

УДК 517.925.7

И.П. МАРТЫНОВ, В.М. ПЕЦЕВИЧ, В.А. ПРОНЬКО

ПЕРЕКРЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ*

The necessary and sufficient conditions of Painleve property for cross system of two differential equations are founded.

Рассмотрим систему

$$x'^m = A_1(x, t) + yA_2(x, t), \quad y'^n = B_1(y, t) + xB_2(y, t), \quad (1)$$

где $A_i(x, t) = \frac{a_i x + b_{i-1}}{e_i x + f_{i-1}}$, $B_i(y, t) = \frac{c_i y + d_{i-1}}{g_i y + h_{i-1}}$, $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i$, $i = 1, 2$, – аналитические функции по t , $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m + n > 2$.

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых система (1) не имеет подвижных критических особых точек.

Лемма 1. Для того чтобы решения системы

$$x'^m = P(x, y, t), \quad y'^n = Q(x, y, t), \quad (2)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, P – полином по y с коэффициентами, рациональными по x и локально аналитическими по t , а Q – полином по x с коэффициентами, рациональными по y и локально аналитическими по t , не имели подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы P и Q были полиномами по x, y .

Доказательство. Пусть

$$P(x, y, t) = \frac{P_1(t, x, y)}{(x - a(t))^k}, \quad Q(x, y, t) = \frac{Q_1(t, x, y)}{(y - b(t))^l},$$

где $k \geq 0$, $l \geq 0$, $k + l \geq 1$, P_1, Q_1 – голоморфные в некоторой окрестности точки $(t_0, a(t_0), b(t_0))$ функции, причем $P_1(t_0, a(t_0), b(t_0)) \neq 0$, $Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0)) \neq 0$. Тогда, полагая в (2)

$$x = a(t) + \lambda^{m(n+l)} X, \quad y = b(t) + \lambda^{n(m+k)} Y, \quad t = t_0 + \lambda^{(m+k)(n+l)} \tau,$$

* Авторы статьи – сотрудники кафедры математического анализа ГрГУ им. Я. Купалы.

при $\lambda = 0$ получим упрощенную систему

$$\begin{aligned}\dot{X}^m &= \frac{P_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{X^k}, \quad \dot{Y}^n = \frac{Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{Y^l}, \quad \text{если } k \cdot l \neq 0, \\ (\dot{X} + a'(t_0))^m &= P_1(t_0, a(t_0), b(t_0)), \quad \dot{Y}^n = \frac{Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{Y^l}, \quad \text{если } k = 0, \\ \dot{X}^m &= \frac{P_1(t_0, a(t_0), b(t_0))}{X^k}, \quad (\dot{Y} + b'(t_0))^n = Q_1(t_0, a(t_0), b(t_0)), \quad \text{если } l = 0.\end{aligned}$$

Она имеет подвижные критические особые точки при $k \geq 1$ или $l \geq 1$ [1, с. 416]. ■

Согласно лемме 1, чтобы система (1) не имела подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы она имела вид

$$x''' = a_1 x + b_0 + y(a_2 x + b_1), \quad y''' = c_1 y + d_0 + x(c_2 y + d_1). \quad (3)$$

Пусть $m + n - mn > 0$, а значит, $m = 1, n \geq 2$ или $n = 1, m \geq 2$. Вводя в (3) параметр λ по формулам

$$x = \lambda^{m-n-mn} X, \quad y = \lambda^{n-m-mn} Y, \quad t = t_0 + \lambda^{n+m-mn} \tau,$$

при $\lambda = 0$ имеем упрощенную систему

$$\dot{X}^m = a_2(t_0)XY, \quad \dot{Y}^n = c_2(t_0)XY. \quad (4)$$

При $m = 1, n \geq 2, c_2(t_0) \neq 0$ из системы (4) строим для компоненты Y уравнение

$$\ddot{Y} = \frac{1}{n} \frac{\dot{Y}^2}{Y} + \frac{a_2(t_0)}{n} Y \dot{Y}, \quad (5)$$

которое не имеет подвижных критических особых точек только при $n = 2, a_2(t_0) = 0$. Если $n = 1, m \geq 2, a_2(t_0) \neq 0$, то из системы (4) для компоненты X имеем уравнение

$$\ddot{X} = \frac{1}{m} \frac{\dot{X}^2}{X} + \frac{c_2(t_0)}{m} X \dot{X},$$

которое не содержит подвижных критических особых точек только при $m = 2, c_2(t_0) = 0$. Таким образом, необходимо, чтобы $c_2 = 0$ или $c_2 \neq 0, n = 2, a_2 = 0$, при $m = 1, n \geq 2; a_2 = 0$ или $a_2 \neq 0, m = 2, c_2 = 0$, при $n = 1, m \geq 2$.

Пусть $m + n - mn < 0$. Следовательно, $n \geq 2, m > 2$ или $m \geq 2, n > 2$. Полагая в системе (3) $x = \lambda^{-1} X, y = \lambda^{-m+1} Y$ или $x = \lambda^{-n+1} X, y = \lambda^{-1} Y$, при $\lambda = 0$ получим соответственно упрощенную систему $\dot{X}^m = a_2 XY, \dot{Y}^n = 0$ или $\dot{X}^m = 0, \dot{Y}^n = c_2 XY$.

Поэтому в рассматриваемом случае для наличия свойства Пенлеве у системы (3) необходимо, чтобы $(m-2)a_2 = 0, (n-2)c_2 = 0$.

При $m + n - mn = 0$ имеем, что $m = n = 2$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы система (1) не имела подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы она имела вид (3) и выполнялось одно из следующих условий:

- 1) $n = m = 2$, если $a_2 c_2 \neq 0$;
- 2) $m = 1, n \geq 2$ или $m = 2, n \geq 1$, если $c_2 = 0, a_2 \neq 0$;
- 3) $n = 1, m \geq 2$ или $n = 2, m \geq 1$, если $a_2 = 0, c_2 \neq 0$;
- 4) $a_2 = c_2 = 0$.

Пусть $n = m = 2, a_2 \neq 0$. Тогда при соответствующей замене независимой переменной в системе (3) можем считать $a_2 = 1$. Из (3) для x построим уравнение

$$\begin{aligned}& \left(2x'' - \frac{x'^2}{x+b_1} - \frac{b'_1}{x+b_1} x' + \frac{b_0 - a_1 b_1}{x+b_1} - \frac{a'_1 x^2 + (a'_1 b_1 - a_1 b'_1 + b'_0)x + b'_0 b_1 - b_0 b'_1}{(x+b_1)x'} \right)^2 = \\ & = (x+b_1) \left(c_1 + c_2 x + \frac{(d_1 - c_2 a_1)x^2 + (d_0 + d_1 b_1 - c_1 a_1 - c_2 b_0)x + d_0 b_1 - c_1 b_0}{x'^2} \right).\end{aligned} \quad (6)$$

Для исследования уравнений второго порядка не первой степени нам потребуется

Лемма 2 [2]. Для того чтобы уравнение

$$(x'' + A(x', x, t))^n = B(x', x, t),$$

где A и B рациональные по x и x' и аналитические по t функции, не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы A и B были полиномами по x' степени не выше 2 и $2n$ соответственно.

Согласно лемме 2 для наличия свойства Пенлеве у уравнения (6) необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} a'_1 = 0, \quad a'_1 b_1 - a_1 b'_1 + b'_0 = 0, \quad b'_0 b_1 - b_0 b'_1 = 0, \quad d_1 - c_2 a_1 = 0, \\ d_0 + d_1 b_1 - c_1 a_1 - c_2 b_0 = 0, \quad d_0 b_1 - c_1 b_0 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее согласно [3, с. 33], если $c_2 \neq 0$, то необходимо потребовать, чтобы $c_1 = c_2 b_1$. Тогда $b'_1 = 0$ [4].

Следовательно, при $c_2 \neq 0$ имеем следующие условия:

$$a_1 = K_1, \quad b_0 = K_2, \quad b_1 = K_3, \quad c_1 = K_3 c_2, \quad d_1 = K_1 c_2, \quad d_0 = K_2 c_2,$$

здесь и далее K_i – произвольные постоянные. При выполнении этих условий уравнение (6) имеет свойство Пенлеве [4, с. 297]. Поэтому такое же свойство имеет система (3) вида

$$\begin{aligned} x'^2 &= K_1 x + K_2 + y(x + K_3), \\ y'^2 &= c_2 (K_1 x + K_2 + y(x + K_3)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $c_2 \neq 0$.

При $c_2 = 0$ из (7) имеем, что

$$a_1 = K, \quad d_1 = 0, \quad d_0 = K c_1, \quad b_0 = K b_1 \quad (9)$$

или

$$a_1 = K_1, \quad b_0 = K_2, \quad b_1 = K_3, \quad d_1 = c_1 = d_0 = 0. \quad (10)$$

Если условия (9) имеют место, то уравнение (6) запишется в виде

$$\left(2x'' - \frac{x'^2}{x + b_1} - \frac{b'_1}{x + b_1} x' \right)^2 = c_1 (x + b_1).$$

Оно имеет свойство Пенлеве только при $b'_1 = 0$ согласно [3, с. 38] и [1] соответственно в случаях $c_1 \neq 0$ и $c_1 = 0$. Тогда $b_1 = K_1$ и система (3) при выполнении (9), где $c_1 \neq 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} x'^2 &= (y + K)(x + K_1), \\ y'^2 &= c_1 (y + K). \end{aligned} \quad (11)$$

При выполнении (10) уравнение (6) имеет свойство Пенлеве [4, с. 297] и система (3) запишется в виде

$$\begin{aligned} x'^2 &= K_1 x + K_2 + y(x + K_3), \\ y' &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При выполнении условий (9) и $c_1 = 0$ получим частный случай системы (12).

При $n = m = 2$, $c_2 \neq 0$, $a_2 = 0$ в силу симметрии правых частей системы (3) и результатов исследования случая $a_2 \neq 0$, $c_2 = 0$ получим системы

$$x'^2 = a_1 (x + K), \quad y'^2 = (x + K)(y + K_1), \quad (13)$$

$$x' = 0, \quad y'^2 = K_1 y + K_2 + x(y + K_3). \quad (14)$$

При $n = m = 2$, $a_2 = c_2 = 0$ системы (3) со свойством Пенлеве получены в [2]. Они имеют один из следующих видов:

$$x'^2 = b_1 (K_1 x + y + K_2), \quad y'^2 = c_1 (K_1 x + y + K_2), \quad (15)$$

$$x'^2 = a_1 (x + K), \quad y'^2 = d_1 (x + K), \quad (16)$$

$$x'^2 = a_1 (K_1 x + K_2), \quad y'^2 = c_1 (K_3 y + K_4), \quad (17)$$

причем в системе (17) K_1, K_3 принимают значения 1 или 0.

Таким образом, система (1) при $n = m = 2$ исследована.

Рассмотрим случаи $m = 1, n \geq 2$ или $m = 2, n = 1, n > 2$ при $c_2 = 0, a_2 \neq 0$.

Из (3) при $d_1 \neq 0$ для компоненты y построим уравнение

$$\left(ny'' - \frac{d_1'}{d_1} y' - c_1 (y')^{2-n} + \frac{(c_1 d_1' - d_1 c_1') y + d_1' d_0 - d_1 d_0'}{d_1} (y')^{1-n} \right)^m =$$

$$= d_1^{m-1} (y')^{m(1-n)} \left((a_2 y + a_1) y'' - a_2 c_1 y^2 + (b_1 d_1 - a_2 d_0 - a_1 c_1) y + b_0 d_1 - a_1 d_0 \right). \quad (18)$$

При соответствующей замене независимой переменной в системе (3) можем считать $a_2 = 1$. При $m = 1$, используя замену $y = Y, x = X - b_1$, получим систему (3), где $b_1 = 0$.

Согласно [4, с. 269] уравнение (18) при $m = 1, n \geq 2, b_1 = 0$ не имеет подвижных критических особых точек, только если выполнены условия

$$b_0 = d_0 = c_1 = 0, a_1 = K - \frac{d_1'}{d_1}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем систему

$$x' = xy + \left(K - \frac{d_1'}{d_1} \right) x, \quad y'' = d_1 x. \quad (19)$$

При $m = 2, n > 2, c_2 = 0, a_2 = 1$ согласно лемме 2 уравнение (18) имеет подвижные критические особые точки.

Если $m = 2, n = 1, c_2 = 0, a_2 = 1$, то для компоненты x построим уравнение

$$2x'' - \frac{x'^2}{x + b_1} - \left(\frac{b_1'}{x + b_1} + c_1 \right) x' + \frac{b_0 - a_1 b_1}{x + b_1} -$$

$$- \frac{1}{x'} \left((x + b_1)(d_1 x + d_0) + (a_1' - a_1 c_1)x + (b_0' - b_0 c_1) - \frac{(a_1 x + b_0)b_1'}{x + b_1} \right) = 0, \quad (20)$$

которое при $d_1 \neq 0$ [4, с. 284] имеет подвижные критические особые точки.

Пусть $d_1 = 0, c_2 = 0$. Второе уравнение системы (3) имеет свойство Пенлеве только при $n = 1$ как линейное, или при $n = 2, d_0 = K c_1$ [1, с. 423], или при $n \geq 2, c_1 = 0$. Тогда при $m = 1, n \geq 2$ получим системы со свойством Пенлеве вида

$$x' = xy + a_1 x + b_0, \quad y'^2 = c_1 (y + K), \quad (21)$$

$$x' = xy + a_1 x + b_0, \quad y''' = d_0. \quad (22)$$

Если $c_2 = d_1 = 0, m = 2, n = 1$, то уравнение (20) имеет свойство Пенлеве, только если $b_1' = 0, d_0 + a_1' - a_1 c_1 = 0, d_0 b_1 + b_0' - b_0 c_1 = 0$. При замене $x = X - b_1$ в системе (3), где $a_2 = 1$, можем считать $b_1 = 0$. Тогда получим системы со свойством Пенлеве вида

$$x'^2 = xy + a_1 x + b_0, \quad y' = \frac{b_0'}{b_0} y - b_0 \left(\frac{a_1}{b_0} \right)', \quad (23)$$

$$x'^2 = x(y + a_1), \quad y' = c_1 (y + a_1) - a_1'. \quad (24)$$

Если $c_2 = d_1 = 0, m = 2, n \geq 3$, то для наличия свойства Пенлеве у второго уравнения системы (3) необходимо и достаточно требовать, чтобы $c_1 = 0$ [1]. Тогда для компоненты x имеем уравнение

$$\left(2x'' - \frac{x'^2}{x + b_1} - \frac{b_1'}{x + b_1} x' + \frac{b_0 - a_1 b_1}{x + b_1} - \frac{a_1' x^2 + (a_1' b_1 - a_1 b_1' + b_0') x + b_0' b_1 - b_0 b_1'}{(x + b_1) x'} \right)^n = d_0,$$

которое обладает свойством Пенлеве только при $d_0 = 0, b_0' = b_1' = a_1' = 0$ [4]. В этом случае система (3) сводится к виду (12).

В случае $a_2 = 0, c_2 \neq 0$ и $n = 1, m \geq 2$ или $n = 2, m = 1, m > 2$ в силу симметрии правых частей системы (3) и результатов исследования случая $c_2 = 0, a_2 \neq 0$ получим следующие системы со свойством Пенлеве:

$$x'^m = b_1 y, \quad y' = xy + \left(K - \frac{b'_1}{b_1} \right) y, \quad (25)$$

$$x'^2 = a_1(x + K), \quad y' = xy + c_1 y + d_0, \quad (26)$$

$$x'^m = b_0, \quad y' = xy + c_1 y + d_0, \quad (27)$$

$$x' = \frac{d'_0}{d_0} x - d_0 \left(\frac{c_1}{d_0} \right)', \quad y'^2 = xy + c_1 y + d_0, \quad (28)$$

$$x' = a_1(x + c_1) - c'_1, \quad y'^2 = y(x + c_1). \quad (29)$$

Рассмотрим случай $a_2 = c_2 = 0$, $b_1 \neq 0$. Тогда из системы (3) для компоненты x построим уравнение

$$\begin{aligned} & (mb_1 x'^{m-1} x'' - b'_1 x'^m - a_1 b_1 x' + (a_1 b'_1 - a'_1 b_1) x + b_0 b'_1 - b_1 b'_0)^n = \\ & = b_1^{2n-1} (c_1 x'^m - (a_1 c_1 - d_1 b_1) x - b_0 c_1 + d_0 b_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно лемме 2 при $b_1 c_1 \neq 0$ необходимо требовать, чтобы $m - n(m-1) \geq 0$. Откуда возможны случаи $n=1$, $m \geq 2$ или $n=m=2$ или $m=1$, $n \geq 2$. Если $m > 2$, $n=1$, $b_1 \neq 0$ или $m=2$, $n=1$, $b_1 \neq 0$, то согласно [4] уравнение (30) имеет свойство Пенлеве, только если соответственно

$$a_1 = 0, \quad d_1 = 0, \quad b_0 b'_1 - b_1 b'_0 + b_1 (b_0 c_1 - d_0 b_1) = 0 \quad (31)$$

или

$$a_1 b'_1 - a'_1 b_1 + b_1 (a_1 c_1 - d_1 b_1) = 0, \quad b_0 b'_1 - b_1 b'_0 + b_1 (b_0 c_1 - d_0 b_1) = 0. \quad (32)$$

Тогда получим системы со свойством Пенлеве вида

$$x'^m = b_1 y + b_0, \quad y' = c_1 y + d_0, \quad (33)$$

где $d_0 = \frac{b_0}{b_1} c_1 - \left(\frac{b_0}{b_1} \right)'$, $m > 2$;

$$x'^2 = a_1 x + b_1 y + b_0, \quad y' = c_1 y + d_1 x + d_0, \quad (34)$$

где $d_0 = \frac{b_0}{b_1} c_1 - \left(\frac{b_0}{b_1} \right)'$, $d_1 = \frac{a_1}{b_1} c_1 - \left(\frac{a_1}{b_1} \right)'$.

Если $c_1 = 0$, $b_1 \neq 0$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, то согласно лемме 2 для наличия у уравнения (30) свойства Пенлеве надо требовать, чтобы $d_0 = d_1 = 0$ и, кроме этого, $a_1 = 0$, $b_0 b'_1 - b_1 b'_0 = 0$ при $m > 2$. Тогда в рассматриваемом случае система (3) является частным случаем (33), (34).

Пусть теперь $a_2 = c_2 = 0$, $b_1 \neq 0$, $m=1$, $n \geq 2$. Если $d_1 \neq 0$, то для компоненты y построим уравнение

$$ny'' - \left(a_1 + \frac{d'_1}{d_1} \right) y' - c_1 y'^{2-n} + \left(\frac{(c_1 d'_1 - d_1 c'_1) y + d'_1 d_0 - d_1 d'_0}{d_1} - (d_1 b_1 - a_1 c_1) y + d_0 a_1 - b_0 d_1 \right) y'^{1-n} = 0. \quad (35)$$

Для наличия у него свойства Пенлеве необходимо и достаточно, чтобы

$$n=2, \quad c_1 d'_1 - d_1 c'_1 - d_1 (d_1 b_1 - a_1 c_1) = 0, \quad d'_1 d_0 - d_1 d'_0 + d_1 (d_0 a_1 - b_0 d_1) = 0.$$

Тогда получим систему со свойством Пенлеве вида

$$x' = a_1 x + b_1 y + b_0, \quad y'^2 = c_1 y + d_1 x + d_0, \quad (36)$$

где $b_0 = a_1 \frac{d_0}{d_1} - \left(\frac{d_0}{d_1} \right)'$, $b_1 = a_1 \frac{c_1}{d_1} - \left(\frac{c_1}{d_1} \right)'$.

Если $d_1 = 0$, то второе уравнение системы (3) не содержит компоненту x и согласно [1, с. 423] обладает свойством Пенлеве, если вырождается в линейное уравнение или имеет вид $y'^2 = c_1(y + K)$. Система (3) со свойством Пенлеве имеет вид

$$x' = a_1 x + b_1 y + b_0, \quad y'^2 = c_1(y + K), \quad (37)$$

где $b_1 \neq 0$.

Рассмотрим случай $a_2 = c_2 = b_1 = 0$. Тогда первое уравнение обладает свойством Пенлеве, только если оно линейное или имеет вид $x'^2 = a_1(x + K)$.

Если $d_1 \neq 0$, то в силу симметрии правых частей системы (3) и результатов исследования случая $a_2 = c_2 = 0$, $b_1 \neq 0$ получим следующие системы со свойством Пенлеве:

$$x' = a_1 x + b_0, \quad y'' = d_1 x + d_0, \quad (38)$$

где $b_0 = \frac{d_0}{d_1} a_1 - \left(\frac{d_0}{d_1} \right)'$, $n > 2$;

$$x'^2 = a_1(x + K), \quad y' = c_1 y + d_1 x + d_0, \quad (39)$$

где $d_1 \neq 0$.

В случае $a_2 = c_2 = b_1 = d_1 = 0$ каждое уравнение зависит только от одной компоненты и согласно [1, с. 423] система (3) со свойством Пенлеве имеет вид (17) или (37), где $b_1 = 0$, или (39), где $d_1 = 0$.

Из полученных результатов следует, что справедлива

Теорема 2. Для того чтобы система (1) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из следующих видов: (8), (11) – (17), (19), (21) – (29), (33), (34), (36) – (39).

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.

2. Березкина Н. С., Мартынов И. П., Пронько В. А. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 4. С. 1.

3. Березкина Н. С., Мартынов И. П., Пронько В. А. // Там же. 2000. Т. 36. № 1. С. 33.

4. Bugeau F. // Ann. di Math. Sci. 1964. Vol. 64. P. 229.

Поступила в редакцию 11.12.08.

Иван Платонович Мартынов – доктор физико-математических наук, профессор.

Виктор Михайлович Пецевич – кандидат физико-математических наук, доцент.

Вячеслав Аркадьевич Пронько – кандидат физико-математических наук, доцент.