.

УДК 517.9

В.В. ГРУШЕВСКИЙ, Е.В. ШЛЫКОВ

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АЛГЕБР МНЕМОФУНКЦИЙ

In this article Cauchy problem to system of differential equations with generalized right-hand sides in Cartesian product of new generalized functions algebras is investigated, in case the right-hand sides contain the product of discontinuous and generalized func tions. We give definitions of $I_\pm$-solutions of such a problem. It is shown that under some conditions the associated solutions to system in differentials, which corresponds to initial problem in Cartesian product of new generalized functions algebras, coincide with

$I_\pm$-solutions.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{X}^i(t) = f^i(X(t))\dot{L}^i(t), \\ X^i(0) = x_0^i,\ t \in T = [0,\alpha] \subset R,\ i = 1, 2, \end{cases} \tag{1}$$

где в правой части содержится произведение кусочно-непрерывных функций $f^i : R^2 \to R$ на обобщенные производные кусочно-постоянных функций $L^i : R^2 \to R,$ имеющих конечное число точек разрыва.

Под кусочно-непрерывной функцией $f^i$ двух переменных понимается ограниченная функция, разрывная только на множестве $U_i = \{(x, \varphi_i(x)) \mid x \in R, \varphi_i \in C(R)\},$ непрерывно продолжимая с каждой области непрерывности $G_i^+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 > \varphi_i(x_1)\},$ $G_i^- = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 < \varphi_i(x_1)\}$ на ее границу и удовлетворяющая в $G_i^\pm$ условию Липшица по обеим переменным с константой $C_i^\pm$. Всюду далее предполагается, что $U_1 = U_2 = U$.

Ввиду того, что в правых частях уравнений системы содержатся произведения обобщенных функций на разрывные, задача (1) является некорректной. Подробный обзор подходов, а также статей по их применению к формализации подобных уравнений имеется в [1]. В данной работе для изучения исходной системы уравнений будет применен подход алгебр мнемофункций [1], который успешно зарекомендовал себя при исследовании одномерных автономных и неавтономных дифференциальных уравнений, содержащих произведение обобщенной функции на разрывную [2–4].

В алгебре мнемофункций задаче (1) можно поставить в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = f_n^i(X_n(t))(L_n^i(t+h_n) - L_n^i(t)), \\ X_n^i(t)\big|_{[0,h_n)} = x_{n0}^i(t),\ t \in T,\ i = 1,2. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь в качестве представителей функций $f^i$ и $L^i$, $i = 1,2,$ будем рассматривать свертки этих функций с «шапочками», т. е.

$$f_n^i(x_1, x_2) = (f^i * \rho_n^1)(x_1, x_2) = \int_0^{1/n}\int_0^{1/n} f^i(x_1 + s_1, x_2 + s_2)\rho_n^1(s_1, s_2)ds_1 ds_2,$$

$$L_n^i(t) = (L^i * \rho_n^2)(t) = \int_0^{1/n} L^i(t+s)\rho_n^2(s)ds,$$

где $\rho_n^1(s_1,s_2)\in C^\infty(R^2)$, $\rho_n^1(s_1,s_2)\ge 0$, $\operatorname{supp}\rho_n^1\subset[0,1/n]^2$, $\int\limits_0^{1/n}\int\limits_0^{1/n}\rho_n^1(s_1,s_2)ds_1ds_2=1$, $\rho_n^2(s)\in C^\infty(R)$, $\rho_n^2(s)\ge 0$, $\operatorname{supp}\rho_n^2\subset[0,1/n]$, $\int\limits_0^{1/n}\rho_n^2(s_1,s_2)ds_1ds_2=1$.

Пусть $t$ – произвольная точка отрезка $T$. Тогда $t$ можно представить в виде $t=\tau_t+w_th_n$, где $\tau_t\in[0,h_n)$, $w_t\in N$. Обозначим $t_m=\tau_k+mh_n$, $m\in N$. Нетрудно показать, что решение системы (2) при описанных условиях можно записать в виде

$$X_n^i(t)=X_{n0}^i(\tau_t)+\sum_{m=0}^{w_t-1}f_n^i(X_n(t_m)(L_n^i(t_{m+1})-L_n^i(t_m)).$$

Для описания предельного поведения решений указанной задачи в алгебре мнемофункций нам понадобится следующее определение $I^\pm$-решения задачи (1).

*Определение 1.* Будем говорить, что функция $X^\pm(t)=(X^{1\pm}(t),X^{2\pm}(t))$ является $I^\pm$-решением задачи Коши (1), если она удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} X^{1\pm}(t)=x_0^1+\sum\limits_{\mu_j\le t}f^{1\pm}(X^1(\mu_j-)X^2(\mu_j-))\Delta L^1(\mu_j),\\ X^{2\pm}(t)=x_0^1+\sum\limits_{\mu_j\le t}f^{2\pm}(X^1(\mu_j-)X^2(\mu_j-))\Delta L^2(\mu_j),\end{cases}\tag{3}$$

где $\mu_j$, $j=\overline{1,n_0}$, – точки разрыва обеих функций $L^i$, занумерованные одним индексом в порядке возрастания, $\Delta L^i(\mu_j)=L^i(\mu_j+)-L^i(\mu_j-)$,

$$f^{i\pm}(x_1,x_2)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{(x_1^*,x_2^*)\to(x_1,x_2)\\(x_1^*,x_2^*)\in G^\pm}}f^i(x_1^*,x_2^*),\ x_2=\varphi(x_1),\\ f^i(x_1,x_2),\ x_2\ne\varphi(x_1).\end{cases}$$

Пусть $m_j$, $j=\overline{1,n_0}$, определяются из условия $t_{m_j}<\mu_j-1/n\le t_{m_j+1}$, $M_i=\sup\limits_{(x_1,x_2)\in R^2}\left|f^i(x_1,x_2)\right|$, $C=\max\{C_1^+,C_1^-,C_2^+,C_2^-\}$, $B=\operatorname*{Var}\limits_{t\in T}L(t)\max\{M_1,M_2\}$.

**Лемма 1.** Пусть $f^i$ – кусочно-непрерывны, $\varphi$ – неубывающая функция, $L^i$ – кусочно-постоянны и для каждого $j=\overline{1,n_0}$ существует числовая последовательность $\lambda_n^j\to 0$ при $n\to\infty$ такая, что для достаточно больших $n$ $\forall\, t\in A_n^j\subset[\mu_j,\mu_{j+1})$ выполняется

$$a_1^j-1/n-\lambda_n^j\le X_n^1(t_{m_j})\le a_1^j-1/n,\ a_2^j\le X_n^2(t_{m_j})\le a_2^j+\lambda_n^j,\ a^j=(a_1^j,a_2^j)\in R^2.$$

Тогда $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall\, n\ge N(\varepsilon)$ $\forall\, t\in A_n^j$ выполняется $\left|f_n^i(X_n(t_{m_j}))-f^{i+}(a^j)\right|<\varepsilon$.

Доказательство. Предположим, что $a^j=(a_1^j,a_2^j)\in U$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. По определению $f^{i+}$ для заданного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для $\forall\, x=(x_1,x_2)\in\overline{G^+}$ из неравенства $|x_i-a_i|<\delta$ следует неравенство $\left|f^{i+}(x)-f^{i+}(a^j)\right|<\varepsilon/2$.

В силу $1/n\to 0$, $\lambda_n^j\to 0$ при $n\to\infty$ существует номер $N_1$, начиная с которого выполняется $\max\{1/n,\lambda_n^j\}<\delta/2$, откуда вытекает, что, начиная с этого же номера, выполняется неравенство $\left|f^{i+}(X_n(t_{m_j}))-f^{i+}(a^j)\right|<\varepsilon/2$ $\forall\, t\in A_n^j$.

Далее в силу $2C/n\to 0$ при $n\to\infty$ существует номер $N_2$, начиная с которого выполняется $2C/n<\varepsilon/2$.

Тогда, пользуясь условием Липшица, покажем, что $\forall\, n\ge\max\{N_1,N_2\}$ $\forall\, t\in A_n^j$ выполняется

$$\left|f_n^i(X_n(t_{m_j}))-f^{i+}(a^j)\right|\le\left|f_n^i(X_n(t_{m_j}))-f^{i+}(X_n(t_{m_j}))\right|+$$

$$+\left|f^{i+}(X_n(t_{m_j}))-f^{i+}(a^j)\right|\le\left|\int_0^{1/n}\int_0^{1/n}f^i(X_n^1(t_{m_j})+s_1,X_n^2(t_{m_j})+s_2)\rho_n^1(s_1,s_2)ds_1ds_2-\right.$$

$$\left.-f^{i+}(X_n(t_{m_j}))\right|+\left|f^{i+}(X_n(t_{m_j}))-f^{i+}(a^j)\right|\le$$

$$\le C\int_0^{1/n}\int_0^{1/n}(|s_1|+|s_2|)\rho_n^1(s_1,s_2)ds_1ds_2+\left|f^{i+}(X_n(t_{m_j}))-f^{i+}(a^j)\right|\le\varepsilon/2+2C/n<\varepsilon.$$

В случае $a^j\notin U$ доказательство проводится аналогично. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть $f^i$ – кусочно-непрерывны, $\varphi$ – неубывающая функция, $L^i$ – кусочно-постоянны и для каждого $j=\overline{1,n_0}$ существует числовая последовательность $\lambda_n^j\to 0$ при $n\to\infty$ такая, что для достаточно больших $n$ $\forall\, t\in A_n^j\subset\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)$ выполняется

$$a_1^j\le X_n^1(t_{m_j})\le a_1^j+\lambda_n^j,\ \ a_2^j-1/n-\lambda_n^j\le X_n^2(t_{m_j})\le a_2^j-1/n,\ \ a^j=(a_1^j,a_2^j).$$

Тогда $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, N(\varepsilon):\ \forall\, n\ge N(\varepsilon)\ \ \forall\, t\in A_n^j$ выполняется $\left|f_n^i(X_n(t_{m_j}))-f^{i-}(a^j)\right|<\varepsilon.$

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1.

Рассмотрим случай $I^+$-решения.

**Теорема 1.** Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $f^i:R^2\to R$ кусочно-непрерывны и $\varphi$ не убывает;

2) $f^1$ не убывает (не возрастает) по первой переменной и не возрастает по второй переменной, $L^1:T\to R$ непрерывна справа, кусочно-постоянна и не убывает (не возрастает);

3) $f^2$ не возрастает по первой переменной и не убывает (не возрастает) по второй переменной, $L^2:T\to R$ непрерывна справа, кусочно-постоянна и не убывает (не возрастает);

4) $\sup\limits_{t\in[0,h_n)}\left|X_{n0}^i-x_0^i\right|\to 0$ при $n\to\infty,\ h_n\to 0$ и для достаточно больших $n$ выполняются неравенства $X_{n0}^1+1/n\le x_0^1,\ X_{n0}^2\ge x_0^2$.

Тогда при $n\to\infty,\ h_n\to 0$ так, что $1/n=o\left(h_n\right)$

$$\int_T\left|X_n\left(t\right)-X\left(t\right)\right|dt\to 0,$$

где $X_n\left(t\right)=\left(X_n^1\left(t\right),X_n^2\left(t\right)\right)$ решение конечно-разностной задачи с осреднением (2), $X\left(t\right)=$ $=\left(X^1\left(t\right),X^2\left(t\right)\right)$ $I^+$– решение системы (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим для каждого $j\in\{1,\ldots,n_0\}$ и достаточно больших $n\in N$ множество $T_n^j=T\cap\left(\coprod\limits_{k=0}^{m_a+1}\left[\mu_j-\dfrac{1}{n}+kh_n,\mu_j+kh_n\right]\right)$, где $m_a=W\left(\dfrac{a}{h_n}\right)$, $W(x)$ – целая часть $x$. Ввиду соотношения $1/n=o\left(h_n\right)$ объединение в $T_n^j$ дизъюнктное.

Обозначим $\nu_R$ – мера Лебега на прямой. Тогда, используя свойства субаддитивности и монотонности меры, имеем

$$\nu_R\left(\bigcup_j T_n^j\right)\le\frac{n_0}{n}\left(m_a+2\right)=\frac{n_0m_a}{n}+\frac{2n_0}{n}=n_0\frac{a-\tau_a}{nh_n}+\frac{2n_0}{n}\le\frac{n_0a}{nh_n}+\frac{2n_0}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Тогда, начиная с некоторого номера $N_1$, выполняется $\dfrac{n_0a}{nh_n}+\dfrac{2n_0}{n}<\dfrac{\varepsilon}{8B}$ для любого наперед заданного $\varepsilon>0$.

Докажем утверждение теоремы, используя индукцию по точкам разрыва функций $L^i$, $i=1,2$. Предположим, что при некотором фиксированном $j$ имеется сходимость $X_n\left(t\right)=\left(X_n^1\left(t\right),X_n^2\left(t\right)\right)$ к

$X(t)=\left(X^1(t),X^2(t)\right)$ в $L_1\left[0,\mu_j\right]$, причем существует числовая последовательность $\lambda_n^j\to 0$ такая, что для достаточно больших $n$ и $\forall\, t\in\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j$ выполняется

$$X^1\left(\mu_j-\right)-\frac{1}{n}-\lambda_n^j\le X_n^1\left(t_{m_j}\right)\le X^1\left(\mu_j-\right)-\frac{1}{n}, \tag{4}$$

$$X^2\left(\mu_j-\right)\le X_n^2\left(t_{m_j}\right)\le X^2\left(\mu_j-\right)+\lambda_n^j, \tag{5}$$

и покажем, что аналогичное утверждение выполняется и для $j+1$.

Докажем базу индукции. Для этого зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда, начиная с некоторого номера $N_2$, имеем $\sup\limits_{t\in[0,h_n)}\left|X_{n0}^i(t)-x_0^i\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2\mu_1}$, а для $n$, больших некоторого номера $N_3$, выполняется $1/n\le\varepsilon/(2B)$. Тогда для $n\ge\max\left\{N_2,N_3\right\}$ имеем

$$\int_0^{\mu_1}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt=\int_0^{\mu_1-1/n}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt+\int_{\mu_1-1/n}^{\mu_1}\left|X_n^i(t)-X_{n0}^i(\tau_t)\right|dt+$$

$$+\int_{\mu_1-1/n}^{\mu_1}\left|X_{n0}^i(\tau_t)-x_0^i\right|dt\le\int_0^{\mu_1-1/n}\left|X_{n0}^i(\tau_t)-x_0^i\right|dt+\int_{\mu_1-1/n}^{\mu_1}\left|X_{n0}^i(\tau_t)-x_0^i\right|dt+$$

$$+\left|\Delta L^i\left(\mu_1\right)\right|\int_{\mu_1-1/n}^{\mu_1}\left|f_n^i\left(X_{n0}(\tau_t)\right)\right|dt\le\int_0^{\mu_1}\left|X_{n0}^i(\tau_t)-x_0^i\right|dt+\frac{B}{n}<\frac{\varepsilon}{2\mu_1}\mu_1+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Взяв в качестве $\lambda_n^1:=\max\limits_i\left\{\sup\limits_{t\in[0,h_n)}\left|X_{n0}^i(t)-x_0^i\right|\right\}$, с учетом условия 4) теоремы получаем неравенства (4) и (5). Таким образом, база индукции доказана.

Пусть теперь предположение выполнено для некоторого номера $j$. Тогда в силу неравенств (4), (5) и леммы 1, начиная с некоторого номера $N_4$, для всех $t\in\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j$ выполняется

$$\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|=\left|X_n^i\left(t_{m_j}\right)-X^i\left(\mu_j-\right)+\left(f_n^i\left(X_n\left(t_{m_j}\right)\right)-f^{i+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right)\Delta L^i\left(\mu_j\right)\right|\le$$

$$\le\left|X_n^i\left(t_{m_j}\right)-X^i\left(\mu_j-\right)\right|+\left|f_n^i\left(X_n\left(t_{m_j}\right)\right)-f^{i+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right|\left|\Delta L^i\left(\mu_j\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2\alpha}$$

для любого наперед заданного $\varepsilon>0$.

Теперь покажем, что $\int\limits_{\mu_j}^{\mu_{j+1}}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt\to 0$ при $n\to\infty$, откуда с учетом предположения индукции будет следовать, что $\int\limits_0^{\mu_{j+1}}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt\to 0$ при $n\to\infty$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда, начиная с некоторого номера $N_5$, выполняется $\sup\limits_{t\in[0,h_n)}\left|X_{n0}^i(t)-x_0^i\right|\le 2B$, а для $n\ge\max\left\{N_1,N_4,N_5\right\}$ имеем

$$\int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt=\int\limits_{\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt+\int\limits_{\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\cap\bigcup_j T_n^j}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt\le$$

$$\le\int\limits_{\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j}\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|dt+\int\limits_{\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\cap\bigcup_j T_n^j}\left|X_n^i(t)-X_{n0}^i(t)\right|dt+$$

$$+\int\limits_{\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\cap\bigcup_j T_n^j}\left|x_0^i-X^i(t)\right|dt+\int\limits_{\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\cap\bigcup_j T_n^j}\left|x_0^i-X_{n0}^i(t)\right|dt\le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2a}\nu_R\left(\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j\right)+4B\nu_R\left(\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\cap\bigcup_j T_n^j\right)\le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2a}\nu_R(T)+4B\nu_R\left(\bigcup_j T_n^j\right)\le\frac{\varepsilon}{2}+4B\frac{\varepsilon}{8B}=\varepsilon.$$

Теперь необходимо показать, что существует числовая последовательность $\lambda_n^{j+1}\to 0$ такая, что для достаточно больших $n$ и $\forall\, t\in\left[\mu_{j+1},\mu_{j+2}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j$ выполняется

$$X^1\left(\mu_{j+1}-\right)-\frac{1}{n}-\lambda_n^{j+1}\le X_n^1\left(t_{m_{j+1}}\right)\le X^1\left(\mu_{j+1}-\right)-\frac{1}{n}, \tag{6}$$

$$X^2\left(\mu_{j+1}-\right)\le X_n^2\left(t_{m_{j+1}}\right)\le X^2\left(\mu_{j+1}-\right)+\lambda_n^{j+1}. \tag{7}$$

Ранее было показано, что, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, для всех $\forall\, t\in\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j$ выполняется $\left|X_n^i(t)-X^i(t)\right|<\varepsilon,$ откуда

$$\sup_{t\in\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j}\left|X_n^i(t)-X^i\left(\mu_{j+1}-\right)\right|\le\varepsilon.$$

Тогда положим

$$\lambda_n^{j+1}:=\max_i\left\{\sup_{t\in\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j}\left|X_n^i(t)-X^i(\mu_{j+1}-)\right|\right\}.$$

По построению множества $\left[\mu_{j+1},\mu_{j+2}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j$ для каждого $t\in\left[\mu_{j+1},\mu_{j+2}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j$ имеем $t_{m_{j+1}}\in\left[\mu_j,\mu_{j+1}\right)\setminus\bigcup_j T_n^j,$ откуда получаем левую часть неравенства (6) и правую часть (7).

Правая часть неравенства (6) вытекает из следующих рассуждений:

$$X_n^1\left(t_{m_{j+1}}\right)-\left(X^1\left(\mu_{j+1}-\right)-1/n\right)\le X_n^1\left(t_{m_j}\right)+f_n^1\left(X_n\left(t_{m_j}\right)\right)\Delta L^1\left(\mu_j\right)-$$

$$-X^1\left(\mu_j-\right)+1/n-f^{1+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\Delta L^1\left(\mu_j\right)\le\Delta L^1\left(\mu_j\right)\left(f_n^1\left(X_n\left(t_{m_j}\right)\right)-f^{1+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right)=$$

$$=\Delta L^1\left(\mu_i\right)\left(\int_0^{1/n}\int_0^{1/n}f^1\left(X_n^1\left(t_{m_j}\right)+s_1,X_n^2\left(t_{m_j}\right)+s_2\right)\rho_n^1\left(s_1,s_2\right)ds_1ds_2-\right.$$

$$\left.-f^{1+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right)=\Delta L^1\left(\mu_i\right)\left(\int_0^{1/n}\int_0^{1/n}f^1\left(X_n^1\left(t_{m_j}\right)+s_1,X_n^2\left(t_{m_j}\right)+s_2\right)-f^{1+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right)\rho_n^1\left(s_1,s_2\right)ds_1ds_2\le 0.$$

Последнее неравенство справедливо в силу условия 2).

Левая часть неравенства (7) следует из выкладок

$$X_n^2\left(t_{m_{j+1}}\right)-X\left(\mu_{j+1}-\right)\ge X_n^2\left(t_{m_j}\right)+f_n^2\left(X_n\left(t_{m_j}\right)\right)\Delta L^2\left(\mu_j\right)-$$

$$-X^2\left(\mu_j-\right)-f^{2+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\Delta L^2\left(\mu_j\right)\ge\Delta L^2\left(\mu_j\right)\left(f_n^2\left(X_n\left(t_{m_j}\right)\right)-f^{2+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right)=$$

$$=\Delta L^2\left(\mu_i\right)\left(\int_0^{1/n}\int_0^{1/n}f^2\left(X_n^1\left(t_{m_j}\right)+s_1,X_n^2\left(t_{m_j}\right)+s_2\right)\rho_n^1\left(s_1,s_2\right)ds_1ds_2-f^{2+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right)=$$

$$=\Delta L^2\left(\mu_i\right)\left(\int_0^{1/n}\int_0^{1/n}f^2\left(X_n^1\left(t_{m_j}\right)+s_1,X_n^2\left(t_{m_j}\right)+s_2\right)-f^{2+}\left(X\left(\mu_j-\right)\right)\right)\rho_n^1\left(s_1,s_2\right)ds_1ds_2\ge 0.$$

В этом случае последнее неравенство выполняется в силу условия 3).

Теорема 1 доказана.

Для случая $I^-$ решения справедлива

**Теорема 2.** Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $f^i : R^2 \to R$ кусочно-непрерывны и $\varphi$ не убывает;

2) $f^1$ не убывает (не возрастает) по первой переменной и не возрастает по второй переменной, $L^1 : T \to R$ непрерывна справа, кусочно-постоянна и не убывает (не возрастает);

3) $f^2$ не возрастает по первой переменной и не убывает (не возрастает) по второй переменной, $L^2 : T \to R$ непрерывна справа, кусочно-постоянна и не убывает (не возрастает);

4) $\sup\limits_{t\in[0,h_n)} \left| X_{n0}^i - x_0^i \right| \to 0$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ и для достаточно больших $n$ выполняются неравенства $X_{n0}^1 \ge x_0^1$, $X_{n0}^2 + 1/n \le x_0^2$.

Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $1/n = o\left(h_n\right)$

$$\int\limits_T \left| X_n\left(t\right) - X\left(t\right) \right| dt \to 0,$$

где $X_n\left(t\right) = \left(X_n^1\left(t\right), X_n^2\left(t\right)\right)$ – решение конечно-разностной задачи с осреднением (2), $X\left(t\right) = \left(X^1\left(t\right), X^2\left(t\right)\right)$ $I^-$ – решение системы (3).

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1.

*Замечание 1.* Можно привести подобные результаты для невозрастающей функции $\varphi$.

1. Yablonski A. // Nonlinear Analysis. 2005. Vol. 63. P. 171.
2. Лазакович Н.В., Шлыков Е.В. // Докл. НАН Беларуси. 2007. Т. 51. № 6. С. 21.
3. Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л. // Изв. вузов. Математика. 2005. № 3. С. 23.
4. Грушевский В.В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 3. С. 31.

Поступила в редакцию 15.01.10.

***Владимир Владимирович Грушевский*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа БГПУ им. М. Танка.

***Евгений Владимирович Шлыков*** – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н.В. Лазакович.