

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕСВЯЗНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. П. Молочко

*Белорусский государственный университет, г. Минск;
polevikov@bsu.by
науч. рук. – В. К. Полевиков, канд. физ.-мат. наук, доц.*

Целью работы является численное решение задачи капиллярной гидростатики о равновесных формах жидкости в капилляре, помещенном в широкий цилиндрический сосуд [1].

Ключевые слова: капиллярная поверхность; численное моделирование; численные результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью объемом V , в который погружена капиллярная трубка так, что их оси симметрии совпадают. Считаем, что трубка имеет форму кругового цилиндра, а сосуд представляет собой цилиндр достаточно большого радиуса, такого, что уровень жидкости в нем на достаточном удалении от капилляра зависит только от атмосферного давления и силы тяжести.

Сформулируем задачу об осесимметричной несвязной капиллярной поверхности. Для этого введем цилиндрические координаты R, Z так, чтобы ось Z совпадала с осью симметрии сосуда, и направим ее против вектора ускорения свободного падения \vec{g} . Выберем начало координат в центре основания внешнего цилиндра. Расположение осей, а также другие введенные обозначения показаны на рисунке 1, где R_1, R_2 – радиусы трубки и сосуда соответственно, α – угол смачивания.

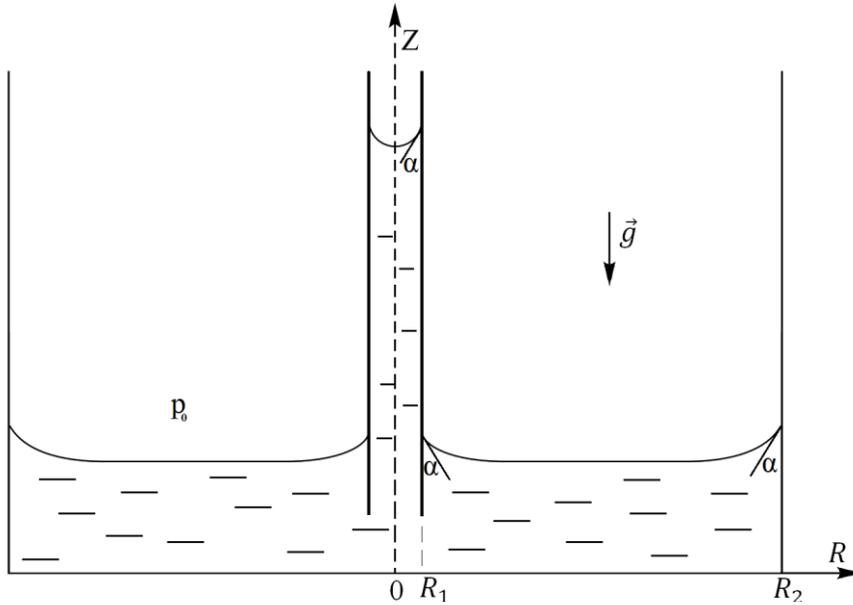


Рис.1. Иллюстрация постановки задачи

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$z = \frac{Z}{R_2}, r = \frac{R}{R_2}, \delta = \frac{R_1}{R_2}, U = \frac{V}{R_2^3}.$$

Для равновесия жидкости в трубке и сосуде необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Юнга-Лапласа на поверхностях контакта жидкости и газа и Дюпре-Юнга на линиях контакта трёх сред – жидкости, газа, стенок трубки и сосуда [1],[2]. В цилиндрических координатах эти условия принимают следующий вид:

$$-K = Bo \cdot z + Q, 0 \leq r \leq \delta; z'(0) = 0, z'(\delta) = ctg\alpha \quad (1)$$

$$-K = Bo \cdot z + Q, \delta \leq r \leq 1, z'(\delta) = -ctg\alpha, z'(1) = ctg\alpha \quad (2)$$

где $z = z(r)$ – неизвестная функция; $K = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{r \cdot z'}{\sqrt{1+(z')^2}} \right)'$ – сумма главных кривизн свободных поверхностей в трубке и сосуде, соответственно; Q – неопределенная константа; $Bo = \rho g R_2^2 / \sigma$ – число Бонда; ρ – плотность жидкости, σ – поверхностное натяжение.

Считая безразмерный объем U жидкости заданным, определим его как объем тела вращения:

$$U = 2\pi \left(\int_0^\delta z r dr + \int_\delta^1 z r dr \right) \quad (3)$$

Используя (1) - (3), выразим параметр Q через граничные условия и объем U :

$$Q = 2 \left(\cos \alpha (2\delta + 1) - Bo \cdot \frac{U}{2\pi} \right) \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи (1) - (4) определяется четырьмя параметрами: Bo , δ , α , U .

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Для связанных задач (1), (2) строились итерационно-разностные схемы второго порядка аппроксимации [3]. На каждой итерации полученные системы линейных алгебраических уравнений решались методом прогонки [4]. В качестве начального итерационного приближения выбиралось точное решение при $\alpha = \pi/2$: $z(r) = z_0 = U/\pi$. Вычисления осуществлялись на равномерной сетке с шагом $\delta/100$ в капилляре и шагом $(1 - \delta)/200$ во внешнем сосуде.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты проводились при $Bo = 300$, $U = 3$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\delta = 0.04$.

Поведение жидкости в капиллярной трубке при изменении угла смачивания показано на рисунке 2а).

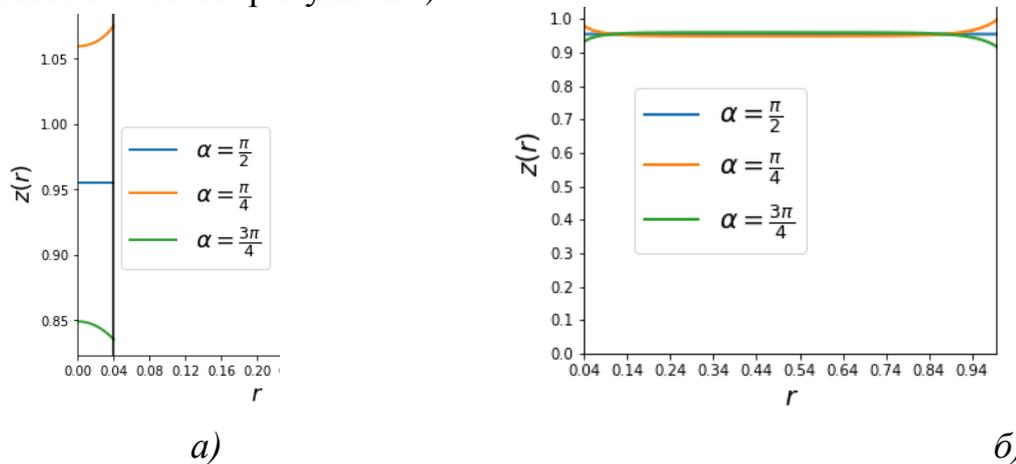


Рис. 2. Иллюстрация поведения жидкости:

а) в капиллярной трубке;

б) во внешнем сосуде

Как видим, равновесная форма свободной поверхности в капилляре сильно зависит от угла смачивания α . При $\alpha = 3\pi/4$ уровень жидкости опускается значительно ниже значения z_0 , соответствующего нейтраль-

ному углу $\alpha = \pi/2$, а при $\alpha = \pi/4$ – поднимается значительно выше z_0 . Это связано со смачивающим эффектом капиллярных сил, приводящим к натеканию жидкости на стенки при $\alpha < \pi/2$, при которых свободная поверхность вогнута в сторону жидкости. При $\alpha > \pi/2$ свободная поверхность выпукла в сторону газа; в этом случае капиллярные силы сдерживают поднятие жидкости в капилляре, приводя к понижению ее уровня относительно z_0 .

Сравним полученные результаты с известными теоретическими оценками поднятия жидкости [1]. Оценка Лапласа, описывающая высоту подъема на оси симметрии при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, имеет вид:

$$z(0) \geq \frac{2 \cos \alpha}{Bo} - \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2.39,$$

а оценка Финна:

$$z(0) \geq \frac{\cos \alpha}{Bo} (1 + p) e^{1-p} = 2.58,$$

$$\text{где } p = \sqrt{1 + Bo(1/\cos(\pi/4 - \alpha/2))^2}.$$

В результате численного решения нелинейной задачи в данной работе получено следующее значение высоты подъема жидкости на оси симметрии капилляра: $z(0) = 2.61$. Как видим, полученные численные результаты вполне согласуются с оценками линейной теории.

Рисунок 2б) иллюстрирует эволюцию свободной поверхности жидкости во внешнем цилиндре при изменении угла смачивания.

На основании представленных результатов можно сделать вывод, что высота жидкости в капилляре существенно зависит от угла смачивания α , в то время как уровень жидкости во внешнем сосуде остается практически постоянным и только вблизи точек контакта незначительно зависит от α .

Библиографические ссылки

1. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. - 312 с.
2. Бабский В. Г. [и др.] : Гидромеханика невесомости. Под редакцией А. Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976 г. 504 с.
3. Polevnikov V. K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces // Computational. Methods in Applied Mathematics. 2004. Vol. 4, No. 1. P. 66–93.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.