

**Белорусский государственный университет**

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе  
Белорусского государственного университета



А.Л. Толстик

(подпись)

(дата утверждения)

Регистрационный № УД- 145 /уч.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ**

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности

**1-31 04 01 Физика (по направлениям),**

**направлению специальности**

**1-31 04 01-01 Физика (научно-исследовательская деятельность);**

Минск 2015 г.

Учебная программа составлена на основе Образовательного стандарта ОСВО 1-31 04 01-2013, утвержденного и введенного в действие постановлением Министерства образования Республики Беларусь от 30.08. 2013 № 88; учебных планов №G31-163/уч., №G31и-174/уч., утвержденных 30.05.2013.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

**Я.М. Шнир** — профессор кафедры теоретической физики и астрофизики Белорусского государственного университета, доктор физико–математических наук, профессор.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой теоретической физики и астрофизики Белорусского государственного университета (протокол № 10 от 23.05.2016 г.);

Советом физического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 10 от 09.06.2016);

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дифференциальная геометрия и топология представляют собой два смежных раздела математики, лежащих в основе ряда фундаментальных разделов современной теоретической физики: электродинамики, классической и квантовой теории калибровочных полей, физики конденсированного состояния, теории струн и суперструн, физике нелинейных процессов.

Задачей данного раздела является подготовка студентов, специализирующихся в области теоретической физики, к самостоятельной исследовательской работе с использованием современных математических методов дифференциальной геометрии и топологии.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные идеи и современные представления дифференциальной геометрии и топологии и связанных с ними концепции;

уметь:

- применять основные представления и математический аппарат современной геометрии и топологии для решения конкретных задач в различных областях современной теоретической физики;

владеть:

- понятийным аппаратом и базисными методами дифференциальной геометрии и топологии.

Курс дифференциальной геометрии и топологии логически связан с читаемыми на 3-м году обучения спецкурсами кафедры теоретической физики и астрофизики "Теория непрерывных групп", "Общая теория относительности", "Тензорный и спинорный анализ" и предполагает знакомство с основами математического анализа, аналитической геометрии, векторного и тензорного анализа, а также является необходимым при последующем изучении классической теории поля, суперсимметричных полевых теорий и физики элементарных частиц. Помимо сообщения основных сведений из дифференциальной геометрии и топологии, программой предусмотрено развернутое изложение теории гомотопических групп,

Общее количество часов, отводимое на изучение учебной дисциплины — 60, из них количество аудиторных часов — 36.

Форма получения высшего образования — очная, дневная,

Аудиторные занятия проводятся в виде лекционных и семинарских занятий. На проведение лекционных занятий отводится 30 часов, семинарских — 6 часов.

Занятия проводятся на 3-м курсе в 6-м семестре.

Формы текущей аттестации по учебной дисциплине — зачет.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

**1. Пространственная геометрия.**

*Евклидово пространство.*

Системы координат. Замена координат. Евклидово пространство  $E_n$ . Кривые. Квадратичные формы. Векторы и ковекторы. Простейшие группы преобразований области

*Римановы и псевдоримановы пространства.*

Римановы и псевдоримановы пространства. Простейшие понятия специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Поверхности. Координаты на поверхности. Касательная плоскость. Метрика на поверхности.

**2. Топологические пространства и дифференцируемые многообразия.**

*Дифференцируемые многообразия.*

Определение гладкого многообразия. Примеры многообразий (элементарные многообразия, поверхности в евклидовом пространстве, группы преобразований как многообразия).

*Топологические пространства, отображения многообразий.*

Субмерсии и иммерсии. Подмногообразия. Касательные и кокасательные пространства. Дифференциал отображения. Примеры вычисления касательных и кокасательных пространств. Элементы комплексной геометрии.

**3. Дифференциальные формы.**

*Внешние формы и внешнее умножение.*

Внешний дифференциал формы. Интегрирование дифференциальных форм. Поверхности и дифференциальные формы, форма объёма, дифференциальные формы в присутствии метрики. Оператор Лапласа. Операция дуальности Ходжа.

*Формула Стокса. и элементы теории когомологий.*

Формула Стокса в евклидовом пространстве  $E_3$ . Замкнутые формы, циклы, коциклы, гомологии, когомологии, теорема де Рама. Ковариантное дифференцирование (связность).

**4. Векторные поля и группы диффеоморфизмов.**

Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Связь с векторными полями и обыкновенными дифференциальными уравнениями.

*Производная Ли.*

Производная по направлению векторного поля. Семейства векторных полей. Коммутаторы и алгебры Ли. Индекс векторного поля. Теорема Хопфа–Пуанкаре.

**5. Элементы теории гомотопических групп.**

Гомотопические группы топологических пространств. Фундаментальная группа. вычисление гомотопических групп сфер. Гомотопические классы.

**6. Расслоенные пространства.**

Слой и база. Связность в расслоении. Расслоение Хопфа.

### УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы                                        | Количество аудиторных часов |                      |                     |                      |      | Количество часов УСР | Литература                   | Формы контроля знаний   |
|---------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|------|----------------------|------------------------------|-------------------------|
|                     |                                                               | Лекции                      | Практические занятия | Семинарские занятия | Лабораторные занятия | Иное |                      |                              |                         |
| 1                   | 2                                                             | 3                           | 4                    | 5                   | 6                    | 7    | 8                    | 9                            | 10                      |
| 1                   | Пространственная геометрия.                                   | 6                           |                      | 1                   |                      |      |                      | [1], [2], [3], [6], [8], [9] |                         |
| 2                   | Топологические пространства и дифференцируемые многообразия.  | 6                           |                      | 1                   |                      |      |                      | [1] [2] [3] [4] [6] [7] [9]  |                         |
|                     | Текущий контроль успеваемости студентов по разделам № 1 и № 2 |                             |                      | 1                   |                      |      |                      |                              | Письменное тестирование |
| 3                   | Дифференциальные формы                                        | 6                           |                      | 1                   |                      |      |                      | [1] [2] [4] [8]              |                         |
| 4                   | Векторные поля и группы диффеоморфизмов                       | 4                           |                      | 1                   |                      |      |                      | [1] [2][3] [7] [9]           |                         |
|                     | Текущий контроль успеваемости студентов по разделу № 3 и № 4  |                             |                      | 1                   |                      |      |                      |                              | Коллоквиум              |
| 5                   | Элементы теории гомотопических групп                          | 4                           |                      | 1                   |                      |      |                      | [1] [5][7] [8]               |                         |
|                     | Текущий контроль успеваемости студентов по разделу № 5        |                             |                      | 1                   |                      |      |                      |                              |                         |
| 6                   | Расслоенные пространства                                      | 4                           |                      | 1                   |                      |      |                      | [1] [5][8] [9]               |                         |

|  |                                                              |    |  |   |  |  |   |  |                 |
|--|--------------------------------------------------------------|----|--|---|--|--|---|--|-----------------|
|  | Текущий контроль успеваемости студентов<br>по разделам № 1-6 |    |  | 1 |  |  |   |  | Коллокви-<br>ум |
|  | Итого                                                        | 30 |  |   |  |  | 6 |  | Зачет           |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Б.Ф.Дубровин, Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. — М.: Наука. 1979.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т.1,2 — М.: Наука, 1981.
3. Nakahara M. Differentialgeometrie, Topologie und Physik. — Springer Spectrum, 2015 (2<sup>nd</sup> ed)
4. Nash C. and Sen S. Topology and Geometry for Physicists. — London: Academic Press, 2015 (3<sup>rd</sup> ed.)

### Перечень дополнительной литературы

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: МГУ. 1980.
2. Pressley A. Elementary Differential Geometry. — Berlin: Springer, 2002.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука. 1974.
4. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. — М.: 1995.
5. Постников М.М. Гладкие многообразия. М.: Наука. 1987.
6. Рашевский. П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука. 1967.
7. Huybrechts D. Complex geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2005

### Перечень используемых средств диагностики результатов учебной деятельности

1. Коллоквиум
2. Тестовые задания

1. Тема коллоквиума № 1: Топологические пространства.

Примерный перечень вопросов:

1. Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве  $E_3$ ;
2. Геометрия поверхности Мебиуса и бутылки Клейна;
3. Симплексы и триангуляция топологических пространств;
4. Внешний дифференциал формы и сопряженный к нему. Оператор Лапласа. Операция дуальности Ходжа.;
5. Теорема Стокса в евклидовом пространстве  $E_3$ ;
6. Расслоение Хопфа как отображение  $S_3 \longrightarrow S_2$ ;

2. Тема коллоквиума №2: Топологические инварианты. Операции с дифференциальными формами.

Примерный перечень вопросов:

1. Гомотопические группы, вычисление индексов отображения;
2. Индекс Пуанкаре-Хопфа, числа Бетти и их вычисление.
3. Внешний дифференциал формы, операции внутреннего и внешнего произведения форм;
4. Операция дуальности Ходжа, сопряженная производная форм и оператор Лапласа.
5. Классическая электродинамика в формализме дифференциальных форм.

### *Темы тестовых заданий*

1. Показать существование изоморфизма между проективным пространством  $CP^3$  и групповым пространством  $SO(3)$ .
2. Определить действие операции дуальности Ходжа на 1-формы и 2-формы в пространствах Евклида и Минковского.
3. Показать что эйлерова характеристика компактной поверхности класса  $g$  равна  $2-2g$
4. Вычислить отображение и функции склейки стереографической проекции  $S_2 \rightarrow R_2$
5. Показать что первая гомотопическая группа тора  $\pi_1(T_2) = Z_2$

### **Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов**

Основой методики организации самостоятельной работы студентов по курсу является предоставление студентам необходимой для работы информации, а также обеспечение регулярных консультаций преподавателя и периодичной отчетности по различным видам учебной и самостоятельной деятельности.

В открытом доступе для студентов размещается следующая информация:

- программа курса с указанием основной и дополнительной литературы;
- учебно-методические материалы для практических занятий;
- график консультаций преподавателя;
- вопросы для проведения зачета;
- сроки проведения контрольных мероприятий по различным видам учебной деятельности:
  - коллоквиумов по изучаемому материалу;

- тестовых заданий;
- для дополнительного развития творческих способностей одаренных студентов организуются:
  - студенческие научно-практические конференций, конкурсы;
  - студенческие олимпиады.

### **Рекомендации по контролю качества усвоения знаний и проведению аттестации**

Для текущего контроля качества усвоения знаний по дисциплине рекомендуется использовать тестовые задания по разделам дисциплины, коллоквиумы, устные опросы. Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов, получивших неудовлетворительные оценки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно.

Коллоквиумы проводятся в письменной форме и включают в себя 5–6 обобщенных заданий. На выполнение коллоквиумов отводится 45 мин. По согласованию с преподавателем разрешается использовать справочные, научные и учебные печатные издания, любые электронные источники информации и конспект лекций (в любой форме). Каждое задание в соответствии с его сложностью оценивается от 3 до 5 баллов (максимальная сумма баллов за все задачи в коллоквиуме равна 10). Количество баллов за каждую выполненную задачу выставляется в зависимости от правильности, полноты и оригинальности ее решения. Нерешенное или решенное полностью неправильно задание оценивается в 0 баллов. Оценка за коллоквиум рассчитывается как сумма баллов, полученных за каждое задание.

Тестовое задание – это задание, которое студент должен выполнить в конце занятия. Оценивается по 10-балльной системе.

Оценка текущей успеваемости рассчитывается как среднее оценок за каждый из письменных видов работ.

Текущая аттестация по учебной дисциплине проводится в форме зачета в 6 семестре.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

| Название дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры                           | Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)    |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Теория непрерывных групп                              | Кафедра теоретической физики и астрофизики | Оставить содержание учебной дисциплины без изменения                                     | Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленной варианте (протокол №10 от 23.05.2016) |
| Общая теория относительности                          | Кафедра теоретической физики и астрофизики | Оставить содержание учебной дисциплины без изменения                                     | Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленной варианте (протокол №10 от 23.05.2016) |
| Тензорный анализ                                      | Кафедра теоретической физики и астрофизики | Оставить содержание учебной дисциплины без изменения                                     | Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленной варианте (протокол №10 от 23.05.2016) |
|                                                       |                                            |                                                                                          |                                                                                                      |
|                                                       |                                            |                                                                                          |                                                                                                      |

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**  
на 2017/2018 учебный год

| №№<br>пп | Дополнения и изменения | Основание |
|----------|------------------------|-----------|
|          |                        |           |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры теоретической физики и астрофизики

(протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2017 г.)

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ И.Д. Феранчук

УТВЕРЖДАЮ  
Декан физического факультета  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ В.М. Анищик

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**  
на 2018/2019 учебный год

| №№<br>пп | Дополнения и изменения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Основание |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|          | <p>Заменить №1 в списке основной литературы книгой:<br/>Дубровин Б.Ф., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. — М.: URSS. 2016 (6 изд).</p> <p>Заменить №2 в списке основной литературы книгой:<br/>Kobayashi S. and Nomizu K., Foundations of differential geometry. — Wiley Classics Library, Wiley Inc., Princeton, NJ, 2016 (5<sup>th</sup> ed)</p> |           |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры теоретической физики и астрофизики

(протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2018 г.)

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ А.Н. Фурс

УТВЕРЖДАЮ  
Декан физического факультета  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ В.М. Анищик