ОПТИМИЗАЦИЯ ПСЕВДОБУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ГРАФАМИ КОНФЛИКТОВ

Я. А. Ловеров

Белорусский государственный университет, г. Минск;
y.loverov@gmail.com;
науч. рук. – Ю. Л. Орлович, канд. физ.-мат. наук, доц.

В данной работе рассматриваются задачи нахождения максимума и минимума псевдобулевой функции на булевом кубе. Указанные задачи оптимизации являются одними из самых распространенных задач, связанных с псевдобулевыми функциями, ввиду их многочисленных приложений, примеры которых можно найти в [1].

Целью настоящей работы является исследование вычислительной сложности задач максимизации и минимизации псевдобулевых функций специального вида. С этой целью используется модель данных задач в терминах максимальных независимых множеств взвешенного графа, представленная ранее в [2] и являющаяся расширением модели, предложенной в [3] и носящей название «графа конфликтов». Вводится связанное с графом конфликтов понятие q-главных позиформ, для которых приводится полиномиальный алгоритм нахождения минимального значения и точки минимума.

Ключевые слова: псевдобулева функция; позиформа; комбинаторная оптимизация; граф конфликтов; взвешенный граф; взвешенное число независимости.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Определения, связанные с псевдобулевыми функциями и таким способом их представления, как позиформы, а также основные результаты, касающиеся их свойств, приведены в [1].

Терминология теории графов, используемая в данной работе, в основном соответствует [3]. Пару (G, w), где G – граф, $w: V(G) \to R^{+} \cup \{0\}$, мы будем называть *взвешенным графом* G (с неотрицательными весами вершин). Через $\alpha_w(G)$ будет обозначено взвешенное число независимости графа G.

Стоит также отметить, что задача оптимизации (будь то максимизация или минимизация) псевдобулевой функции $\psi(x_1, x_2,..., x_n)$ совершенно естественно сводится к задаче оптимизации некоторой ее позиформы вида

$$\psi(x_1, x_2,..., x_n) = b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \left(\prod_{i \in A_k} x_i \right) \left(\prod_{j \in B_k} \bar{x}_j \right) = b_0 + f(x_1, x_2,..., x_n). \qquad \underline{(1)}$$

Последняя, в свою очередь, в силу постоянства коэффициента b_0, сводится к оптимизации части $f(x_1, x_2,..., x_n)$. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, в задачах оптимизации будем рассматривать только позиформы, в которых коэффициент b_0 равен нулю.

ГРАФ КОНФЛИКТОВ

Пусть дана позиформа

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} w_k \left(\prod_{i \in A_k} x_i \right) \left(\prod_{j \in B_k} \bar{x}_j \right) = \sum_{k=1}^{m} w_k T_k \qquad (2)$$

,

где $w_k \in R^+$, $A_k \cap B_k = \varnothing$, $A_k \cup B_k \neq \varnothing$ при $k = \overline{1, m}$.

Граф конфликтов G_f позиформы f определяется следующим образом. Каждая вершина t_k графа взаимно-однозначно соответствует терму T_k и имеет вес w_k. Две вершины в графе G_f смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им термы находятся *в конфликте* (то есть существует переменная x_i такая, что x_i входит в один терм, а $\bar{x}_i$ – в другой).

Известно [3, с. 69], что имеет место

Утверждение 1. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – позиформа вида (2), G_f – ее граф конфликтов. Тогда*

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_w(G_f).$$

РАСШИРЕННЫЙ ГРАФ КОНФЛИКТОВ

С описанием данной модели, являющейся, как следует из названия, расширением графа конфликтов, можно ознакомиться в [2]. Здесь же нам потребуется лишь следующий получаемый с ее помощью результат:

Утверждение 2. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – позиформа вида (2), G_f – ее граф конфликтов и $G_f \in D$, где D – класс взвешенных графов, для которых найти наибольшее по весу максимальное независимое множество можно за полиномиальное время. Тогда точку максимума функции f также можно найти за полиномиальное время.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: q-ГЛАВЫЕ ПОЗИФОРМЫ

Позиформу $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида (2) назовем *q-главой* ($q \geq 1$), если ее граф конфликтов представляет собой дизъюнктное объединение q клик.

Из утверждения 1 нетрудно видеть, что задача нахождения максимума q-главой позиформы полиномиально разрешима. Отсюда по утверждению 2 следует, что и точку максимума для таких позиформ можно найти за полиномиальное время. Что же касается задачи минимизации, то здесь нами установлено следующее:

Теорема 1. *Пусть* $f(x_1, x_2,..., x_n)$ *– q-главая позиформа вида (2), где q – некоторая константа. Тогда найти ее минимум можно за полиномиальное время.*

Теорема 2. *Пусть* $f(x_1, x_2,..., x_n)$ *– q-главая позиформа вида (2), где q – некоторая константа. Тогда найти ее точку минимума можно за полиномиальное время.*

Для краткого изложения идей алгоритмов, связанных с теоремами 1 и 2, нам потребуются следующие определения и обозначения.

Мы будем говорить, что p различных термов $T_1, T_2, \ldots, T_p$ образуют *p-набор, если никакие два из них не находятся в конфликте. Также будем говорить, что данный* p-набор термов выполнен на некотором наборе значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если на этом наборе выполнен каждый из термов $T_1, T_2, \ldots, T_p$. Весом p-набора *термов* $T_1, T_2, \ldots, T_p$ назовем сумму $w_1 + w_2 + \ldots + w_p$.

Пусть при $p = \overline{1, q}$ *:*

$Q^p(T_1, T_2,..., T_p)$ *– количество наборов значений переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на которых выполнен p-набор термов $T_1, T_2, \ldots, T_p$;

$R^p(T_1, T_2,..., T_p)$ *– количество наборов значений переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на которых выполнен p-набор термов $T_1, T_2, \ldots, T_p$, но не выполнен ни один из l-наборов (для всех $l > p$), содержащих все термы $T_1, T_2, \ldots, T_p$;

$S^p = \sum_{i=p}^{q} R^i$, где $R^p = \sum_{T_1, T_2,..., T_p} R^p(T_1, T_2,..., T_p)$, *– количество наборов значений переменных, на которых выполнен хотя бы один из всевозможных p-наборов.*

Q^0 и S^0 полагаем равными 2^n, *а* R^0 *– равным* $Q^0 - S^1$.

Идея доказательства теорем 1 и 2 основана на том, что благодаря свойству q-главости для таких позиформ за полиномиальное от m и n время можно вычислить все введенные выше числа, а также их аналоги при фиксированных значениях части переменных, для всевозможных наборов термов и всех возможных значений p ($p = \overline{0, q}$ *).*

Алгоритм поиска минимума *тогда запишется следующим образом:*

Этап 1. Находим наибольшее c такое, что $S^c = 2^n$.

Если c = 0, то минимум найден и равен нулю. В противном случае:

Этап 2. Для каждого $p \geq c$ находим наименьший из весов тех p-наборов, для которых $R^p > 0$.

Этап 3. Находим наименьший из весов, полученных на этапе 2. Это и есть минимальное значение позиформы $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Алгоритм поиска точки минимума.

Перед началом работы алгоритма известны:

c-набор $C = (T_1, T_2, \dots, T_c)$, вес которого и является минимумом функции; если $c = 0$, то C – пустой набор, но формулы для вычислений те же;

набор значений $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ всех $i - 1$ переменных (не ограничивая общности, полагаем, что это переменные $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$), входящих в термы набора C, на котором набор C выполнен.

На i-м этапе работы алгоритма известно множество M всевозможных p-наборов, где $p > c$, содержащих все термы $T_1, T_2, \dots, T_c$, и выполняются следующие шаги:

Шаг 1. Подсчитываем $N_1 = Q_1^c(C) - R_1^c(C)$ – количество наборов значений переменных $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$, в которых $x_i = 1$ и на которых выполнен хотя бы один из наборов множества M.

Шаг 2. Подсчитываем $N_0 = Q_0^c(C) - R_0^c(C)$ – аналог при $x_i = 0$.

Шаг 3. Если $N_1 < 2^{n-i+1}$ и $N_1 < N_0$, то полагаем $a_i = 1$.

Шаг 4. Если же условие из шага 3 не выполнено, полагаем $a_i = 0$.

Шаг 5. Из множества M исключаем все наборы, которые не выполняются при $x_i = a_i$.

Шаг 6. Если $i < n$, переходим на $(i + 1)$-й этап алгоритма; иначе завершаем алгоритм.

Библиографические ссылки

1. *Crama, Y.* Boolean functions: theory, algorithms and applications / Y. Crama, P.L. Hammer. New York: Cambridge University Press, 2011. 687 p.
2. *Ловеров, Я. А.* Графовая модель задач оптимизации псевдобулевой функции / Я.А. Ловеров, Ю.Л. Орлович // Танаевские чтения. Доклады восьмой Международной научной конференции (27–30 марта 2018 г., Минск). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2018.
3. De Werra, D. Weighted stability number of graphs and weighted satisfiability: The two facets of pseudo-Boolean optimization / D. de Werra, P.L. Hammer // Ann. Oper. Res. 2007. Vol. 149. № 1. P. 67–73.
4. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев [и др.]. М.: Наука, 1990. 384 с.