Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018;3:68–74
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2018;3:68–74

УДК 517.968.73

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. РАСОЛЬКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Построена и обоснована вычислительная схема решения задачи Коши для сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля с сингулярным интегралом по отрезку действительной оси, понимаемым в смысле главного значения по Коши. Данное уравнение приводится к равносильному уравнению Фредгольма второго рода путем обращения сингулярного интеграла в классе неограниченных на концах отрезка функций и использования спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Одновременно исследуется условие разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром специального вида и находится приближенное решение. Новая вычислительная схема основана на применении к интегралу, входящему в равносильное уравнение, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Получены равномерные оценки погрешностей приближенных решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; уравнение Прандтля; численное решение; метод ортогональных многочленов.

NUMERICAL SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL PRANDTL EQUATION BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

G. A. RASOLKO[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The paper is constructed and proved computational scheme for a solution of singular Prandtl of integro-differential equations with singular integral over the interval of the real axis, understood in the sense of the Cauchy principal value. This equation reduces to the equivalent Fredholm equation of the second kind by inversion of the singular integral in the class of functions unbounded at the ends and the application of spectral relations for the singular integral. At the same time we investigate the condition of solvability of a Fredholm integral equation of the second kind with a logarithmic kernel of a special kind. The new computational scheme is based on applying spectral relations for the singular integral to the integral entering into the equivalent equation. Uniform estimates of the errors of approximate solutions are obtained.

Key words: integro-differential equation; Prandtl equation; numerical solution; method of orthogonal polynomials.

Образец цитирования:
Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018; 3:68–74.

For citation:
Rasolko GA. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:68–74. Russian.

Автор:
Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Author:
Galina A. Rasolko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
rasolka@bsu.by

Введение

Многие задачи гидродинамики, теории аналитических функций, упругости, фильтрации, теплопроводности и ряда других разделов механики, физики и математической физики приводят к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши.

В исследовании крыла конечного размаха, в контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt = f(x), \ -1 < x < 1, \tag{1}$$

которое называется уравнением Прандтля [1–3]. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ – известные функции из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$, $\Gamma(x)$ – искомая функция. К уравнению (1) присоединяются дополнительные условия

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \tag{2}$$

Число работ, посвященных этому уравнению, велико. Известно, что оно точно решается лишь в редких частных случаях [4]. В значительной части публикаций, начиная с самой первой, исследуется вопрос разработки и обоснования приближенных методов решения уравнения (1) (см., например, [5] и библиографию в ней). Среди таковых наиболее распространенным является метод Мультхоппа.

В настоящей работе предлагается и обосновывается вычислительная схема для численного решения уравнения (1). Первоначально оно сводится к равносильному уравнению с логарифмической особенностью. Указываются условия разрешимости последнего. Новая вычислительная схема основана на применении к интегралу, входящему в уравнение, которое равносильно исходному, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Отметим, что в [6] предложена и обоснована вычислительная схема для уравнения (1), близкая по структуре к схеме Мультхоппа, но отличающаяся от приведенной ниже.

Предварительные сведения

В статье применяются известные спектральные соотношения [7, с. 188]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x),\\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \ -1 < x < 1, \ n = 1, 2, 3, \ldots,\end{gathered} \tag{3}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

При построении вычислительной схемы использован интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода, указанный в теореме 7.9 из [8, с. 89]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}^{0} c_j T_j(x), \tag{4}$$

где $c_j = \dfrac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k)$, $j = 0, 1, \ldots, n$; $x_k = \cos\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Здесь обозначено: $\sum_{j=0}^{n}{}^{0} a_j = \dfrac{1}{2}a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Отметим, что в этой же теореме 7.9 используется и другая – классическая – форма интерполяционного многочлена по узлам Чебышева первого рода, которая равносильна (4). Будем далее говорить, что (4) – это разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева первого рода.

Чтобы получить разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева второго рода, применим в (4) тождества [8, с. 23]

$$T_0(x) = U_0(x), \ 2T_1(x) = U_1(x), \ 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \ j \geq 2.$$

Тогда

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x), \tag{5}$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \;\; j = 0, 1, \ldots, n-2, \;\; f_{n-1} = G_{n-1}, \;\; f_n = G_n, \tag{6}$$

$$G_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_j(x_k), \;\; j = 0, 1, \ldots, n; \;\; x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \;\; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Напомним определение класса функций $h(0)$ по Мусхелишвили – функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x = \pm 1$ [9, с. 31]. Говорят, что функция $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1+\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

Приведение уравнения (1) к уравнению Фредгольма

Сведем уравнение (1) к уравнению Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью. Пусть

$$u(x) \triangleq -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt. \tag{7}$$

Применим формулу обращения этого сингулярного интеграла в указанном классе функций:

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}u(t)}{t-x}dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здесь c – произвольная постоянная. Отсюда с учетом (2) получим

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^{x}\Gamma'(\tau)d\tau = \int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{u(t)}{t-\tau}dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x, t)u(t)dt + \mu(x),$$

где

$$H(x, t) = \sqrt{1-t^2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right) = \ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}; \tag{8}$$

$$\mu(x) = c\left(\arcsin x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая, что $H(-1, t) = H(1, t)$, находим $c = 0$.

Наряду с тем что функция $H(x, t)$ симметрична, она также и неотрицательна. В самом деле

$$H(x, t) = H(\cos\theta, \cos\sigma) = \ln\frac{1-\cos(\theta+\sigma)}{2\sin\frac{\theta+\sigma}{2}\left|\sin\frac{\theta-\sigma}{2}\right|} = \ln\frac{\sin\frac{\theta+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\theta-\sigma}{2}\right|} \geq 0, \;\; 0 < \sigma, \;\theta \leq \pi.$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|H(x, t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right)dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x, t)u(t)dt, \tag{9}$$

введем линейный оператор

$$K(u;\,x) \triangleq \frac{\Gamma(x)}{B(x)} = \frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x,\,t)u(t)\,dt. \tag{10}$$

Тогда граничная задача (1), (2) сводится к уравнению

$$u(x) + K(u;\,x) = f(x). \tag{11}$$

Учитывая (8), (10) и применяя в (9) формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x,\,t)u(t)\,dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x},\ \ \Phi'(x) = u(x). \tag{12}$$

Отсюда с учетом теоремы Племеля – Привалова (см., например, [9], с. 58) заключаем, что оператор $K(u;\,x)$ отображает пространство $\mathbb{C}[-1,\,1]$ в себя, если функция $B^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1,\,1]$ или даже $b^{-1}(x) \in \mathbb{C}[-1,\,1]$, где $b(x) = \dfrac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|Ku\|_{\mathbb{C}} \le \rho\|u\|_{\mathbb{C}}, \tag{13}$$

где

$$\rho = \max_{|x|\le 1}\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}\right|. \tag{14}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $B(x)$, *входящая в уравнение (1), удовлетворяет условию*

$$\rho < 1,\ \ \rho = \max_{|x|\le 1}\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|}\right|. \tag{15}$$

Тогда уравнение (11), а вместе с ним и граничная задача (1), (2) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ *при любой* $f(x) \in \mathbb{C}[-1,\,1]$.

Приближенное решение уравнения (1)

На основании (11) и (7) приближенное решение для (1) при условии (2) найдем как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K(u_n;\,x) = F_n(x), \tag{16}$$

где $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен (5) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma_n'(t)}{t-x}\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x), \tag{17}$$

c_k – пока неизвестные постоянные, $k = 0,\,1,\,\ldots,\,n$;

$$K(u_n;\,x) = \frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x,\,t)u_n(t)\,dt; \tag{18}$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1,\,1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos\dfrac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0,\,1,\,\ldots,\,n.$

Очевидно, что для уравнения (16) имеет место аналог теоремы 1, т. е. вследствие (13)–(15) уравнение (16) также разрешимо.

Используя (17) и (3), как и ранее, упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K(u_n;\,x)$:

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x,\,t)u_n(t)\,dt = \sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{1}{k+1}U_k(x), \tag{19}$$

так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x, t)u_n(t)dt = \int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{u_n(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_k(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(-T_{k+1}(\tau)\right)d\tau =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{x}\frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = \sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{1}{k+1}U_k(x).$$

Поэтому из (18) и (19) следует, что

$$K(u_n;\, x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)}\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{1}{k+1}U_k(x). \tag{20}$$

Уравнение (16) с учетом (17), (20) переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)}\frac{1}{k+1}+1\right)U_k(x) = F_n(x). \tag{21}$$

Вычислительные схемы решения задачи (1), (2)

Схема 1. В качестве внешних узлов x выберем узлы Чебышева первого рода, а именно: $x_j = \cos\dfrac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \ldots, n.$ Из (21) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\left(\frac{\sqrt{1-x_j^2}}{B(x_j)}\frac{1}{k+1}+1\right)U_k(x_j) = f(x_j),\ \ j = 0, 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Уравнение (21), а следовательно и система (22), и интегральное уравнение (16) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (16) в (22), в обратном порядке, из (22) получим (16). Значит, система (22) разрешима и имеет единственное решение c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (19).

Схема 2. Рассматривая случай, когда $B(x) = b\sqrt{1-x^2}$, $b = \text{const}$, в уравнении (21) в качестве $F_n(x)$ возьмем интерполяционный многочлен (5). Тогда уравнение (21) переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\left(\frac{1}{b}\frac{1}{k+1}+1\right)U_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k U_k(x). \tag{23}$$

Отсюда следует, что решением (23) являются числа

$$c_k = f_k\left(\frac{1}{b}\frac{1}{k+1}+1\right)^{-1},\ \ k = 0, 1, \ldots, n, \tag{24}$$

где f_k вычисляются в соответствии с (6).

Тогда приближенное решение задачи (1), (2) – функция $\Gamma_n(x)$ – находится согласно (19).

Обоснование сходимости

Порядок аппроксимации можно найти, изучая структурные свойства функции $u(x)$ (см. (7)). Для этого уравнение (11) на основании (12) запишем в виде

$$u(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x} = f(x),\ \ \Phi'(x) = u(x),$$

и отметим, что сингулярный интеграл принадлежит классу $H\left(\frac{1}{2}\right)$. В самом деле

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)-\Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x},$$

а поскольку в окрестности точки $t = 1$

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(1)}{\sqrt{1-t^2}}\in H\left(\frac{1}{2}\right),$$

то по теореме Племеля – Привалова и сингулярный интеграл принадлежит классу $H\left(\frac{1}{2}\right)$ в окрестности точки $x = 1$. Аналогичная ситуация имеет место в окрестности точки $x = -1$. Отсюда вытекает, что если функции $B(x)$ и $f(x)$ из класса $H(\mu)$, $\mu \geq \frac{1}{2}$, то $u(x)\in H\left(\frac{1}{2}\right)$, $-1 \leq x \leq 1$.

Далее рассмотрим следующее (см., например, [10, с. 318]).

Предложение. *Если в качестве узлов интерполирования берутся нули многочлена Чебышева первого рода, т. е. точки* $x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *то для констант Лебега* λ_n *имеет место оценка* $\lambda_n = O(\ln n)$, $n = 2, 3, \ldots$.

Отсюда с учетом (9) и (19) следует, что в любой точке $x\in[-1, 1]$ справедливо

$$\left\|\Gamma(x)-\Gamma_n(x)\right\|_{\mathbb{C}}=\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)\big(u(t)-u_n(t)\big)dt\right\|_{\mathbb{C}}\leq$$

$$\leq\left\|u(x)-u_n(x)\right\|_{\mathbb{C}}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)dt\right\|_{\mathbb{C}}\leq O\big(\ln n\cdot E_n(u)\big).$$

Так как имеет место оценка $E_n(u)=O\left(n^{-\alpha}\right)$, если $u(x)\in H(\alpha)$ на $[-1, 1]$ (см., например, [10], с. 391), то, таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть функции* $B(x)$ *и* $f(x)$, *входящие в уравнение (1), принадлежат классу* $H(\mu)$, $\mu \geq \frac{1}{2}$, *и выполнено условие (15). Тогда система (22) при любом натуральном n разрешима и приближенное решение задачи (1), (2), построенное по формуле (19), сходится к точному со скоростью*

$$\left\|\Gamma(x)-\Gamma_n(x)\right\|_{\mathbb{C}}=O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Численные эксперименты на модельных примерах

В заключение приведем результаты численного эксперимента, выполненного по вычислительной схеме (22) и вычислительной схеме (24) (случай, когда $B(x)=b\sqrt{1-x^2}$, $b = \mathrm{const}$).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt=B(x)\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}\,\mathrm{arcth}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)\right)-\frac{\sqrt{2}}{1+x^2}+1,\ -1<x<1. \qquad (25)$$

1. Пусть $B(x)=\sqrt{1-x^2}\,\frac{1{,}1+4x^2}{1+2x^2}$. Известно, что решением задачи (25), (2) в данном случае является функция $\Gamma(x)=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}\,\mathrm{arcth}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$.

Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *Mathcad 15*, уже при сравнительно небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения уравнения (25).

Точное решение $\Gamma(x)$ системы (22) при $n = 10$ и $n = 34$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, найденного по формуле (19) для ряда точек $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$, не более чем на $5{,}5 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}3 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $\mathrm{cond} \le 25$ и $\mathrm{cond} \le 142$ соответственно.

2. Пусть $B(x) = 6\sqrt{1-x^2}$. Решением задачи (25), (2) и в данном случае является функция $\Gamma(x) =$
$$= \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}\,\operatorname{arcth}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right).$$

При $n = 10$ и $n = 34$ точное решение $\Gamma(x)$ системы (22) отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (19) для точек $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$, не более чем на $5{,}6 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом $\mathrm{cond} \le 26$ и $\mathrm{cond} \le 142$ соответственно.

Найдем c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, по формуле (24). Тогда при $n = 10$ и $n = 34$ точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (19) в системе точек $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$, не более чем на $5{,}6 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}3 \cdot 10^{-15}$ соответственно.

Библиографические ссылки

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilung. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung; 1918. p. 451–470.
2. Голубев ВВ. *Лекции по теории крыла.* Москва: ГИИТЛ; 1949.
3. Каландия АИ. *Математические методы двумерной упругости.* Москва: Наука; 1973.
4. Векуа ИН. О интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. *Прикладная математика и механика.* 1945:9(2);143–150.
5. Габдулхаев БГ. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ.* Казань: Издательство Казанского университета; 1994.
6. Шешко МА, Расолько ГА, Мастяница ВС. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля. *Дифференциальные уравнения.* 1993;29(9):1550–1560.
7. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 2.* Москва: Наука; 1966. 295 с.
8. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* Москва: Наука; 1983.
9. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения.* Москва: Наука; 1968.
10. Суетин ПК. *Классические ортогональные многочлены.* Москва: Наука; 1979.

References

1. Prandtl L. Tragflügeltheorie. I. Mitteilung. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse*. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung; 1918. p. 451–470.
2. Golubev VV. *Lektsii po teorii kryla* [Lectures on the theory of the wing]. Moscow: GIITL; 1949. Russian.
3. Kalandiya AI. *Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti* [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]. Moscow: Nauka; 1973. Russian.
4. Vekua IN. O integro-differentsial'nom uravnenii Prandtlya. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1945:9(2);143–150. Russian.
5. Gabdulkhaev BG. *Pryamye metody resheniya singulyarnykh integral'nykh uravnenii pervogo roda. Chislennyi analiz* [Direct methods for solving singular integral equations of the first kind. Numerical analysis]. Kazan: Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta; 1994. Russian.
6. Sheshko MA, Rasolko GA, Mastyanitsa VS. To the approximate solution of the integro-differential Prandtl equation. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1993;29(9):1550–1560. Russian.
7. Bateman G, Erdei A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2* [Higher transcendental functions. Volume 2]. Moscow: Nauka; 1966. 295 p. Russian.
8. Pashkovsky S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of polynomials and Chebyshev series]. Moscow: Nauka; 1983. Russian.
9. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka; 1968. Russian.
10. Suetin PK. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka; 1979. Russian.

Статья поступила в редколлегию 18.06.2018.
Received by editorial board 18.06.2018.