагранжианом  $\mathcal{L}_w^{\text{eff}}$  для переходов с  $\Delta S = 1$ , к которым и относится рассматриваемый распад. Лагранжиан представляет собой разложение по четырехкварковым операторам [9; 10]:

$$\mathcal{L}_w^{\text{eff}} = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} V_{ud} V_{us} \sum_{i=1}^6 c_i O_i,$$

где  $G_F$  – константа Ферми;  $V_{ud}, V_{us}$  – элементы матрицы Кабиббо – Кобаяши – Маскавы;  $O_i$  – локальные четырехкварковые операторы:

$$O_1 = (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) - (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_2 = (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s) + (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) + 2(\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{d} O_L^\mu d) + 2(\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{s} O_L^\mu s), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_3 = (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s) + (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) - (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{s} O_L^\mu s), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_4 = (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s) + (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) - (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{d} O_L^\mu d), \quad \Delta I = \frac{3}{2},$$

$$O_5 = (\bar{d} O_L^\mu \chi^a s) \sum_{q=u, d, s} (\bar{q} O_R^\mu \chi^a q), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_6 = (\bar{d} O_L^\mu s) \sum_{q=u, d, s} (\bar{q} O_R^\mu q), \quad \Delta I = \frac{1}{2}.$$

Здесь  $O_L^\mu = \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ ,  $O_R^\mu = \gamma^\mu (1 + \gamma^5)$ . Коэффициентные функции  $c_i$  могут быть представлены в виде решений ренормгрупповых уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\chi_1^{4/b} (0,98\chi_2^{0,42} + 0,01\chi_2^{0,80}) + 0,04\chi_1^{-2/b} (\chi_2^{0,42} - \chi_2^{-0,30}), \\ c_2 &= 0,2\chi_1^{-2/b} (0,96\chi_2^{-0,30} + 0,03\chi_2^{-0,12}) - 0,02\chi_1^{4/b} (\chi_2^{0,42} - \chi_2^{-0,30}), \\ c_3 &= 10^{-2} \chi_1^{4/b} (3,3\chi_2^{0,42} + 0,3\chi_2^{-0,3} - 3,9\chi_2^{0,80} + 0,3\chi_2^{-0,12}) + \\ &+ 0,01\chi_1^{-2/b} (-0,1\chi_2^{0,42} - 2,9\chi_2^{-0,30} - 1,4\chi_2^{0,80} - 1,4\chi_2^{-0,12}), \\ c_4 &= 10^{-2} \chi_1^{4/b} (4,8\chi_2^{0,42} - 0,6\chi_2^{-0,3} - 2,9\chi_2^{0,80} - 1,3\chi_2^{-0,12}) + \\ &+ 0,01\chi_1^{-2/b} (-0,2\chi_2^{0,42} - 5,8\chi_2^{-0,30} - 1,0\chi_2^{0,80} + 7,0\chi_2^{-0,12}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \chi_2^{-2/9} \chi_1^{-2/b} \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

где

$$\chi_1 = 1 + b \frac{\bar{g}^2(m_c)}{16\pi^2} \ln \frac{m_w^2}{m_c^2}; \quad \chi_2 = 1 + 9 \frac{\bar{g}^2(m)}{16\pi^2} \ln \frac{m_c^2}{m^2}; \quad b = 11 - \frac{2}{3} N.$$

Из (2) видно, что коэффициенты  $c_i$  зависят от точки нормировки  $\mu$ , бегущей константы  $\alpha_s$  и масс тяжелых кварков, поэтому  $c_i$  не определены однозначно. Нами проведены вычисления матричных элементов рассматриваемых распадов при различных значениях  $\mu$  и  $\alpha_s$ . Для получения амплитуд распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  параметр  $\mu$  варьировался в пределах от 0,9 до 1,9 ГэВ,  $\alpha_s$  – от 0,05 до 1,0.

Матричный элемент, соответствующий распаду  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  (рис. 2), имеет вид

$$\mathcal{M}(K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-) = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} V_{ud} V_{us} e F_+(q^2, m_K^2, m_\pi^2) p^\mu \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} (-ie) \bar{l}(k) \gamma^\nu l(k'),$$

где

$$F_+(q^2, m_K^2, m_\pi^2) = \sqrt{h_K h_\pi} \frac{3\Lambda^2}{8\sqrt{2}\pi} \Phi\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right). \quad (3)$$

Ширина распада

$$\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-) = \frac{G_F^2 \alpha^2}{128\pi^3 m_K^3} V_{ud}^2 V_{us}^2 \frac{9h_K h_\pi}{8\pi} \times \int_{\frac{(m_K - m_\pi)^2}{4m_e^2}}^{(m_K + m_\pi)^2} dq^2 q^2 \left(1 + \frac{2m_e^2}{q^2}\right) \lambda^{3/2}\left(1, \frac{m_K^2}{q^2}, \frac{m_\pi^2}{q^2}\right) \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_e^2}{q^2}, \frac{m_e^2}{q^2}\right) \left| \Lambda^2 \Phi\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) \right|^2,$$

здесь  $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$ .

Для адекватного описания адронных взаимодействий необходим последовательный учет промежуточных состояний. В случае распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  следует принимать во внимание вклады промежуточных мезонов –  $a_1(1260)$ ,  $K_1(1270)$ ,  $\rho(770)$  (см. диаграммы на рис. 3).

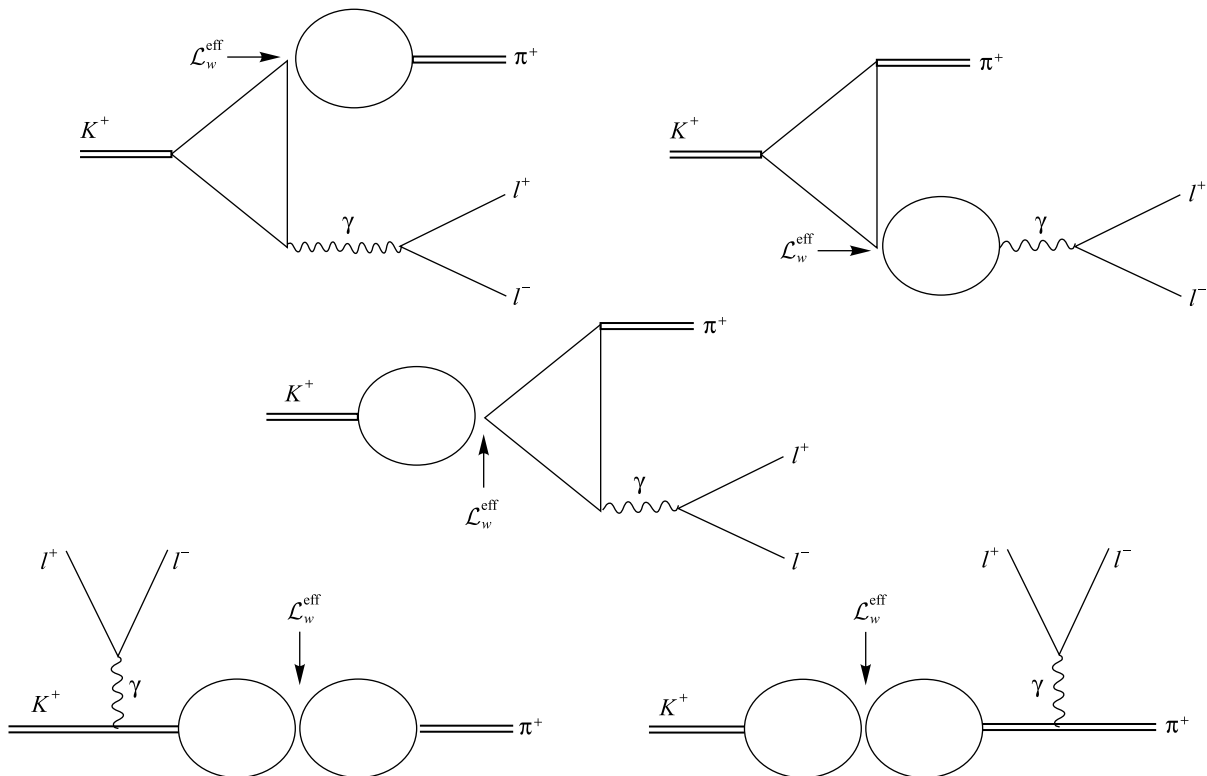


Рис. 2. Диаграммы, описывающие распад  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

Fig. 2. Diagrams describing decay  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$



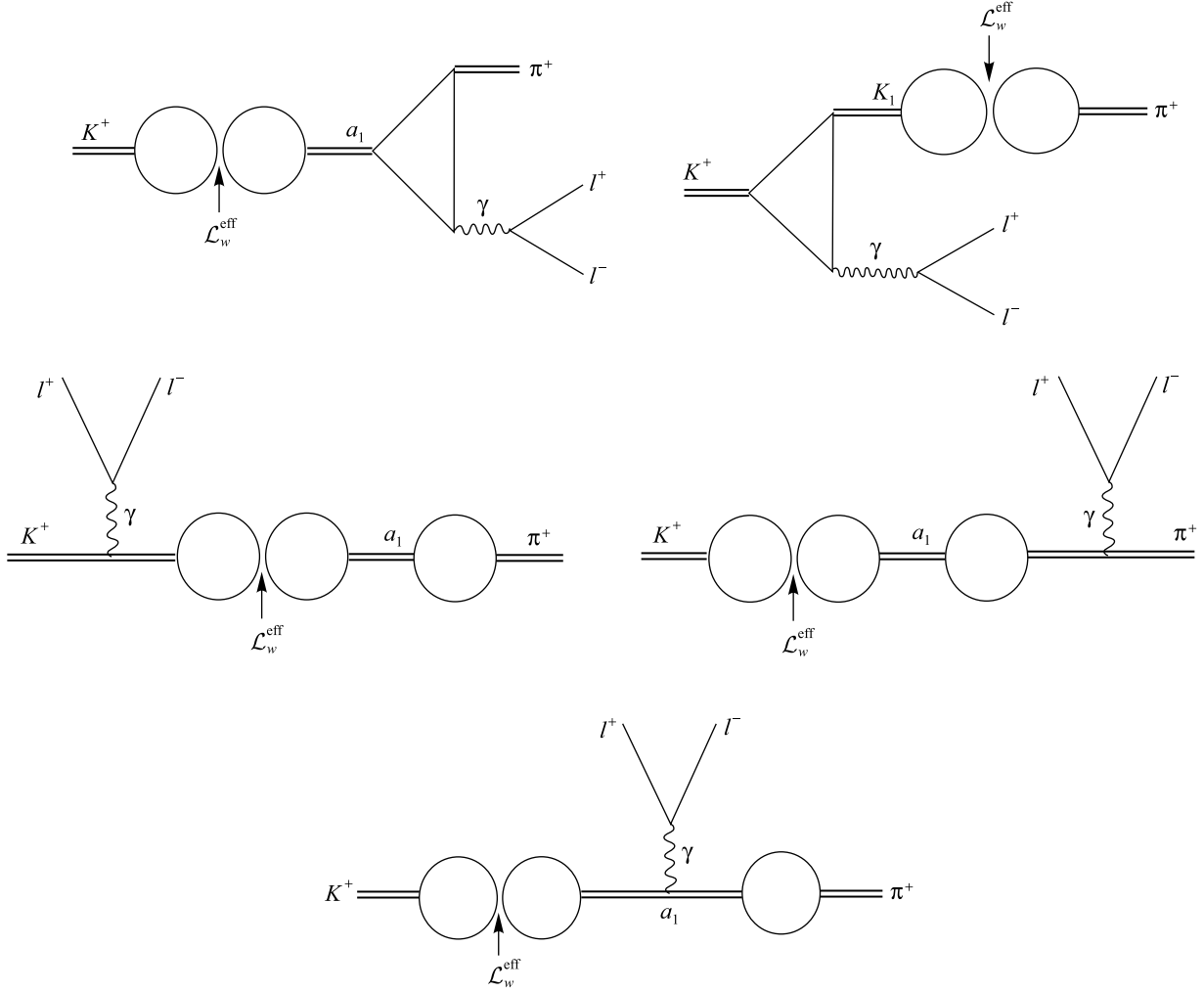


Рис. 3. Диаграммы с промежуточными адронными состояниями, дающими вклад в амплитуды распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

Fig. 3. Diagrams with intermediate hadron states contributing to the  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  decay amplitudes

Последовательный учет диаграмм, изображенных на рис. 3, приводит к изменению формфактора (3).

$$\Phi\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) = \Phi_1\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) + \Phi_2\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right),$$

где  $\Phi_1\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right)$  – вклад прямых диаграмм (см. рис. 2):

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}(-c_1 - 2c_2 - 2c_3 - 2c_4)G_1 + \frac{4}{9}(-c_1 - 2c_2 + 3c_3 + 3c_4)G_2 - \frac{2}{9}c_5G_3;$$

$\Phi_2\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right)$  – вклад диаграмм с промежуточными состояниями, причем

$$\Phi_2 = \Phi_A + \Phi_P,$$

$\Phi_A$  – вклады аксиальных мезонов,  $\Phi_P$  – вклад псевдоскалярного мезона,

$$\Phi_A = \frac{2}{3}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4)G_{A1} + \frac{4}{9}(-c_1 - 2c_2 + 3c_3 + 3c_4)G_{A2} - \frac{2}{9}c_5G_{A3},$$

$$\Phi_P = \frac{2}{3}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4)G_{P1} + \frac{2}{3}c_5G_{P3};$$

$$G_1 = D_{AP}(m_K^2)T_{APV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2) + D_{AP}(m_\pi^2)T_{APV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2);$$

$$G_2 = q^2 D_{VV}(q^2)T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2);$$

$$G_3 = (D_{PP}(m_K^2) + D_{PP}(m_\pi^2))T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2);$$

$$G_{A1} = -2D_{AP}(m_K^2)T_{APV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2) \frac{\Pi_1(m_K^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)}{\Pi_1(m_K^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)} -$$

$$- 2D_{AP}(m_\pi^2)T_{APV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2) \frac{\Pi_1(m_\pi^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)}{\Pi_1(m_\pi^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)};$$

$$G_{A2} = q^2 D_{VV}(q^2) \left( \frac{D_{AP}(m_\pi^2)T_{PPV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2)}{\Pi_1(m_\pi^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)} - \frac{D_{AP}(m_K^2)T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{\Pi_1(m_K^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)} \right);$$

$$G_{A3} = (D_{PP}(m_K^2) + D_{PP}(m_\pi^2)) \left( \frac{D_{AP}(m_K^2)T_{APV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{\Pi_1(m_K^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)} - \frac{D_{AP}(m_\pi^2)T_{APV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2)}{\Pi_1(m_\pi^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)} \right);$$

$$G_{P1} = (m_K^2 D_{AA}^2(m_K^2) - m_\pi^2 D_{AP}^2(m_\pi^2)) \frac{T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{2(D_{PP}(m_K^2) - D_{PP}(m_\pi^2))};$$

$$G_{P3} = (D_{PP}^2(m_K^2) - D_{PP}^2(m_\pi^2)) \frac{T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{2(D_{PP}(m_K^2) - D_{PP}(m_\pi^2))};$$

где

$$D_{AP}(p^2) = -\Lambda \left( A_0 + \mu^2 \int_0^1 du a(-u\mu^2) \sqrt{1-u} \right);$$

$$D_{VV}(p^2) = \frac{1}{3} \left( B_0 + \mu^2 \int_0^1 du b(-u\mu^2) \sqrt{1-u} \left( 1 + \frac{u}{2} \right) \right);$$

$$D_{PP}(p^2) = -\Lambda^2 \left( B_1 + 2\mu B_0 + 2\mu^2 \int_0^1 du b(-u\mu^2) \sqrt{1-u} \right);$$

$$D_{AA}(p^2) = -\Lambda^2 \left( 2B_1 + \frac{4}{3}\mu B_0 + \frac{4}{3}\mu^2 \int_0^1 du b(-u\mu^2) \sqrt{(1-u)^3} \right).$$

Здесь обозначено

$$A_0 \equiv \int_0^{\infty} du a(u), \quad B_0 \equiv \int_0^{\infty} du b(u), \quad B_1 \equiv \int_0^{\infty} du ub(u),$$

$$\mu^2 \equiv \frac{p^2}{4\Lambda^2}, \quad Q \equiv \frac{p_1^2 \alpha_1 \alpha_3 + p_2^2 \alpha_2 \alpha_3 + q^2 \alpha_1 \alpha_2}{\Lambda^2}.$$

Учет промежуточного  $\rho(770)$ -мезона сводится к умножению всех матричных элементов на величину

$$\frac{m_\rho^2 \Pi_2(m_\rho^2)}{m_\rho^2 \Pi_{VV}(m_\rho^2) - q^2 \Pi_2(q^2)}.$$

Найденные брэнчинги распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$  и  $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$  с учетом только диаграмм, изображенных на рис. 2, и с учетом диаграмм с промежуточными мезонами приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения брэнчингов  $Br(K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-)$ , полученных в МКК без учета ( $Br_1$ ) и с учетом ( $Br_2$ ) промежуточных адронных состояний,  $\times 10^{-7}$

Table 3

The values of the brandings  $Br(K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-)$  obtained in the QCM, excluding ( $Br_1$ ) and taking ( $Br_2$ ) into account intermediate hadron states,  $\times 10^{-7}$

Распад	$Br_{\text{эксперим}}$	$Br_1$	$Br_2$
$K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$	$3,11 \pm 0,12$ [11]	$5,58 \pm 0,56$	$3,23 \pm 0,56$
$K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$	$0,962 \pm 0,025$ [12]	$1,15 \pm 0,12$	$0,73 \pm 0,14$

Из табл. 3 видно, что значение  $Br_1$ , определенное без учета промежуточных адронных состояний, превосходит экспериментальное примерно в 1,5 раза, что согласуется с результатами, полученными в других подходах. Учет промежуточных мезонов приводит к значению  $Br_2$ , которое лучше согласуется с имеющейся экспериментальной картиной.

Особый интерес к распаду  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  обусловлен еще и тем, что вклад в его амплитуду может давать бозон Хиггса.

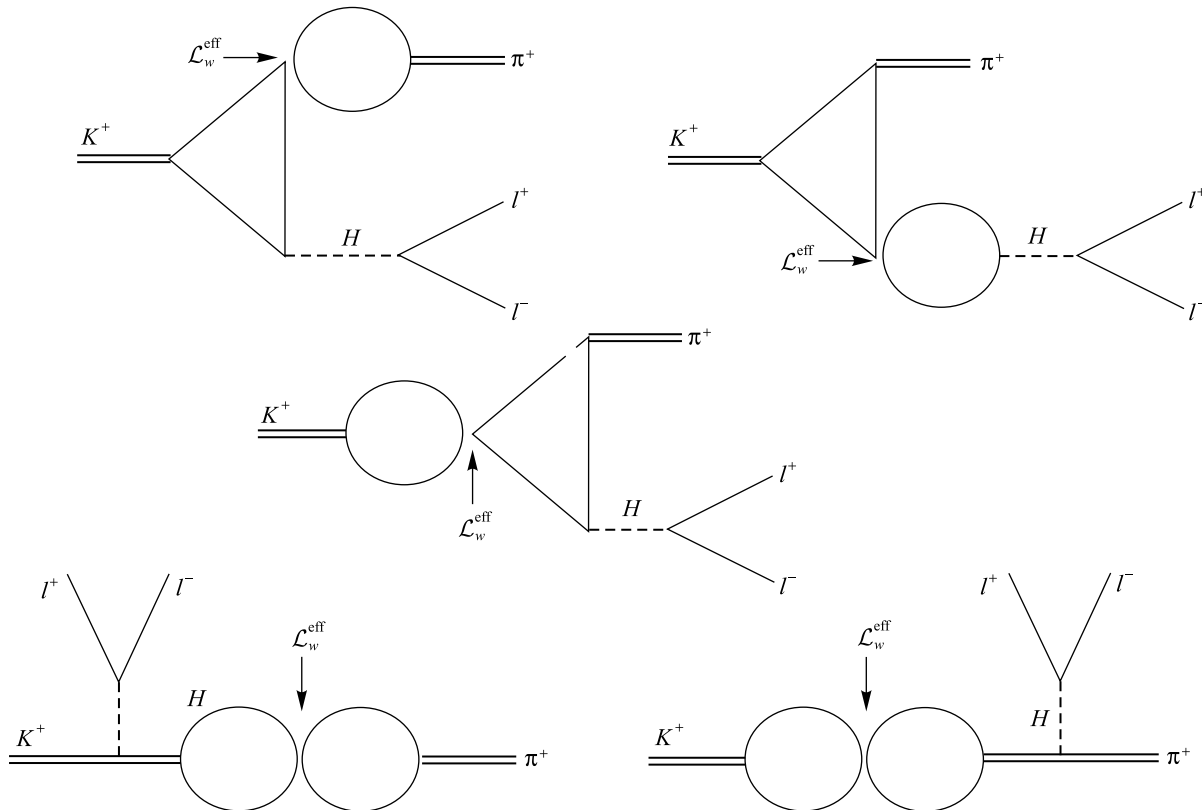


Рис. 4. Диаграммы, описывающие вклад бозона Хиггса в распад  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$   
Fig. 4. Diagrams describing the Higgs boson contribution to decay  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

С учетом диаграмм, приведенных на рис. 4, вклад бозона Хиггса в ширину распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  можно представить в виде

$$\Gamma_H(K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-) = \frac{G_F^2 \alpha^2}{128 \pi^3 m_K^3} V_{ud}^2 V_{us}^2 \frac{9 h_K h_\pi}{32 \pi^2} \Lambda^4 \times \\ \times \int_{4m_e^2}^{(m_K - m_\pi)^2} dq^2 q^2 \lambda^{3/2} \left( 1, \frac{m_K^2}{q^2}, \frac{m_\pi^2}{q^2} \right) \lambda^{1/2} \left( 1, \frac{m_e^2}{q^2}, \frac{m_e^2}{q^2} \right) \frac{g_H^2}{(m_H^2 - q^2)^2} \left| \Lambda^2 \Phi_H \left( \frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \right|^2.$$

Ввиду большой массы  $m_H \cong 125$  ГэВ и маленькой константы взаимодействия Хиггса с фермионами  $g_{Hff} = \frac{m_f}{v}$ , где  $v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2} \approx 246$  ГэВ, вклад в ширину распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$  пренебрежимо мал.

### Заключение

Фитированием по основным константам низкоэнергетических каонных распадов ( $f_\pi$  – константы слабого распада  $K \rightarrow \mu\nu$ ;  $g_{\phi\gamma}$  – константы перехода  $\phi \rightarrow \gamma$ ;  $g_{K^*K\gamma}$  – константы радиационного распада  $K^* \rightarrow K\gamma$ ;  $g_{K^*K\pi}$  и  $g_{\phi K\pi}$  – константы сильных распадов  $K^* \rightarrow K\pi$  и  $\phi \rightarrow K\bar{K}$ ) получен параметр, характеризующий область конфайнмента странного кварка. Оказалось, что наилучшее согласие (в смысле наименьшего суммарного отклонения) достигается при  $\Lambda_S = 505$  МэВ.

Определены параметры  $\lambda'_+$ ,  $\lambda'_-$ ,  $\lambda'_0$  и показано, что учет промежуточного векторного мезона  $K^*$  значительно приближает полученные значения к экспериментальным. Также с 10 % точностью удалось воспроизвести киральное соотношение Каллана – Треймана – Матура – Окубо – Пандита.

Вычислены брэнчинги распадов  $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$  и  $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$ . Установлено, что последовательный учет промежуточных векторных, псевдоскалярных и аксиальных мезонов приводит к значительному уменьшению брэнчингов, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

### Библиографические ссылки / References

1. Buchalla G, Komatsubara TK, Muheim F, Silvestrini L, Artuso M, Asneret DM, et al. *B, D and K decays. European Physical Journal C.* 2008;57(1–2):309–492. DOI: 10.1140/epjc/s10052-008-0716-1.
2. Portoles J. Important rare kaon decays. *Nuclear Physics B: Proceedings Supplements.* 2012;225–227:254–259. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2012.02.053.
3. Komatsubara TK. Experiments with *K*-meson decays. *Progress in Particle and Nuclear Physics.* 2012;67:995–1018. DOI: 10.1016/j.pnpnp.2012.04.001.
4. Callan CG, Treiman SB. Equal time commutators and *K*-meson decays. *Physical Review Letters.* 1966;16:153–157. DOI: 10.1103/PhysRevLett.16.153.
5. Mattur V, Okubo S, Pandit L. Algebra of currents and  $K_{l_3}$  decay. *Physical Review Letters.* 1966;16(9):371–374. DOI: 10.1103/PhysRevLett.16.371.
6. Efimov GV, Ivanov MA. *The Quark Confinement Model of Hadrons.* London: IOP Publishing Ltd.; 1993.
7. Beringer J, Arguin J-F, Barnett RM, Copic K, Dahl O, Groom DE, et al. Review of particle physics particle data group. *Physical Review D.* 2012;86(1):010001. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.010001.
8. Obraztsov V, «OKA» collaboration. High statistics measurement of the  $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$  (Ke3) decay formfactors. *Nuclear and Particle Physics Proceedings.* 2016;273–275:1330–1333. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2015.09.213.
9. Shifman MA, Vainstein AI, Zakharov VI. Asymptotic freedom, light quarks and the origin of the  $\Delta T = \frac{1}{2}$  rule in the non-leptonic decays of strange particles. *Nuclear Physics B.* 1976;120:316–324. DOI: 10.1016/0550-3213(77)90046-3.
10. Gilman FJ, Wise MB.  $K \rightarrow \pi e^+ e^-$  in the Six Quark Model. *Physical Review D.* 1980;21:3150.
11. Batley JR, Culling AJ, Kalmus G, Lazzeroni C, Munday DJ, Slater MW, et al. [NA48/2 collaboration]. Precise measurement of the  $K^\pm \rightarrow \pi^\pm e^+ e^-$  decay. *Physics Letters B.* 2009;677(5):246–254. DOI: 10.1016/j.physletb.2009.05.040.
12. Batley JR, Kalmus G, Lazzeroni C, Munday DJ, Slater MW, Wotton SA, et al. [NA48/2 collaboration]. New measurement of the  $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \mu^+ \mu^-$  decay. *Physics Letters B.* 2011;697:107–115. DOI: 10.1016/j.physletb.2011.01.042.

Статья поступила в редколлегию 07.12.2018.  
Received by editorial board 07.12.2018.