
Ф ИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

PHYSICS

OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA

УДК 539.12:530.145

ДУАЛЬНО ИНВАРИАНТНАЯ ЛАГРАНЖЕВА
ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. И. СТРАЖЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Дуально инвариантная лагранжева формулировка электродинамики основана на подходе Кабиббо и Феррари к введению двух потенциалов для описания электромагнитного поля. Неувеличение числа степеней свободы обеспечивается требованием инвариантности полевого тензора относительно специальных калибровочных преобразований потенциалов. Вводимый в статье лагранжиан инвариантен не только относительно дуальных преобразований потенциалов, но и относительно специальных калибровочных преобразований на решениях уравнений Максвелла. Подобное рассмотрение можно провести и в рамках дуально симметричной формулировки электродинамики при наличии только наблюдаемых электрических источников.

Ключевые слова: дуальная симметрия; двухпотенциальное описание Кабиббо и Феррари; лагранжиан электромагнитного поля.

Образец цитирования:

Стражев В.И. Дуально инвариантная лагранжева формулировка электродинамики. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:4–7.

For citation:

Strazhev VI. Dual invariant Lagrange formulation of electrodynamics. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:4–7. Russian.

Автор:

Василий Иванович Стражев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Author:

Vasilij I. Strazhev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
v-i-str@mail.ru

DUAL INVARIANT LAGRANGE FORMULATION OF ELECTRODYNAMICS

V. I. STRAZHEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The dual invariant Lagrange formulation of electrodynamics is based on the Cabibbo – Ferrari introduction of two potentials to the description of electromagnetic field without increase of its degrees of freedom. It is realized through invariance requirement of field tensor under specialized gauge transformations of potentials. The used Lagrangian is dual invariant, simultaneously it is invariant of specialized gauge transformations defined on solutions of Maxwell equations. The same procedure of consideration is realized in the case of dual symmetrical formulation of electrodynamics with electrically charged particles.

Key words: dual symmetry, Cabibbo – Ferrari two potential description; Lagrangian of electromagnetic field.

Как известно, уравнения Максвелла для электромагнитного поля

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

инвариантны относительно дуальных преобразований вида

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} \cos \theta + \tilde{F}_{\mu\nu} \sin \theta, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow -F_{\mu\nu} \sin \theta + \tilde{F}_{\mu\nu} \cos \theta, \quad (1)$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, $\epsilon_{1234} = -i$, $F_{lk} = \epsilon_{lkm} H_m$, $F_{i4} = -iE_i$.

Соответствующий лагранжиан дуальным инвариантом не является, хотя форма его неинвариантности (умножение на постоянный множитель и добавление слагаемого $F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$, сводимого к полной дивергенции при использовании второй пары уравнений Максвелла) допускается теоремой Нётер. Одновременно это означает, что дуальные преобразования задаются **на решениях** соответствующих уравнений.

Электромагнетизм в присутствии электрических и магнитных источников – после установления ключевого значения для теории суперструн принципа дуальности (см., например, [1]) – явился примером теории, в которой он реализуется, что привело к активному обсуждению дуальной симметрии в электродинамике. При этом возник вопрос об отыскании ее дуально инвариантной и явной лоренц-ковариантной лагранжевой формулировки, о задании локальных дуальных преобразований для канонических переменных, поскольку при общеизвестном введении электромагнитных потенциалов

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

такая возможность отсутствует.

В последние годы вновь возник интерес к данной тематике (см., например, [2; 3] и цитированную там литературу), что связано с решением ряда проблем в квантовой оптике, в том числе с описанием как спинового момента, так и взаимодействия электромагнитных волн с киральными метаматериалами (см., например, [4–6]). В настоящей работе дано построение дуально инвариантной и релятивистски ковариантной лагранжевой формулировки электродинамики, основанной на введении двух исходно независимых электромагнитных потенциалов.

Будем исходить из задания электромагнитного тензора посредством введения двух потенциалов (см., например, [7; 8]):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha C_\beta. \quad (2)$$

Дуальные преобразования (1) электромагнитного поля индуцируются следующими преобразованиями потенциалов:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu \cos \theta + C_\mu \sin \theta, \quad C_\mu \rightarrow -A_\mu \sin \theta + C_\mu \cos \theta. \quad (3)$$

Проблема увеличения числа степеней свободы решается при учете калибровочных преобразований вида (их частным случаем являются известные градиентные преобразования потенциалов):

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + A_\mu^0, \quad C_\mu \rightarrow C_\mu + C_\mu^0. \quad (4)$$

Выбор A_μ^0 , C_μ^0 ограничен условием нулевого поля:

$$\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha C_\beta^0 = 0, \quad (5)$$

вытекающим из требования инвариантности тензора электромагнитного поля относительно преобразований (4). Выбирая, например, $C_\mu^0 = -C_\mu$ или $A_\mu^0 = -A_\mu$, придем к привычному однопотенциальному описанию электромагнитного поля. При сохранении определения (2) возможно установление взаимосвязи между потенциалами A_μ, C_μ вида

$$\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = 0.$$

Дуально инвариантный лагранжиан задается следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} C_{\alpha\beta}), \quad (6)$$

где $C_{\alpha\beta} = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha$.

В отличие от дуально неинвариантного, но калибровочно инвариантного (относительно преобразований (4)) лагранжиана вида $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$ лагранжиан (6) при проведении калибровочных преобразований (4) изменится. Учет условия нулевого поля (5) позволяет представить появившееся дополнительное слагаемое в виде $-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0)$ или в виде $-\frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} (\partial_\mu C_\nu^0 - \partial_\nu C_\mu^0)$. Оба указанных выражения при использовании уравнения движения (одной из пары уравнений Максвелла) приводятся к слагаемому типа дивергенции: $\partial_\mu (F_{\mu\nu} A_\nu^0)$ или $\partial_\mu (\tilde{F}_{\mu\nu} C_\nu^0)$. Следовательно, двухпотенциальное описание электромагнитного поля вида (2) позволяет задать дуально инвариантный лагранжиан. В то же время совместное рассмотрение дуальных (3) и калибровочных преобразований (4) означает, что они, как и в случае использования одного типа потенциала, определены именно на решениях уравнений Максвелла.

Из инвариантности лагранжиана (6) относительно дуальных преобразований (1), (3) следует закон сохранения для величины

$$D_\mu = F_{\mu\nu} A_\nu + \tilde{F}_{\mu\nu} C_\nu.$$

Для электромагнитного поля это выражение приобретает физическое содержание после выбора калибровки, ограничивающей число независимых степеней свободы.

Предложенное рассмотрение дуально инвариантной лагранжевой формулировки электродинамики свободно от внутренних противоречий, возникающих при введении двух типов потенциалов, задаваемых следующим образом [2; 3]:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu. \quad (7)$$

После проведения вариационной процедуры связь между тензорами $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$ постулируется ($G_{\mu\nu} \equiv \tilde{F}_{\mu\nu}$), что фактически означает постулирование уравнений Максвелла для электромагнитного поля вне связи с вариационной процедурой. Подход, основанный на определении (7), исключает также возможность рассмотрения дуально симметричной лагранжевой формулировки однозарядовой электродинамики (см. ниже).

Отметим, что лагранжиан (6) при использовании (2) представим в виде

$$L = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} C_{\mu\nu}^2, \quad (8)$$

где

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad C_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu.$$

Лагранжиан в виде $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$ приводит с учетом (2) (с точностью до членов типа полной дивергенции) к выражению

$$L = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4} C_{\mu\nu}^2. \quad (9)$$

При квантовом рассмотрении соотношение (9) с необходимостью требует введения индефинитной метрики (см., например, [9]), что исключает возможность равноправного рассмотрения вводимых потенциалов [10]. Сопоставление лагранжиана (8) физическому (электромагнитному) полю, т. е. рассмотрение в качестве электромагнитного тензора величины $F_{\mu\nu}$, определенной по (2), основывается на требовании инвариантности теории относительно преобразований (3).

При наличии электрических и магнитных источников запишем лагранжиан следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha C_\beta) + j_\mu^e A_\mu + j_\mu^g C_\mu + L_{\text{частиц}}, \quad (10)$$

где j_μ^e, j_μ^g – электрический и магнитный токи соответственно; выражение $L_{\text{частиц}}$ связано с описанием заряженных частиц.

При задании дуальных преобразований типа (1) для источников очевидна дуальная инвариантность лагранжиана (10). Он также инвариантен (с точностью до членов типа дивергенции) относительно калибровочных преобразований (4) при их задании на решениях уравнений Максвелла с источниками.

Ограничение числа степеней свободы при двухпотенциальном описании электромагнитного поля и без введения так называемых *Dirac string* (см., например, [8]) означает, что лагранжиан (10) соответствует дуально симметричной формулировке однозарядовой электродинамики [8; 11; 12]. Последняя содержит возможность рассмотрения киральных свойств метаматериалов и в присутствии источников при учете возможности формулировки однозарядовой макроскопической электродинамики в дуально симметричном виде (см., например, [13; 14]).

Библиографические ссылки

1. Castellani E. Duality and ‘particle’ democracy. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 2017;59:100–108. DOI: 10.1016/j.shpsb.2016.03.002.
2. Cameron RP, Barnett MS. Electric-magnetic symmetry and Noether’s theorem. *New Journal of Physics*. 2012;14(12):123019. DOI: 10.1088/1367-2630/14/12/123019.
3. Bliokh KY, Bekshaev AY, Nori F. Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum and angular momentum. *New Journal of Physics*. 2013;15:033026. DOI: 10.1088/1367-2630/15/3/033026.
4. Bliokh KY, Nori F. Transverse and longitudinal angular momenta of light. *Physics Reports*. 2015;592:1–38. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.06.003.
5. Cameron RP, Götte JB, Barnett SM, Yao AM. Chirality and the angular momentum of light. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2017;375(2087):20150433. DOI: 10.1098/rsta.2015.0433.
6. Elbistan M. Optical helicity and Hertz vectors. *Physics Letters A*. 2018;382(29):1897–1902. DOI: 10.1016/j.physleta.2018.05.012.
7. Han NY, Biedenharn LC. Manifest duality invariance in electrodynamics and the Cabibbo – Ferrari theory of magnetic monopoles. *Nuovo Cimento A*. 1971;2(2):544–556. DOI: 10.1007/BF02899873.
8. Стражев ВИ, Томильчик ЛМ. *Электродинамика с магнитным зарядом*. Минск: Наука и техника; 1975.
9. Круглов СИ, Стражев ВИ. О группе внутренней симметрии квантовой теории векторного поля общего типа. *Известия вузов СССР. Физика*. 1978;5:41.
10. Кресин ЮВ, Стражев ВИ. О двухпотенциальном описании электромагнитного поля. *Теоретическая и математическая физика*. 1978;36:426–429.
11. Стражев ВИ. Дуальная симметрия квантовой электродинамики. *Теоретическая и математическая физика*. 1972;13(2): 200–208.
12. Jackson JD. *Classical Electrodynamics*. Third edition. New York: John Wiley & Sons; 1999.
13. Сердюков АН, Стражев ВИ. О дуально симметричной формулировке макроскопической электродинамики. *Известия вузов СССР. Физика*. 1980;6:33.
14. van Kruining K, Götte JB. The conditions for the preservation of duality symmetry in a linear medium. *Journal of Optics*. 2016; 18(8):085601. DOI: 10.1088/2040-8978/18/8/085601.

References

1. Castellani E. Duality and ‘particle’ democracy. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 2017;59:100–108. DOI: 10.1016/j.shpsb.2016.03.002.
2. Cameron RP, Barnett MS. Electric-magnetic symmetry and Noether’s theorem. *New Journal of Physics*. 2012;14(12):123019. DOI: 10.1088/1367-2630/14/12/123019.
3. Bliokh KY, Bekshaev AY, Nori F. Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum and angular momentum. *New Journal of Physics*. 2013;15:033026. DOI: 10.1088/1367-2630/15/3/033026.
4. Bliokh KY, Nori F. Transverse and longitudinal angular momenta of light. *Physics Reports*. 2015;592:1–38. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.06.003.
5. Cameron RP, Götte JB, Barnett SM, Yao AM. Chirality and the angular momentum of light. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2017;375(2087):20150433. DOI: 10.1098/rsta.2015.0433.
6. Elbistan M. Optical helicity and Hertz vectors. *Physics Letters A*. 2018;382(29):1897–1902. DOI: 10.1016/j.physleta.2018.05.012.
7. Han NY, Biedenharn LC. Manifest duality invariance in electrodynamics and the Cabibbo – Ferrari theory of magnetic monopoles. *Nuovo Cimento A*. 1971;2(2):544–556. DOI: 10.1007/BF02899873.
8. Strazhev VI, Tomil’chik LM. *Elektrodinamika s magnitnym zaryadom* [Electrodynamics with magnetic charge]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1975. Russian.
9. Kruglov SI, Strazhev VI. O grupe vnutrennej simmetrii kvantovoj teorii vektornogo polja obshchego tipa. *Izvestiya vuzov SSSR. Fizika*. 1978;5:41. Russian.
10. Kresin YuV, Strazhev VI. [Two potential description of the electromagnetic field]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*. 1978;36:426–429. Russian.
11. Strazhev VI. [Dual symmetry of quantum electrodynamics]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*. 1972;13(2):200–208. Russian.
12. Jackson JD. *Classical Electrodynamics*. Third edition. New York: John Wiley & Sons; 1999.
13. Serdjukov AN, Strazhev VI. O dual’no simmetrichnoi formulirovke makroskopicheskoi elektrodinamiki. *Izvestiya vuzov SSSR. Fizika*. 1980;6:33. Russian.
14. van Kruining K, Götte JB. The conditions for the preservation of duality symmetry in a linear medium. *Journal of Optics*. 2016; 18(8):085601. DOI: 10.1088/2040-8978/18/8/085601.