УДК 517.95

С.П. ХОДОС

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

The existence, uniqueness and continuous dependence theorem of strong solutions of the Cauchy problems for Euler – Poisson – Darboux operator-differential equation with variable domains of discontinuous operator coefficients is proved.

Сингулярные гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка изучались в [1] в случае постоянных областей определения и в [2] в случае переменных областей определения гладких неограниченных операторных коэффициентов. Впервые несингулярные гиперболические дифференциально-операторные уравнения с переменными областями определения разрывных операторных коэффициентов были исследованы в [3, 4]. Целью настоящей работы является доказательство существования, единственности и непрерывной зависимости от правой части уравнения сильных решений задачи Коши для сингулярного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка типа Эйлера – Пуассона – Дарбу с переменными областями определения разрывных неограниченных операторных коэффициентов.

1. Постановка задачи Коши. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. На ограниченном интервале $]0,T[$ решается задача Коши для сингулярного гиперболического дифференциально-операторного уравнения

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{B(t)}{t}\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in]0,T[, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{du}{dt}\bigg|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где f и u – абстрактные функции переменной t со значениями в H, $A(t)$ и $B(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и $D(B(t))$ соответственно.

Пусть операторы $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. При каждом $t \in [0,T]$ самосопряженные операторы $A(t)$ положительно определены в H, т.е.

$$(A(t)u,u) \geq c_0 |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad c_0 > 0.$$

II. При каждом $t \in [0,T]$ выполняются неравенства

$$|B(t)u| \leq c_1 \left|A^{1/2}(t)u\right|^2 \quad \forall u \in D(A^{1/2}(t)), \quad c_1 > 0, \tag{3}$$

$$|\mathrm{Re}(B(t)u,u)| \leq c_2 t |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \tag{4}$$

$$-\mathrm{Re}(B(t)u, A(t)u) \leq c_3 t (A(t)u,u) \quad \forall u \in D(A(t)),$$

где операторы $A^{1/2}(t)$ с областью определения $D(A^{1/2}(t))$ – квадратный корень операторов $A(t)$ в H, $c_i \geq 0, i = 2, 3.$

III. Интервал $[0,T[$ разбит на взаимно непересекающиеся интервалы $I_k = [t_k, t_{k+1}[, \quad k = \overline{0,K}$, $(t_0 = 0, \quad t_{K+1} = T)$ так, что на каждом частичном интервале I_k обратные операторы $A^{-1}(t)$ сильно непрерывны по t в H и имеют в H сильные производные по t [5] $d^i A^{-1}(t) / dt^i \in L_\infty(I_k, \mathcal{L}(H)), i = 1,2,$ такие, что при почти всех $t \in I_k$ ограничены операторы $B(t)(dA^{-1}(t)/dt) \in \mathcal{B}(I_k, \mathcal{L}(H))$ и

$$\left|((dA^{-1}(t) / dt)g, g)\right| \leq c_4 (A^{-1}(t)g, g) \quad \forall g \in H, \tag{5}$$

$$\left|(B(t)(dA^{-1}(t)/dt)g, h)\right| \leq c_5 t |g| (A^{-1}(t)h, h)^{1/2},$$

$$\left|((d^2 A^{-1}(t)/dt^2)g, h)\right| \leq c_6 |g| (A^{-1}(t)h, h)^{1/2} \quad \forall g, h \in H,$$

где $\mathcal{B}(I_k, \mathcal{L}(H))$ – банахово пространство всех операторно-значных функций, при всех $t \in I_k$ ограниченных в пространстве линейных непрерывных операторов, действующих в H, $c_i \geq 0$, $i = \overline{4,6}$.

IV. Если разбиение $\{I_k\}, k = \overline{0,K}$, состоит из двух и более интервалов, то в общей точке t_k каждых двух соседних интервалов I_{k-1} и I_k выполняется вложение $W(t_k - 0) \subset W(t_k)$, пересечение $D(A(t_k - 0)) \cap D(A(t_k))$ плотно в $W(t_k - 0)$ и верна оценка

$$|u|^2_{(t_k)} \leq c_7 |u|^2_{(t_k - 0)} \quad \forall u \in W(t_k - 0), \quad c_7 > 0, \ k = \overline{1,K}, \tag{6}$$

где гильбертовы пространства $W(t)$ – множества $D(A^{1/2}(t))$, наделенные эрмитовыми нормами $|u|_{(t)} = \left|A^{1/2}(t)u\right|$, и $A^{1/2}(t_k - 0)$ – квадратный корень сопряженных положительно определенных операторов $A(t_k - 0)$, полученных продолжением слева операторов $A(t)$ в точки не гладкости и разрывов t_k.

Существование самосопряженных положительно определенных продолжений слева $A(t_k - 0)$, $k = \overline{1,K}$, операторов $A(t)$ следует из условия III. Сильно непрерывные по t на интервале I_{k-1} в H операторы $A^{-1}(t)$ по непрерывности очевидно продолжаются слева в точки t_k. Поэтому по определению для каждого $g \in H$ полагаем, что $\tilde{u}(t_k)$ принадлежит области определения $D(A(t_k - 0))$ оператора $A(t_k - 0)$ и его значение $g \equiv A(t_k - 0)\tilde{u}(t_k)$, когда $u(t) = A^{-1}(t)g \to \tilde{u}(t_k)$ в H при $t \to t_k$, $t < t_k$. Поскольку по данному определению для каждого $\tilde{u}(t_k) \in D(A(t_k - 0))$ существуют $u(t) \in D(A(t))$, $u(t) = A^{-1}(t)g \to \tilde{u}(t_k)$ в H и $A(t)u(t) = g \to g$ в H при $t \to t_k$, $t < t_k$, то из симметричности и положительной определенности операторов $A(t)$ предельным переходом выводится самосопряженность и положительная определенность их продолжений $A(t_k - 0)$, так как по построению множества их значений $R(A(t_k - 0))$ совпадают с пространством H, $k = \overline{1,K}$.

2. Определение сильных решений. За пространство сильных решений задачи Коши (1), (2) возьмем банахово пространство E, полученное замыканием множества

$$D(L(t)) = \{u(t) \in \mathcal{H} = L_2(]0,T[,H) : u(t) \in D(A(t)),\ du(t)/dt \in D(B(t)),\ t \in [0,T];$$
$$du(t)/dt, d^2u(t)/dt^2,\ (B(t)/t)(du(t)/dt),\ A(t)u(t) \in \mathcal{H}\}$$

по норме $\|u\|_E = \left[\sup\limits_{0<t<T}\left(|du(t)/dt|^2 + \left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right)\right]^{1/2}$. Пространством правых частей $f(t)$ уравнения (1) будет гильбертово пространство $F = \mathcal{H}$ с эрмитовой нормой $\|f\|_F = \left(\int_0^T |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$.

Задаче Коши (1), (2) соответствует линейный неограниченный оператор $L(t) : E \supset D(L(t)) \to F$ с плотной областью определения $D(L(t))$. Можно доказать, что если операторы $A(t)$ самосопряжены и положительно определены в H и множество $\tilde{D}(L(t)) = \{v \in D(L(t)) : v(t) \in D(B^*(t)),\ t \in [0,T];$ $(B^*(t)v)/t \in \mathcal{H}\}$, где $B^*(t) : H \supset D(B^*(t)) \to H$ – сопряженный к оператору $B(t) : H \supset D(B(t)) \to H$, плотно в $\mathcal{H}$, то оператор $L(t)$ допускает сильное замыкание $\bar{L}(t) : E \supset D(\bar{L}(t)) \to F$.

Определение. Решения $u \in D(\bar{L}(t))$ операторного уравнения $\bar{L}(t)u = f$, $f \in F$, называются сильными решениями задачи Коши (1), (2).

3. Существование и единственность сильных решений. Докажем корректную разрешимость в сильном смысле задачи Коши (1), (2).

Теорема 1. *Если выполняются условия I–IV и множество $\tilde{D}(L(t))$ плотно в $\mathcal{H}$, то для задачи Коши (1), (2) при каждой $f \in \mathcal{H}$ существует единственное сильное решение $u \in E$, удовлетворяющее энергетическому неравенству*

$$\|u\|_E^2 \le c_8 \|f\|_F^2, \quad c_8 = (1 + \max\{1, c_7\})^K \cdot \exp(\max\{2c_2 + 1, c_4\}T). \tag{7}$$

Доказательство. На каждом интервале I_k в гильбертовом пространстве H абстрактные сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}, \varepsilon > 0,$ со значениями в $D(A(t))$ обладают следующими свойствами [6]:

а) в H равномерно по $t \in I_k$ $A_\varepsilon^{-1}(t)g \to g$ $\forall g \in H$ при $\varepsilon \to 0$;

б) в H существует сильная производная $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}(I_k, \mathcal{L}(H))$.

При выводе энергетического неравенства (7) неограниченные и недифференцируемые операторы $A(t)$ аппроксимируются ограниченными операторами $A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon > 0,$ которые в H сильно дифференцируемы по $t \in I_k$ и

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \quad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

На первом интервале I_0 интегрируем по частям один раз по t от t_0 до τ, $t_0 < \tau \le t_1$, используем самосопряженность операторов $A(t)$ и формулу (8), в полученном равенстве переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ и с помощью свойств а) и б) операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ получаем тождество

$$\left(A(t)u, u\right)\big|_{t=\tau} = 2\,\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left(A(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt + e^{c(\tau-t)}\left(A(t)u, u\right)\big|_{t=t_0} -$$
$$-\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left[\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)u, A(t)u\right) + c(A(t)u, u)\right]dt, \quad \forall u \in D(L_0(t)), \forall\, c \ge 0,$$

где области $D(L_k(t))$ получаются из области $D(L(t))$ заменой интервала $]0,T[$ на интервалы I_k, $k = \overline{0,K}$. В этом тождестве в последнем интеграле применяем оценку (5) и имеем неравенство

$$\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\Big|_{t=\tau} \le 2\,\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left(A(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt +$$
$$+e^{c(\tau-t_0)}\left|A^{1/2}(t_0)u(t_0)\right|^2 + (c_4 - c)\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt \ \ \forall u \in D(L_0(t)). \tag{9}$$

Интегрируя по частям один раз по t от t_0 до τ, $t_0 < \tau \le t_1$, находим тождество

$$2\,\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left(\frac{d^2u}{dt^2},\frac{du}{dt}\right)dt = e^{c(\tau-t)}\left|\frac{du}{dt}\right|^2\Bigg|_{t=t_0}^{t=\tau} + c\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \quad \forall u\in D(L_0(t)),$$

почленная сумма которого с неравенством (9) приводит к неравенству

$$\left[\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right]\Bigg|_{t=\tau} \le 2\,\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left(\frac{d^2u}{dt^2}+A(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt - c\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt +$$

$$+(c_4-c)\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt + e^{c(\tau-t_0)}\left[\left|\frac{du(t_0)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t_0)u(t_0)\right|^2\right].$$

Отсюда в силу оценки (4) при всех $c \ge c_4$ находим неравенство

$$\left[\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right]\Bigg|_{t=\tau} \le 2\,\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left(\mathcal{L}(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt +$$

$$+(2c_2-c)\int_{t_0}^{\tau} e^{c(\tau-t)}\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt + e^{c(\tau-t_0)}\left[\left|\frac{du(t_0)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t_0)u(t_0)\right|^2\right] \quad \forall u\in D(L_0(t)).$$

В этом неравенстве применяем неравенство Коши – Буняковского и элементарные оценки, берем точную верхнюю грань по τ от t_0 до t_1 и при $c = c_9 = \max\{2c_2+1, c_4\}$ получаем неравенство

$$\sup_{t_0<t<t_1}\left(\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right) \le e^{c_9(t_1-t_0)}\int_{t_0}^{t_1}\left|\mathcal{L}(t)u\right|^2 dt + e^{c_9(t_1-t_0)}\left[\left|\frac{du(t_0)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t_0)u(t_0)\right|^2\right] \quad \forall u\in D(L_0(t)). \quad (10)$$

В силу работы [2] при предположениях теоремы 1 для каждой функции $f\in\mathcal{H}_0 = L_2(I_0,H)$, где $\mathcal{H}_k = L_2(I_k,H)$, существует единственное сильное решение $u_0\in E_0$ задачи Коши для уравнения (1) на интервале I_0 при начальных условиях (2), где банаховы пространства E_k – замыкания множеств $D(L_k(t))$ по нормам, определяемым левой частью неравенства (10) с sup по интервалу I_k вместо I_0, $k=\overline{0,K}$. По определению сильного решения существует такая последовательность $u_n^{(0)}\in D(L_0(t))$, что $u_n^{(0)}\to u_0$ в E_0, $\mathcal{L}(t)u_n^{(0)}\to f$ в $\mathcal{H}_0$, $u_n^{(0)}(0)\to 0$ в $W(0)$ и $du_n^{(0)}(0)/dt\to 0$ в H при $n\to\infty$.

На втором интервале I_1 аналогично предыдущему выводится неравенство

$$\sup_{t_1<t<t_2}\left(\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right) \le e^{c_9(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left|\mathcal{L}(t)u\right|^2 dt + e^{c_9(t_2-t_1)}\left[\left|\frac{du(t_1)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t_1)u(t_1)\right|^2\right] \quad \forall u\in D(L_1(t)). \quad (11)$$

В силу работы [2] при предположениях теоремы 1 для каждой функции $f\in\mathcal{H}_1$ существует единственное сильное решение $u_1\in E_1$ задачи Коши для уравнения (1) на интервале I_1 при начальных условиях

$$u\big|_{t=t_1} = u_0(t_1-0)\in W(t_1-0),\quad du/dt\big|_{t=t_1} = du_0(t_1-0)/dt\in H. \quad (12)$$

Согласно оценке (6) первое начальное данное $u_0(t_1-0)$ принадлежит пространству $W(t_1)$.

Ввиду того что $f\in\mathcal{H}_0\cap\mathcal{H}_1$ для $f\in\mathcal{H}$, сложим почленно неравенства (10) и (11), воспользуемся оценкой (6) и будем иметь неравенство

$$\sup_{t_0<t<t_2}\left(\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right) \le e^{c_9(t_1-t_0)}\int_{t_0}^{t_1}\left|\mathcal{L}(t)u\right|^2 dt + e^{c_9(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left|\mathcal{L}(t)u\right|^2 dt +$$

$$+e^{c_9(t_2-t_1)}\left[\left|\frac{du(t_1-0)}{dt}\right|^2 + c_7\left|A^{1/2}(t_1-0)u(t_1-0)\right|^2\right].$$

Последнее слагаемое правой части данного неравенства благодаря начальным условиям (12) оценим сверху правой частью неравенства (10), используем элементарные оценки и получим неравенство

$$\sup_{t_0<t<t_2}\left(\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right) \le (1+c_{10})e^{c_9(t_2-t_0)}\int_{t_0}^{t_2}\left|\mathcal{L}(t)u\right|^2 dt \quad \forall u\in D(L_{0,2}(t)),\ c_{10} = \max\{1,c_7\}. \quad (13)$$

Функция $u_{0,2} = u_k$ на I_k, $k = 0,1$, будет сильным решением задачи Коши для уравнения (1) на интервале $[t_0, t_2[$ при начальных условиях (2), если указать такую последовательность $u_n^{(0,2)} \in D(L_{0,2}(t))$, что $u_n^{(0,2)} \to u_{0,2}$ в $E_{0,2}$, $\mathcal{L}(t)u_n^{(0,2)} \to f$ в $L_2(]t_0, t_2[, H)$, $u_n^{(0,2)}(0) \to 0$ в $W(0)$ и $du_n^{(0,2)}(0)/dt \to 0$ в H при $n \to \infty$, где области $D(L_{i,j}(t))$ получаются из области $D(L(t))$ заменой интервала $]0,T[$ на интервалы $]t_i, t_j[$ и банаховы пространства $E_{i,j}$ – замыкания множеств $D(L_{i,j}(t))$ по нормам, определяемым левой частью неравенства (13) с sup по интервалу $]t_i, t_j[$ вместо интервала $]t_0, t_2[$, $0 \le i < j \le K$. Используя неравенства (4) и (5), можно вывести неравенство

$$\sup_{t_1/3<t<t_1}\left(\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u(t)\right|^2\right) \le e^{2c_9t_1/3}\int_{t_1/3}^{t_1}\left|\mathcal{L}(t)u\right|^2 dt + \\ +e^{2c_9t_1/3}\left[\left|\frac{du(t_1-0)}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t_1-0)u(t_1-0)\right|^2\right] \quad \forall u \in D(\tilde{L}_0(t)). \tag{14}$$

Функция u_0 является единственным сильным решением задачи Коши с обратным течением времени на $\tilde{I}_0 = [t_1/3, t_1[$ для $f \in \tilde{\mathcal{H}}_0 = L_2(\tilde{I}_0, H)$ при начальных условиях (12). В силу плотности множества $L_2(\tilde{I}_0, W(t))$ в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_0$, $\exists f_n \in L_2(\tilde{I}_0, W(t))$, что $\tilde{f}_n \to f$ в $\tilde{\mathcal{H}}_0$, и в силу условия IV $\exists\, \tilde{u}_n^{(0)}(t_1-0) \in D(A(t_1-0)) \cap D(A(t_1))$, $d\tilde{u}_n^{(0)}(t_1-0)/dt \in H$, сходящиеся соответственно к $u_0(t_1-0)$ в $W(t_1-0)$ и к $du_0(t_1-0)/dt$ в H при $n \to \infty$. По теореме 3 гладкости из работы [7] для этих $\tilde{f}_n, \tilde{u}_n^{(0)}(t_1-0), d\tilde{u}_n^{(0)}(t_1-0)/dt$ существуют сильные решения $\tilde{u}_n^{(0)} \in D(\tilde{L}_0(t))$ задачи Коши для уравнения (1) с обратным течением времени на $\tilde{I}_0$. Из неравенства (14) видно, что $\tilde{u}_n^{(0)} \to u_0$ в $\tilde{E}_0$ при $n \to \infty$, когда $\tilde{f}_n \to f$ в $\tilde{\mathcal{H}}_0$, $\tilde{u}_n^{(0)}(t_1-0) \to u_0(t_1-0)$ в $W(t_1-0)$ и $d\tilde{u}_n^{(0)}(t_1-0)/dt \to du_0(t_1-0)/dt$ в H при $n \to \infty$, где области $D(\tilde{L}_0(t))$ получаются из области $D(L(t))$ заменой интервала $]0,T[$ на интервал $\tilde{I}_0$ и банахово пространство $\tilde{E}_0$ – замыкание множества $D(\tilde{L}_0(t))$ по норме, определяемой левой частью неравенства (14).

Тогда последовательность $u_n^{(0,1)} = q_n^- u_n^{(0)} + q_n^+ \tilde{u}_n^{(0)}$ принадлежит $D(L_0(t))$ при всех достаточно больших n, где в разбиении единицы $q_n^-(t) + q_n^+(t) = 1, \forall t \in [t_0, t_1]$, функция

$$q_n^-(t) = \begin{cases} 1, \quad t_0 \le t \le \overline{t} = t_1/2, \\ 1 - n(t-\overline{t})^2/2, \quad \overline{t} \le t \le \overline{t} + 1/\sqrt{n}, \\ n(t - \overline{t} - 2/\sqrt{n})^2/2, \quad \overline{t} + 1/\sqrt{n} \le t \le \overline{t} + 2/\sqrt{n}, \\ 0, \quad \overline{t} + 2/\sqrt{n} \le t \le t_1. \end{cases} \tag{15}$$

С помощью неравенства (3) выводится оценка

$$\left(\int_{t_0}^{t_1}\left|\mathcal{L}(t)u_n^{(0,1)} - f\right|^2 dt\right)^{1/2} \le \left(\int_{t_0}^{t_1}\left|\mathcal{L}(t)u_n^{(0)} - f\right|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{t_1/3}^{t_1}\left|\mathcal{L}(t)\tilde{u}_n^{(0)} - f\right|^2 dt\right)^{1/2} + \\ +2\sqrt{n}\left(\left(\int_{\overline{t}}^{\overline{t}+2/\sqrt{n}}\left|\frac{du_n^{(0)}}{dt} - \frac{du_0}{dt}\right|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{\overline{t}}^{\overline{t}+2/\sqrt{n}}\left|\frac{d\tilde{u}_n^{(0)}}{dt} - \frac{du_0}{dt}\right|^2 dt\right)^{1/2}\right) + \\ +n\left(\left(\int_{\overline{t}}^{\overline{t}+2/\sqrt{n}}\left|u_n^{(0)} - u_0\right|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{\overline{t}}^{\overline{t}+2/\sqrt{n}}\left|\tilde{u}_n^{(0)} - u_0\right|^2 dt\right)^{1/2}\right) + \\ +\frac{c_1\sqrt{n}}{\overline{t}}\left(\left(\int_{\overline{t}}^{\overline{t}+2/\sqrt{n}}\left|u_n^{(0)} - u_0\right|_{(t)}^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{\overline{t}}^{\overline{t}+2/\sqrt{n}}\left|\tilde{u}_n^{(0)} - u_0\right|_{(t)}^2 dt\right)^{1/2}\right), \tag{16}$$

из которой видно, что $\mathcal{L}(t)u_n^{(0,1)} \to f$ в $\mathcal{H}_0$ при $n \to \infty$, так как $\mathcal{L}(t)u_n^{(0)} \to f$ в $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{L}(t)\tilde{u}_n^{(0)} \to f$ в $\tilde{\mathcal{H}}_0$ при $n \to \infty$, последовательности $u_n^{(0)}$ и $\tilde{u}_n^{(0)}$ заранее можно выбрать такими, чтобы $\left\|u_n^{(0)} - u_0\right\|_{E_0}^2$, $\left\|\tilde{u}_n^{(0)} - u_0\right\|_{\tilde{E}_0}^2 \le 1/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда из неравенства (10) следует, что $u_n^{(0,1)} \to u_0$ в E_0 при $n \to \infty$. Применяя теорему 3 гладкости из работы [7] к задаче Коши на I_1 для $f_n \in L_2(I_1, W(t))$, $u_n^{(1,1)}(t_1) = \tilde{u}_n^{(0)}(t_1 - 0)$ и $du_n^{(1,1)}(t_1)/dt = d\tilde{u}_n^{(0)}(t_1 - 0)/dt$, заключаем, что существуют сильные решения $u_n^{(1,1)} \in D(L_1(t))$. Из неравенства (11) видно, что $u_n^{(1,1)} \to u_1$ в E_1, когда $f_n \to f$ в $\mathcal{H}_1$, $u_n^{(1,1)}(t_1) \to u_1(t_1)$ в $W(t_1)$ в силу неравенства (6) и $du_n^{(1,1)}(t_1)/dt = du_1(t_1)/dt$ в H при $n \to \infty$. Поэтому возьмем $u_n^{(0,2)} = u_n^{(k,1)}$ на I_k, $k = 0,1$, так как из неравенства (13) следует, что $u_n^{(0,2)} \to u_{0,2}$ в $E_{0,2}$, когда $\mathcal{L}(t)u_n^{(0,2)} \to f$ в $L_2(]t_0, t_2[, H)$, $u_n^{(0,2)}(0) \to 0$ в $W(0)$ и $du_n^{(0,2)}(0)/dt \to 0$ в H при $n \to \infty$.

Согласно работе [2] в предположениях теоремы 1 для каждой функции $f \in \mathcal{H}_2$ существует единственное сильное решение $u_2 \in E_2$ задачи Коши для уравнения (1) на интервале I_2 при начальных условиях

$$u\Big|_{t=t_2} = u_1(t_2 - 0) \in W(t_2 - 0) \subset W(t_2), \;\; du/dt\Big|_{t=t_2} = du_1(t_2 - 0)/dt \in H.$$

Аналогично неравенству (13) выводится энергетическое неравенство

$$\sup_{t_0 < t < t_3} \left(\left| \frac{du(t)}{dt} \right|^2 + \left| A^{1/2}(t)u(t) \right|^2 \right) \le (1 + c_{10})^2 e^{c_9(t_3 - t_0)} \int_{t_0}^{t_3} \left| \mathcal{L}(t)u \right|^2 dt \quad \forall u \in D(L_{0,3}(t)). \tag{17}$$

Функция $u_{0,3} = u_k$ на I_k, $k = \overline{0,2}$, будет сильным решением задачи Коши для уравнения (1) на интервале $[t_0, t_3[$ при начальных условиях (2), если указать такую последовательность $u_n^{(0,3)} \in D(L_{0,3}(t))$, что $u_n^{(0,3)} \to u_{0,3}$ в $E_{0,3}$, $\mathcal{L}(t)u_n^{(0,3)} \to f$ в $L_2(]t_0, t_3[, H)$, $u_n^{(0,3)}(0) \to 0$ в $W(0)$ и $du_n^{(0,3)}(0)/dt \to 0$ в H при $n \to \infty$. Повторив рассуждения предыдущего абзаца для интервалов I_1 и I_2 вместо интервалов I_0 и I_1, построим такие $u_n^{(1,3)} \in D(L_{1,3}(t))$, что $u_n^{(1,3)} \to u_{0,3}$ в $E_{1,3}$, $\mathcal{L}_{1,3}(t)u_n^{(1,3)} \to f$ в $\mathcal{H}_{1,3}$, $u_n^{(1,3)}(t_1) \to u_1(t_1)$ в $W(t_1)$ и $du_n^{(1,3)}(t_1)/dt \to du_1(t_1)$ в H при $n \to \infty$. Тогда при всех достаточно больших n последовательность $u_n^{(0,3)} = q_n^- u_n^{(0,2)} + q_n^+ u_n^{(1,3)}$, где $q_n^-(t) + q_n^+(t) = 1, t \in [t_0, t_3]$, и срезающие функции $q_n^-(t)$ определяются формулой, аналогичной формуле (15) при $\overline{t} = \overline{t_0} = t_1 + (t_2 - t_1)/2$, принадлежит области $D(L_{0,3}(t))$. Из неравенства (17) и оценки, аналогичной оценке (16), так же как и выше, доказывается, что слабое решение $u_{0,3}$, склеенное из сильных решений u_k, $k = \overline{0,2}$, действительно является сильным решением для задачи Коши для уравнения (1) на интервале $[t_0, t_3]$ при начальных условиях (2) и т. д.

За конечное число шагов для каждой функции $f \in \mathcal{H}$ построим склеенное единственное сильное решение $u_{0,K+1} = u_k \in E_k$ на I_k, $k = \overline{0,K}$, исходной задачи Коши (1), (2) на всем интервале $[0,T]$ и это решение будет удовлетворять энергетическому неравенству (7) при $c_8 = (1 + c_{10})^K e^{c_9 T}$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Можно доказать, что если в предположениях теоремы 1 условие IV не выполняется и неравенства (4), (5) выполняются только со знаком минус вместо знака абсолютной величины, то для каждой функции $f \in \mathcal{H}$ задача Коши (1), (2) имеет единственное (глобальное) слабое решение $u_{0,K+1} \in \mathcal{H}$, склеенное из (локальных) сильных решений $u_k \in E_k, k = \overline{0,K}$. Если же в этом случае условие IV выполняется, то это слабое решение $u_{0,K+1}$ удовлетворяет энергетическому неравенству (7), в котором банахово пространство E – множество всех функций $u \in \mathcal{H}$, имеющих первую производную $du/dt \in \mathcal{H}$ и конечную норму $\|u\|_E < +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф09К-019).

1. Гаврилова Н.В., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 789.
2. Ходос С.П. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 57.

3. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1394.
4. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 3. С. 37.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
6. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.
7. Ломовцев Ф.Е. // Там же. 2001. Т. 37. № 2. С. 276.

Поступила в редакцию 19.11.09.

Светлана Петровна Ходос – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики Ф.Е. Ломовцев.