УДК 517.977

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ[1], ***В. В. КРАХОТКО***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

В теории управляемости динамических систем в большинстве случаев управления выбираются из класса кусочно-непрерывных функций. Однако представляет интерес вопрос выбора управлений из других классов, которые технически легко реализуемы. В статье рассматривается задача относительной управляемости линейной системы со многими запаздываниями по управлению с помощью дифференциального (динамического) регулятора. Получены критерии относительной управляемости, которые записываются в терминах исходной системы и динамического регулятора.

Ключевые слова: управляемость; наблюдаемость; линейные системы; системы с запаздыванием по управлению; динамический регулятор.

Образец цитирования:
Размыслович ГП, Крахотко ВВ. Управляемость линейных систем со многими запаздываниями по управлению с помощью дифференциальных регуляторов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:82–85.

For citation:
Razmyslovich GP, Krakhotko VV. Controllability linear systems with many delays in control by the differential regulators. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:82–85. Russian.

Авторы:
Георгий Прокофьевич Размыслович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.
Валерий Васильевич Крахотко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.

Authors:
Georgii P. Razmyslovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.
razmysl@bsu.by
Valerii V. Krakhotko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of optimal control methods, faculty of applied mathematics and computer science.

CONTROLLABILITY LINEAR SYSTEMS WITH MANY DELAYS IN CONTROL BY THE DIFFERENTIAL REGULATORS

***G. P. RAZMYSLOVICH*[a], *V. V. KRAKHOTKO*[a]**

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: G. P. Razmyslovich (razmysl@bsu.by)

In the theory of controllability dynamical systems in most cases the control is selected from the class of piecewise continuous functions. But the choise of the control from other classes is interested. In the article we consider the problem of relative controllability of linear systems with many delays in control by the help of differential (dynamical) regulator. The criterions of controllability in terms of parameters initial system and dynamical regulator are obtained.

Key words: controllability; observability; linear systems; systems with delay in control; dynamical regulator.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i u(t - h_i),\ t \geq 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,\ u_0(\cdot) = \{u(t) \equiv 0,\ t \in [-h_m,\ 0)\}, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; A – $n \times n$-матрица; x_0, b, b_i $(i = \overline{1,\ m})$ – заданные n-векторы; u – скалярное управление; h_i – запаздывания $(1 \leq i \leq m)$, причем $0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_m$.

Определение 1. Система (1) называется относительно управляемой, если для любого начального состояния (2) найдутся момент времени t_1 $(0 < t_1 < +\infty)$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$ $(0 \leq t \leq t_1)$ такие, что состояние системы (1), (2), соответствующее этому управлению, удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Обобщая результаты работы [1], имеем следующее утверждение.

Теорема 1. *Система (1) относительно управляема тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\operatorname{rank}\left(B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B\right) = n, \tag{3}$$

где B – $n \times (m+1)$*-матрица вида* $B = (b,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)$.

Представляет интерес вопрос о возможности управления системой (1) не кусочно-непрерывными функциями, а с помощью более узкого класса управлений. А именно пусть управление строится по выходному сигналу

$$u(t) = c^{\mathrm{T}} y(t),\ t \geq 0 \tag{4}$$

дифференциальной системы

$$\dot{y}(t) = Dy(t),\ y_0 = y(0), \tag{5}$$

где c, y, $y_0 \in \mathbb{R}^n$; D – заданная $n \times n$-матрица.

Определение 2. Система (5) называется наблюдаемой, если существует момент времени t_1 $(0 < t_1 < +\infty)$ такой, что любое начальное состояние y_0 системы (5) можно восстановить по выходу (4).

Согласно [2] верна следующая теорема.

Теорема 2. *Система (5) наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\left(c^{\mathrm{T}},\ c^{\mathrm{T}}D,\ c^{\mathrm{T}}D^2,\ \ldots,\ c^{\mathrm{T}}D^{n-1}\right) = n. \tag{6}$$

Определение 3. Систему (1) назовем управляемой дифференциальным регулятором (5), если существует момент времени t_1 $(0 < t_1 < +\infty)$ такой, что для любого начального состояния (2) найдется начальное состояние y_0 системы (5), при котором состояние $x(t)$ системы (1), соответствующее управлению (4), удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$.

Запишем решение системы (1), (2) с учетом (4), (5):

$$x(t) = e^{At}x_0 + \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}\left(bc^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{m} b_i c^{\mathrm{T}} e^{-Dh}\right)e^{D\tau}d\tau\right)y_0. \tag{7}$$

Исходя из (7), получаем, что система (1) управляема дифференциальным регулятором (5) тогда и только тогда, когда при некотором $t_1 > 0$ для любого n-вектора x_0 найдется n-вектор y_0 такой, что выполняется равенство

$$-x_0 = \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} \left(bc^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{m} b_i c^{\mathrm{T}} e^{-Dh} \right) e^{D\tau} d\tau \right) y_0. \tag{8}$$

Из равенства (8) получаем неявный критерий управляемости системы (1) регулятором (5).

Теорема 3. *Для управляемости системы (1) дифференциальным регулятором (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\operatorname{rank} \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} \left(bc^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{m} b_i c^{\mathrm{T}} e^{-Dh} \right) e^{D\tau} d\tau \right) = n. \tag{9}$$

Укажем более удобный критерий управляемости.

Теорема 4. *Система (1) управляема дифференциальным регулятором (5) тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\operatorname{rank} \tilde{B} = n, \ \operatorname{rank} \tilde{C} = n, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{B} = \left(b,\, Ab,\, \ldots,\, A^{n-1}b,\, b_1,\, Ab_1,\, \ldots,\, A^{n-1}b_1,\, \ldots,\, b_m,\, Ab_m,\, \ldots,\, A^{n-1}b_m \right); \\ \tilde{C} = \left(c, D^{\mathrm{T}}c,\, \ldots,\, \left(D^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} c,\, e^{-Dh_1}c,\, \left(e^{-Dh_1}D\right)^{\mathrm{T}} c,\, \ldots,\, \left(e^{-Dh_1}D^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} c,\, \ldots,\, \left(e^{-Dh_m}D\right)^{\mathrm{T}} c,\, \ldots,\, \left(e^{-Dh_m}D^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} c \right). \end{gathered} \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Рассмотрим матричную функцию

$$\Phi(t) = \int_0^{t} e^{-A\tau} \left(bc^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{m} b_i c^{\mathrm{T}} e^{-Dh} \right) e^{D\tau} d\tau, \ t \geq 0.$$

Поскольку матричные функции $e^{A\tau}$ и $e^{D\tau}$ представимы как [3]

$$e^{-A\tau} = \sum_{\gamma=0}^{n-1} a_\gamma(\tau) A^\gamma, \ e^{D\tau} = \sum_{\beta=0}^{n-1} b_\beta(\tau) D^\beta,$$

где $a_\gamma(\tau)$, $b_\beta(\tau)$ – некоторые аналитические функции, то функцию $\Phi(t)$, в свою очередь, можно представить в виде

$$\Phi(t) = \tilde{B} \tilde{F}(t) \tilde{C}^{\mathrm{T}},$$

причем $n(m+1) \times n(m+1)$-матрица $\tilde{F}(t)$ является блочно-диагональной:

$$\tilde{F}(t) = \operatorname{diag}\left(F(t),\, F(t),\, \ldots,\, F(t) \right),$$

а $n \times n$-матрица $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t a_0(\tau) b_0(\tau) d\tau & \ldots & \int_0^t a_0(\tau) b_{n-1}(\tau) d\tau \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_0^t a_{n-1}(\tau) b_0(\tau) d\tau & \ldots & \int_0^t a_{n-1}(\tau) b_{n-1}(\tau) d\tau \end{bmatrix}.$$

Так как система (1) управляема дифференциальным регулятором (5), то на основании теоремы 3 для некоторого момента t_1 $(0 < t_1 < +\infty)$ выполняется равенство $\operatorname{rank} \Phi(t_1) = n$. Но тогда в силу неравенства Сильвестра [3] из (11) следуют равенства (10).

Достаточность. Пусть выполняются соотношения (10). Рассматривая определитель матрицы $F(t)$ и вычисляя производную порядка n^2 в точке $t = 0$, получаем, что $\left(\det F(t) \right)^{\left(n^2\right)} \Big|_{t=0} \neq 0$. Поэтому из аналитичности функции $F(t)$ заключаем, что $F(t)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках полуинтервала $[0, +\infty)$. Отсюда, поскольку матрица $\tilde{F}(t)$ является блочно-диагональной, найдется момент времени t_1 $(0 < t_1 < +\infty)$ такой, что $\det \tilde{F}(t_1) \neq 0$. Следовательно, согласно [4], с учетом соотношений (10), (11), получаем, что выполняется равенство (9), т. е. система (1) управляема дифференциальным регулятором (5). Теорема доказана.

Следуя [3], отметим, что равенство $\operatorname{rank} \tilde{B} = n$ равносильно равенству (3), а равенство $\operatorname{rank} \tilde{C} = n$ равносильно равенству (6). Отсюда справедлива следующая теорема, которая развивает результаты работы [5].

Теорема 5. *Система (1) управляема дифференциальным регулятором (5) тогда и только тогда, когда система (1) относительно управляема, а система (5) относительно наблюдаема.*

В заключение отметим, что полученные результаты обобщаются на системы с r-мерным управлением [6], а именно для систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t - h_i),\ t \geq 0,$$

где B, B_i, $i = \overline{1, m}$, – заданные $n \times r$-матрицы; $u \in \mathbb{R}^r$, а также для систем управления с группой динамических регуляторов.

Библиографические ссылки

1. Габасов РФ, Кириллова ФМ, Крахотко ВВ. Управляемость многоконтурных систем с сосредоточенными параметрами. *Автоматика и телемеханика.* 1971;XXI(11):18–25.

2. Красовский НН. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. *Прикладная математика и механика.* 1964;28(1):3–14.

3. Гантмахер ФР. *Теория матриц.* 4-е издание. Москва: Наука; 1988. 552 с.

4. Игнатенко ВВ. Управляемость систем нейтрального типа со многими входами группой обыкновенных динамических регуляторов. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук.* 1976;3:24–33.

5. Крахотко ВВ, Размыслович ГП. Управляемость линейных систем с запаздыванием по управлению при помощи динамического регулятора. В: *Еругинские чтения – 2018. Тезисы докладов XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям; 15–18 мая 2018 г.; Гродно, Беларусь. Часть 1.* Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2018. с. 120–121.

6. Крахотко ВВ, Размыслович ГП. Управляемость линейных систем со многими запаздываниями по управлению при помощи динамического регулятора. В: *Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация (DSSCO'18). Материалы Международной научной конференции к 100-летию со дня рождения академика Е. А. Барбашина; 24–29 сентября 2018 г.; Минск, Беларусь.* Минск: БГУ; 2018. с. 143–145.

References

1. Gabasov RF, Kirillova FM, Krakhotko VV. Upravlyaemost' mnogokonturnykh sistem s sosredotochennymi parametrami. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 1971;XXI(11):18–25. Russian.

2. Krasovskii NN. K teorii upravlyaemosti i nablyudaemosti lineinykh dinamicheskikh sistem. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1964;28(1):3–14. Russian.

3. Gantmaher FR. *Teoriya matrits* [Theory of matrices]. 4th edition. Moscow: Nauka; 1988. 552 p. Russian.

4. Ignatenko VV. Upravlyaemost' sistem neitral'nogo tipa so mnogimi vkhodami gruppoi obyknovennykh dinamicheskikh regulyatorov. *Izvestiya AN BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk.* 1976;3:24–33. Russian.

5. Krakhotko VV, Razmyslovich GP. Upravlyaemost' lineinykh sistem s zapazdyvaniem po upravleniyu pri pomoshchi dinamicheskogo regulyatora. In: *Eruginskie chteniya – 2018. Tezisy dokdadov XVIII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii po differentsial'nym uravneniyam; 15–18 maya 2018 g.; Grodno, Belarus'. Chast' 1* [Erugin reading – 2018. Abstracts of the XVIII International scientific conference on differential equations; 2018 May 15–18; Grodno, Belarus. Part 1]. Minsk: Institut matematiki NAN Belarusi; 2018. p. 120–121. Russian.

6. Krakhotko VV, Razmyslovich GP. Upravlyaemost' lineinykh sistem so mnogimi zapazdyvaniyami po upravleniyu pri pomoshchi dinamicheskogo regulyatora. In: *Dinamicheskie sistemy: ustoichivost', upravlenie, optimizatsiya (DSSCO'18). Materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii k 100-letiyu so dnya rozhdeniya akademika E. A. Barbashina; 24–29 sentyabrya 2018 g.; Minsk, Belarus'* [Dynamical Systems: stability, control, optimization. Proceedings of the International scientific conference to the 100th anniversary of Ye. A. Barbashin; 2018 September 24–29; Minsk, Belarus]. Minsk: BSU; 2018. p. 143–145. Russian.

Статья поступила в редколлегию 29.05.2018.
Received by editorial board 29.05.2018.