

УДК 539.12

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ

С. А. ЛУКАШЕВИЧ<sup>1)</sup>, Н. В. МАКСИМЕНКО<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,  
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь

В рамках ковариантного лагранжева формализма и согласно принципу соответствия для движения частиц спина  $\frac{1}{2}$  в электромагнитном поле с учетом поляризуемостей получены уравнения, согласованные с амплитудой комптоновского рассеяния, которая следует из низкоэнергетических теорем. Ковариантный лагранжиан согласован с низкоэнергетическим определением в лагранжевом формализме. Построены и проанализированы на феноменологическом уровне канонический и метрический тензоры частиц с поляризуемостями, взаимодействующих с электромагнитным полем. В системе покоя частицы получена плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостями и электромагнитного поля.

**Ключевые слова:** ковариантный лагранжиан; уравнения движения; тензор энергии-импульса.

## DETERMINATION OF THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR THE POLARIZABILITIES TAKING INTO ACCOUNT

S. A. LUKASHEVICH<sup>a</sup>, N. V. MAKSIMENKO<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Francisk Skaryna Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246019, Belarus  
Corresponding author: S. A. Lukashevich (maksimenko@gsu.by)

Within the covariant Lagrangian formalism the equations of motion for spin  $\frac{1}{2}$  particles with polarizabilities in the electromagnetic field have been obtained. The resulting equations of motion are consistent with the Compton scattering amplitude, which follows from the low-energy theorems. The covariant Lagrangian is agreed with the low-energy definition in Lagrangian formalism. The canonical and metric tensors of particles with polarizabilities interacting with the electromagnetic field have been constructed and have been analyzed at the phenomenological level. In the particle rest system, the energy density of the interaction of the particle with the polarizabilities and the electromagnetic field have been obtained.

**Key words:** covariant Lagrangian; the equations of motion; energy-momentum tensor.

---

### Образец цитирования:

Лукашевич СА, Максименко НВ. Определение тензора энергии-импульса с учетом поляризуемостей. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:8–11.

### For citation:

Lukashevich SA, Maksimenko NV. Determination of the energy-momentum tensor the polarizabilities taking into account. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:8–11. Russian.

---

### Авторы:

**Светлана Анатольевна Лукашевич** – старший преподаватель кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

**Николай Васильевич Максименко** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

### Authors:

**Svetlana A. Lukashevich**, senior lecturer at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.

lukashevich@gsu.by

**Nikolay V. Maksimenko**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.

maksimenko@gsu.by

---

## Введение

В электродинамике адронов теория взаимодействия электромагнитного поля со структурными частицами базируется на основных принципах релятивистской квантовой теории поля. Диаграммная техника большей частью используется в модельных представлениях, где установлен ряд особенностей взаимодействия фотонов с адронами [1; 2]. Однако указанная техника применима в основном для описания электромагнитных процессов на простейших кварковых системах.

В области низких энергий в случае взаимодействия электромагнитного поля со сложными кварк-глюонными системами, где методы КХД в основном не применимы, в последнее время все больше используются низкоэнергетические теоремы и правила сумм [3–6].

Низкоэнергетические электромагнитные характеристики адронов, связанные с их структурой, такие как формфактор, поляризуемости, в настоящее время применяются при изучении электромагнитных процессов в нерелятивистской теории [5]. При переходе к релятивистской теории поля можно воспользоваться принципом соответствия и получить функцию Лагранжа, на основании которой последовательно реализовать переход от ковариантного лагранжева формализма к гамильтонову [7–10].

Данная работа является продолжением исследований, результаты которых представлены в [6; 8; 9]. С помощью ковариантного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля со структурной поляризуемой частицей получены уравнения движения, вычислены канонический и метрический тензоры энергии-импульса. Установлены его теоретико-полевые свойства и определена плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостью и электромагнитного поля в системе покоя.

## Теоретические основы

Полный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с поляризуемой частицей состоит из лагранжиана  $L_{e-m}$  для свободного электромагнитного поля, лагранжиана  $L_D$  для спинорного (дираковского) поля, создаваемого самой частицей, лагранжиана  $L_{int-D}$  взаимодействия свободного электромагнитного поля с полем спинорной частицы и лагранжиана  $L_{\alpha_0\beta_0-D}$ , который учитывает электрическую и магнитную поляризуемости частицы:

$$L_{total-D} = L_{e-m} + L_D + L_{int-D} + L_{\alpha_0\beta_0-D},$$

$$L_{total-D} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \bar{\Psi}\left(\frac{1}{2}i\gamma_\nu\tilde{\partial}^\nu + m\right)\Psi - e(\bar{\Psi}\gamma_\alpha\Psi)A^\alpha + K_{\sigma\nu}\Theta^{\sigma\nu}, \quad (1)$$

где  $\tilde{\partial}^\nu = \partial^\nu - \bar{\partial}^\nu$ ;  $\Psi$  – волновые функции частиц спина  $\frac{1}{2}$ ;  $K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m}(\alpha_0 F_{\sigma\mu}F_\nu^\mu + \beta_0 \tilde{F}_{\sigma\mu}\tilde{F}_\nu^\mu)$ ;  $\Theta^{\sigma\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\sigma\tilde{\partial}^\nu\Psi)$ .

Здесь  $\tilde{F}_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}F^{\rho\nu}$ ,  $F_{\sigma\mu}$  и  $\tilde{F}_{\sigma\mu}$  – обычный и дуальный тензоры электромагнитного поля,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  – электрическая и магнитная поляризуемости,  $\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}$  – антисимметричный тензор Леви-Чивита ( $\epsilon^{0123} = 1$ ).

Часть лагранжиана, связанную с поляризуемостями, можно записать в виде

$$L^{(\alpha\beta)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = K_{\sigma\nu}\Theta^{\sigma\nu},$$

где  $G^{\mu\nu}$  – антисимметричный ( $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$ ) тензор:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\partial L^{(\alpha\beta)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{4\pi}{m}\left((\alpha_0 + \beta_0)(F_\rho^\mu\Theta^{\rho\nu} - F_\rho^\nu\Theta^{\rho\mu}) - \beta_0\Theta_\rho^\rho F^{\mu\nu}\right).$$

Для получения уравнений движения при взаимодействии спинорного и электромагнитного полей воспользуемся следующей системой уравнений:

$$-\frac{\partial L}{\partial A_\mu} + \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} + \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \bar{\Psi})} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \Psi} + \partial_\gamma \frac{\partial L}{\partial (\partial_\gamma \Psi)} = 0, \quad (4)$$

где  $A_\mu$  – вектор-потенциал электромагнитного поля.

### Результаты и их обсуждение

С помощью лагранжиана (1) и выражений (2)–(4) найдем уравнения движения частицы спина  $\frac{1}{2}$  в электромагнитном поле с учетом электрической ( $\alpha_0$ ) и магнитной ( $\beta_0$ ) поляризуемостей:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi - \partial_\mu G^{\mu\nu}, \quad (5)$$

$$(i\gamma^\nu\bar{\partial}_\nu - m)\Psi = eA_\nu\gamma^\nu\Psi - \frac{i}{2}(\partial^\nu K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma)\Psi - iK_{\sigma\nu}\gamma^\sigma\partial^\nu\Psi, \quad (6)$$

$$\bar{\Psi}(i\gamma^\nu\bar{\partial}_\nu - m) = e\bar{\Psi}A_\nu\gamma^\nu - \frac{i}{2}\bar{\Psi}(\partial^\nu K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma) - i(\partial^\nu\bar{\Psi})\gamma^\sigma K_{\sigma\nu}.$$

Исходя из уравнений (5), (6), лагранжиан (1) можно представить следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\bar{D} - m)\Psi - \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\bar{D} + m)\Psi, \quad (7)$$

где

$$\bar{D} = \bar{\partial}_\mu\gamma^\mu + ieA_\mu\gamma^\mu + K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma\bar{\partial}^\nu,$$

$$\bar{D} = \gamma^\mu\bar{\partial}_\mu - ieA_\mu\gamma^\mu + \bar{\partial}^\nu K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma.$$

Учитывая лагранжиан (7) и уравнения (5), (6), канонический тензор энергии-импульса запишем в виде

$$T_{\text{can}}^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu A_\rho)}(\partial^\nu A_\rho) + \partial^\nu\bar{\Psi}\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu\bar{\Psi})} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu\Psi)}\partial^\nu\Psi - g^{\mu\nu}L.$$

В результате получим

$$T_{\text{can}}^{\mu\nu} = -(F^{\mu\rho} + G^{\mu\rho})\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}.$$

Используя неоднозначность определения тензора энергии-импульса, построим метрический тензор энергии-импульса:

$$T_{\text{metr}}^{\mu\nu} = T_{\text{can}}^{\mu\nu} + \partial_\rho [(F^{\mu\rho} + G^{\mu\rho})A^\nu]. \quad (8)$$

Таким образом,  $T_{\text{metr}}^{\mu\nu}$  имеет вид

$$T_{\text{metr}}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + G^{\mu\rho}F_\rho^\nu - j^\mu A^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma},$$

где  $j^\mu = \partial_\nu(F^{\nu\mu} + G^{\nu\mu})$ .

Если в (8) выделить часть метрического тензора, связанную с поляризуемостями, то можно найти

$$T_{\text{metr}}^{(\alpha\beta)\mu\nu} = G^{\mu\rho}F_\rho^\nu - \partial_\rho G^{\mu\rho}A^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}.$$

Выполняя интегрирование по частям и используя определение  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  согласно работе [10] и принципу соответствия в системе покоя частицы, получим плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостью и электромагнитного поля:

$$E = -\frac{2\pi}{m}\Theta^{00}(\alpha_0\vec{E}^2 + \beta_0\vec{H}^2),$$

где  $\Theta^{00}$  – плотность энергии частицы спина  $\frac{1}{2}$ .

## Заключение

В лагранжевом ковариантном формализме получены уравнения движения частицы спина  $\frac{1}{2}$  на основании ковариантного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с поляризующимися частицами. Определено соответствие между ковариантным лагранжианом, каноническим и метрическим тензорами энергии-импульса. В системе покоя частицы получена плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостями и электромагнитного поля.

## Библиографические ссылки

1. Brodsky SJ, Primack JR. The Electromagnetic Interaction of Composite Systems. *Annals of Physics*. 1969;52:315–365.
2. Scherer S, Korchin AYu, Koch JH. Virtual Compton scattering off the nucleon at low energies. *Physical Review C*. 1996;54:904–919. DOI: 10.1103/PhysRevC.54.904.
3. Левчук МИ, Мороз ЛГ. Гирация нуклона как одна из характеристик его электромагнитной структуры. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1985;1:45–54.
4. Lvov AJ, Petrun'kin VA. Dispersion Theory of Proton Compton Scattering in the First and Second Resonance Regions. *Physical Review C*. 1997;55:359–377. DOI: 10.1103/PhysRevC.55.359.
5. Hutt M-Th, L'vov AJ, Milstein AJ, Schumacher M. Compton Scattering by Nuclei. *Physics Reports*. 2000;323(6):458–595. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00041-1.
6. Maksimenko NV, Moroz LG. Phenomenological description polarizabilities of elementary particles in a field-theory. In: *Proceedings of the XI International young scientists school on high energy physics and relativistic nuclear physics. D2-11707*. Dubna: JINR; 1979. p. 533–543.
7. Belousova SA, Maksimenko NV. The description for the spin polarizabilities of hadrons based on the covariant Lagrangian. In: Dubinin MN, Savrin VI, editors. *QFTHEP 2000. 15<sup>th</sup> International workshop on high-energy physics and quantum field theory; 2000 September 14–10; Tver, Russia*. Moscow: Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics of the Lomonosov Moscow State University; 2000. p. 305–308.
8. Maksimenko NV, Deryuzhkova OM, Lukashevich SA. The electromagnetic characteristics of hadrons in the covariant Lagrangian approach. In: *The actual problems of particle physics. Proceeding of International School-Seminar HEP'01; 2001 August 7–16; Gomel, Belarus. Volume 2*. Dubna: JINR; 2002. p. 145–156.
9. Babusci D, Jiordano J, L'vov AJ, Matone J, Nathan AN. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons. *Physical Review C*. 1998;58:1013–1041. DOI: 10.1103/PhysRevC.58.1013.
10. Bjorken JD, Drell SD. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York: MC Graw Hill Book Company; 1964. 300 p.

## References

1. Brodsky SJ, Primack JR. The Electromagnetic Interaction of Composite Systems. *Annals of Physics*. 1969;52:315–365.
2. Scherer S, Korchin AYu, Koch JH. Virtual Compton scattering off the nucleon at low energies. *Physical Review C*. 1996;54:904–919. DOI: 10.1103/PhysRevC.54.904.
3. Levchuk MI, Moroz LG. Giratsiya nuklona kak odna iz kharakteristik ego elektromagnitnoi struktury. *Izvestiya AN BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1985;1:45–54. Russian.
4. Lvov AJ, Petrun'kin VA. Dispersion Theory of Proton Compton Scattering in the First and Second Resonance Regions. *Physical Review C*. 1997;55:359–377. DOI: 10.1103/PhysRevC.55.359.
5. Hutt M-Th, L'vov AJ, Milstein AJ, Schumacher M. Compton Scattering by Nuclei. *Physics Reports*. 2000;323(6):458–595. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00041-1.
6. Maksimenko NV, Moroz LG. Phenomenological description polarizabilities of elementary particles in a field-theory. In: *Proceedings of the XI International young scientists school on high energy physics and relativistic nuclear physics. D2-11707*. Dubna: JINR; 1979. p. 533–543.
7. Belousova SA, Maksimenko NV. The description for the spin polarizabilities of hadrons based on the covariant Lagrangian. In: Dubinin MN, Savrin VI, editors. *QFTHEP 2000. 15<sup>th</sup> International workshop on high-energy physics and quantum field theory; 2000 September 14–10; Tver, Russia*. Moscow: Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics of the Lomonosov Moscow State University; 2000. p. 305–308.
8. Maksimenko NV, Deryuzhkova OM, Lukashevich SA. The electromagnetic characteristics of hadrons in the covariant Lagrangian approach. In: *The actual problems of particle physics. Proceeding of International School-Seminar HEP'01; 2001 August 7–16; Gomel, Belarus. Volume 2*. Dubna: JINR; 2002. p. 145–156.
9. Babusci D, Jiordano J, L'vov AJ, Matone J, Nathan AN. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons. *Physical Review C*. 1998;58:1013–1041. DOI: 10.1103/PhysRevC.58.1013.
10. Bjorken JD, Drell SD. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York: MC Graw Hill Book Company; 1964. 300 p.

Статья поступила в редколлегию 14.11.2018.  
Received by editorial board 14.11.2018.