УДК 517.544

А.Б. СЕВРУК

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

The general solution in the class of the limited piecewise analytical functions of Hilbert boundary value problem with an infinite index of the positive corrected order is obtained. The indicator of canonical function of the corresponding homogeneous Riemann problem is discovered. Conditions of resolvability of Riemann and Hilbert homogeneous problems in the class of the limited piecewise analytical functions are given.

В верхней полуплоскости $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$ дан один контур l, состоящий из m уходящих в бесконечность лучей $l_j=\{\arg z=\beta_j\}$, $0<\beta_1<\ldots<\beta_m<\pi$. Требуется найти все ограниченные кусочно-аналитические в D функции $\Phi(z)=u(x,y)+i\nu(x,y)$ с линией скачков l, удовлетворяющие на действительной оси условию однородной задачи Гильберта [1, с. 264]

$$a(t)u(t)+b(t)\upsilon(t)=0,\ \ t\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

а на l – условию краевой задачи Римана [1, с. 106]

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\ \ t\in l. \tag{2}$$

Заданные коэффициенты в линейных соотношениях (1), (2) подчинены условиям

$$\arg\big(a(t)+ib(t)\big)=\pi\lambda_\pm|t|^{\rho(|t|)},\ \ t\in\mathbf{R},\ \ \lambda_\pm\in\mathbf{R}\setminus\{0\},$$

$$G(t)=\exp\Big\{i2\pi\lambda_j|t|^{\rho(|t|)}\Big\},\ \ t\in l_j,\ \ j=\overline{1,m},\ \ \lambda_j\in\mathbf{R}\setminus\{0\}. \tag{3}$$

В соотношениях (3) $\rho(t)$ – уточненный порядок [2, с. 69], т. е. положительная, непрерывно дифференцируемая на $[0,+\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho,\ \ \lim_{r\to\infty}\rho'(r)r\ln r=0.$$

Для упрощения формулировок будем считать, что $\rho(0)=1+\rho$. Это не ограничивает общности, так как не влияет на поведение $\rho(r)$ на бесконечности.

Рассмотрим простейший случай, когда

$$0<\rho<1/2. \tag{4}$$

Сформулированная задача называется краевой задачей Гильберта для кусочно-аналитической функции [1, с. 462]. В силу условий (3) коэффициенты задач Гильберта (1) и Римана (2) имеют бесконечный индекс [3, с. 113] при уточненном порядке $\rho(t)$. Краевая задача (1), (2) с конечным индексом решена методом регуляризующего множителя И.С. Рогожиной [4]. Задача Гильберта (1) с бесконечным индексом исследована методом сведения ее к задаче Римана, предложенным Н.И. Мусхелишвили [5, с. 139–155], И.Е. Сандригайло и П.Ю. Алекна [7], причем в [6] аргумент коэффициента задачи имеет степенную асимптотику в окрестности бесконечно удаленной точки, а в [7] – логарифмическую. Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин [8] и А.Г. Алехно [9] решили задачу Гильберта с указанной асимптотикой аргумента коэффициента методом регуляризующего множителя, разработанным Ф.Д. Гаховым [1, с. 273]. В настоящей работе исследована задача с бесконечным индексом положительного уточненного порядка и построено ее общее решение в классе B ограниченных кусочно-аналитических функций.

Используем метод Н.И. Мусхелишвили сведения задачи Гильберта для полуплоскости к задаче Римана с помощью доопределения по симметрии искомой кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$ в нижней полуплоскости. Указанное доопределение для упрощения исследования асимптотики интеграла типа Коши осуществим по формуле

$$\Phi^{-}(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}, \quad \operatorname{Im} z < 0. \tag{5}$$

Обозначим $L = \mathbf{R} \cup l \cup \bar{l}$, где $\bar{l}$ – контур, симметричный l относительно действительной оси. Тогда совокупность функций $\Phi^{+}(z) = \Phi(z)$, $\Phi^{-}(z)$ можно рассматривать как одну кусочно-аналитическую в комплексной плоскости функцию, удовлетворяющую на контуре L краевому условию задачи Римана

$$\Phi^{+}(t) = \tilde{G}(t)\Phi^{-}(t), \quad t \in L, \tag{6}$$

в котором

$$\tilde{G}(t) = \begin{cases} \dfrac{a(t)+ib(t)}{a(t)-ib(t)}, & t \in \mathbf{R}, \\ G(t), & t \in l, \\ \dfrac{1}{\overline{G(t)}}, & t \in \bar{l}. \end{cases} \tag{7}$$

Следовательно, решение задачи (1), (2) сводится к отысканию функций $\Phi(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$, из решения краевой задачи Римана (6), (7), которые удовлетворяют условию (5).

Из соотношений (3) вытекает, что коэффициент задачи Римана (6) имеет в бесконечно удаленной точке многостороннее завихрение при уточненном порядке $\rho(r)$. Условия разрешимости и общее решение такой задачи при $\rho(r) = \rho$ получены А.Г. Алехно [10].

Каноническую функцию задачи Римана введем по формуле

$$X(z) = \exp\left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \tilde{G}(\tau)\, d\tau}{\tau(\tau - z)} \right\}.$$

Введем обозначения

$$L_0 = \mathbf{R}_+, \; L_{m+1} = \mathbf{R}_-, \; L_j = l_j, \; L_{2m+2-j} = \bar{l}_j, \; j = \overline{1,m},$$

$$\tilde{\beta}_k = \arg z, \; z \in L_k, \; 0 \le \beta_k < 2\pi, \; k = \overline{0, 2m+1},$$

$$\tilde{\lambda}_0 = \lambda_+, \; \tilde{\lambda}_{m+1} = -\lambda_-, \; \tilde{\lambda}_j = \lambda_j, \; \tilde{\lambda}_{2m+2-j} = \lambda_j.$$

Тогда $L = \bigcup_{k=0}^{2m+1} L_j$ и

$$X(z) = \exp\left\{ \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{z}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\ln \tilde{G}(\tau)\, d\tau}{\tau(\tau - z)} \right\} \equiv \prod_{k=0}^{2m+1} X_k(z). \tag{8}$$

Лемма 1. *Каноническая функция обладает следующими свойствами:*

1) $X(z)$ *является не имеющей нулей в конечной части комплексной плоскости кусочно-аналитической функцией, непрерывной вплоть до берегов разреза по* L;

2) $X(z)$ *удовлетворяет краевому условию однородной задачи Римана* (6);

3) *справедливо соотношение*

$$X(z) = \overline{X(\bar{z})}, \quad \operatorname{Im} z < 0; \tag{9}$$

4) $X(0) = 1$.

Утверждение 1) вытекает из свойств интеграла типа Коши [1, с. 77], 2) – из формул Ю.В. Сохоцкого, 3) проверяется непосредственно, 4) очевидно.

Лемма 2. *Пусть* $\rho(r)$ *– уточненный порядок и* $0<\rho<1$. *Тогда справедливо соотношение*

$$t\int_0^\infty \frac{x^{\rho(x)}dx}{x(x-t)} = -\left(\pi\ \mathrm{ctg}\,\rho\pi + o(1)\right)t^{\rho(t)},\ \ t\to+\infty.$$

Лемма установлена И.В. Островским [11].

Лемма 3. *Функции* $X_k(z),\ \ k=\overline{0,\ 2m+1},$ *из формулы (8) имеют в замкнутых угловых областях* $\{\beta_k\le\theta\le\beta_k+2\pi\}$ *вполне регулярный рост* [3, с. 42] *при уточненном порядке* $\rho(r)$, *т. е. существует равномерный относительно* $\theta\in[\beta_k,\beta_k+2\pi]$ *предел*

$$h_{X_k}(\theta)=\lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}\ln\left|X_k(re^{i\theta})\right| = -\frac{\pi\tilde{\lambda}_k}{\sin\rho\pi}\cos(\theta-\beta_k-\pi). \quad (10)$$

Доказательство. Выясним сначала асимптотику функции

$$X_0(z)=\exp\left\{\tilde{\lambda}_0 z\int_0^\infty \frac{x^{\rho(x)}dx}{x(x-z)}\right\}.$$

Для этого запишем ее в виде

$$\ln X_0(z)=\tilde{\lambda}_0 z\left(\int_0^\infty \frac{x^{\rho(r)}dx}{x(x-z)}+\int_0^\infty \frac{x^{\rho(x)}-x^{\rho(r)}dx}{x(x-z)}\right)\equiv\left(I_0+I\right)(z), \quad (11)$$

где $r=|z|$ в показателе степени $\rho(r)$ – фиксированное положительное число. Следовательно, интеграл типа Коши $I_0(z)=\tilde{\lambda}_0 z\int_0^\infty \frac{x^{\rho(r)}dx}{x(x-z)}$ имеет степенную плотность и вычисляется с помощью теории вычетов [2, с. 247]

$$I_0(z)=-\frac{\pi\tilde{\lambda}_0 e^{-i\pi\rho(r)}}{\sin(\pi\rho(r))}z^{\rho(r)},\ \ 0<\arg z<2\pi. \quad (12)$$

Оценим интеграл $I(z)$. Пусть $z=re^{i\theta}$ и фиксируем любое δ такое, что $0<2\delta<\theta<2\pi-2\delta$. Тогда при $x\in\mathbf{R}_+$ будет $|x-z|\ge(x+r)\sin\delta$.

Возьмем любое сколь угодно малое $\varepsilon>0$. Выберем число $\delta_1>0$ такое, что $0<\rho-\delta_1=k_1$ и $0<1-\rho-\delta_1=k_2$. Далее возьмем числа a и b, $0<a<1<b<\infty$ так, чтобы $a^{k_1}<\varepsilon$ и $b^{-k_2}<\varepsilon$.

Тогда в силу свойств уточненного порядка [2, с. 73–74] для указанного $\varepsilon>0$ существует $r(\varepsilon)$ такое, что при $r\ge r(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства:

1) $(1-\varepsilon)(kr)^{\rho(r)}<(kr)^{\rho(kr)}<(1+\varepsilon)(kr)^{\rho(r)}$ при $a\le k\le b$;

2) $\int_1^{ar} t^{\rho(r)-1}dt<\frac{2}{\rho}(ar)^{\rho(ar)}$;

3) $\int_{br}^\infty t^{\rho(r)-2}dt<\frac{2}{1-\rho}(br)^{\rho(r)-1}$;

4) $\rho-\delta_1<\rho(r)<\rho+\delta_1$.

Преобразуем $I(z)$ к виду

$$I(z)=\tilde{\lambda}_0 z\left(\int_0^{ar}\frac{x^{\rho(x)}dx}{x(x-z)}+\int_{b_r}^\infty\frac{x^{\rho(x)}dx}{x(x-z)}-\int_0^{ar}\frac{x^{\rho(r)}dx}{x(x-z)}-\int_{br}^\infty\frac{x^{\rho(r)}dx}{x(x-z)}+\int_{ar}^{br}\frac{\left(x^{\rho(x)}-x^{\rho(r)}\right)dx}{x(x-z)}\right)\equiv\left(I_1+\ldots+I_5\right)(z).$$

Теперь при $r>r(\varepsilon)$ имеем

$$\left|I_1(z)\right|\le\frac{\tilde{\lambda}_0}{\sin\delta}\int_0^{ar}x^{\rho(x)-1}dx<C_1a^{k_1}r^{\rho(r)}<\varepsilon C_1 r^{\rho(r)},$$

$$\left|I_2(z)\right|\le\frac{\tilde{\lambda}_0 r}{\sin\delta}\int_{br}^\infty x^{\rho(x)-2}dx<C_2b^{-k_2}r^{\rho(r)}<\varepsilon C_2 r^{\rho(r)},$$

$$\left|I_3(z)\right| < \frac{\tilde{\lambda}_0}{\sin\delta}\int_0^{ar} x^{\rho(x)-1}dx < C_3 a^{k_1} r^{\rho(r)} < \varepsilon C_3 r^{\rho(r)},$$

$$\left|I_4(z)\right| < \frac{\tilde{\lambda}_0 r}{\sin\delta}\int_{br}^{\infty} x^{\rho(x)-2}dx < C_4 a^{-k_2} r^{\rho(r)} < \varepsilon C_4 r^{\rho(r)},$$

$$\left|I_5(z)\right| \le \frac{\tilde{\lambda}_0}{\sin\delta}\int_{a_r}^{b_r} \frac{|x^{\rho(x)} - x^{\rho(r)}|}{x(x+r)} = \frac{\lambda_0}{\sin\delta}\int_a^b \frac{((\tau r)^{\rho(\tau r)} - (\tau r)^{\rho(r)})d\tau}{\tau(\tau+1)} < \frac{\varepsilon\lambda_0}{\sin\delta}\int_a^b \frac{((\tau r))^{\rho(r)}d\tau}{\tau(\tau+1)} <$$

$$< \frac{\varepsilon\lambda_0 r^{\rho(r)}(1+\varepsilon)}{\sin\delta}\int_0^{\infty}\frac{\tau^{\rho(\tau)-1}d\tau}{\tau+1} < \varepsilon C_5 r^{\rho(r)}.$$

Отсюда получаем, что при $r > r(\varepsilon)$ будет

$$\left|I(z)\right| < \varepsilon C r^{\rho(r)}.$$

Поэтому из (11) следует, что при $\theta \in [2\delta,\ 2\pi - 2\delta]$ справедливо соотношение

$$\ln X_0(re^{i\theta}) = \left(-\frac{\tilde{\lambda}_0 e^{i\rho(r)(\theta-\pi)}}{\sin(\pi\rho(r))} + o(1)\right) r^{\rho(r)}, \quad r \to \infty.$$

Выделив в этом равенстве действительную часть и учитывая, что $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty,$ получаем

$$\ln\left|X_0(re^{i\theta})\right| = \left(-\frac{\tilde{\lambda}_0 \cos\rho(\theta-\pi)}{\sin(\rho\pi)} + o(1)\right) r^{\rho(r)},$$

$$\theta \in [2\delta,\ 2\pi - 2\delta],\ r \to \infty.$$

Значит, при указанных θ индикатор $h_{X_0}(\theta)$ вычисляется по формуле (10).

Изучим теперь поведение граничных значений функции $X_0(z)$ на луче L_0. Применяя формулы Ю.В. Сохоцкого, имеем

$$\ln X_0^{\pm}(t) = \pm i\pi\tilde{\lambda}_0 t^{\rho(t)} + \tilde{\lambda}_0 \int_0^{\infty} \frac{x^{\rho(x)}dx}{x(x-t)}, \quad t \in L_0.$$

Выделив в этом равенстве действительную часть, воспользуемся леммой 2 и значением индикатора $h_{X_0}(\theta)$ из (10), получим

$$h_{X_0}(+0) = h_{X_0}(0) = -\tilde{\lambda}_0\pi\,\mathrm{ctg}\,\rho\pi, \quad h_{X_0}(2\pi) = h_{X_0}(2\pi - 0) = -\tilde{\lambda}_0\pi\,\mathrm{ctg}\,\rho\pi.$$

Эти соотношения означают непрерывность индикатора $h_{X_0}(\theta)$ на концах отрезка $[0,\ 2\pi]$. Отсюда согласно [3, с. 45] вытекает регулярность роста функции $X_0(z)$ в замкнутой угловой области $\{0 \le \arg z \le 2\pi\}$. Сделав поворот комплексной плоскости на угол β_k, получим соотношение (10). Лемма доказана.

Лемма 4. *Каноническая функция $X(z)$ имеет при $\theta \in [0,\ 2\pi]$ индикатор*

$$h_X(\theta) = \frac{\pi}{\sin\rho\pi}\sum_{k=0}^{2m+1}\tilde{\lambda}_j \cos\rho\left(\left|\theta - \tilde{\beta}_k\right| - \pi\right). \tag{13}$$

Используя соотношения

$$\theta' = \begin{cases} \theta + 2\pi, & 0 \le \theta \le \beta_k, \\ \theta, & \beta_k \le \theta \le \beta_k + 2\pi, \end{cases}$$

связывающие значения $\theta' \in [\beta_k,\ \beta_k + 2\pi]$ и $\theta \in [0,\ 2\pi]$, формулу (10) можно переписать в виде

$$h_{X_k}(\theta) = \frac{\tilde{\lambda}_k\pi}{\sin\rho\pi}\cos\left(\left|\theta - \beta_k\right| - \pi\right), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Тогда (13) вытекает из представления (8).

Лемма 5. *Любое решение однородной задачи Римана (6) дается формулой*

$$\Phi(z) = X(z)F(z), \tag{14}$$

где $X(z)$ – каноническая функция, а $F(z)$ – произвольная целая функция порядка $\rho_F \le \rho$.

Лемма доказывается аналогично [3, с. 120, 135].

Теорема 1. *Для разрешимости однородной задачи Римана (6) в классе B ограниченных кусочно-аналитических функций необходимо, чтобы индикатор $h_X(\theta)$ канонической функции был неотрицателен в точках $\theta = \tilde{\beta}_k$, т. е.*

$$h_X(\tilde{\beta}_k) \le 0, \ \ k = \overline{0, 2m+1}.$$

Если справедливы неравенства

$$h_X(\tilde{\beta}_k) < 0, \ \ k = \overline{0, 2m+1}, \tag{15}$$

то задача Римана (6) имеет бесконечное множество ограниченных решений, общая формула которых имеет вид (14), где $F(z)$ – целая функция порядка $\rho_F \le \rho$, удовлетворяющая на L асимптотическому неравенству

$$\ln|F(t)| < -\mathrm{Im}\left\{ t \int_L \frac{\ln \tilde{G}(\tau) d\tau}{\tau(\tau-1)} \right\} + O(1), \ \ L \ni t \to \infty. \tag{16}$$

Теорема доказывается так же, как аналогичная в [10].

Теорема 2. *При выполнении условий (15) однородные краевые задачи Гильберта для кусочно-аналитических функций (1) – (4) и Римана (6), (7) разрешимы или нет одновременно.*

Доказательство. Если $\Phi(z)$ – ограниченное решение задачи Гильберта для кусочно-аналитических функций, то по построению пары функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ из (5) являются ограниченным решением однородной задачи Римана (10). Если справедливы неравенства (15), то каноническая функция есть решение однородной задачи Римана из класса B, имеющее экспоненциальное стремление к нулю порядка ρ в окрестности бесконечно удаленной точки. Поэтому любой целой функции $F(z)$ порядка $\rho_1 \le \rho$ с чисто мнимыми коэффициентами будет соответствовать ограниченное решение задачи Римана (6), удовлетворяющее в силу соотношения (9) дополнительному условию (5). Следовательно, функция (14) при $\mathrm{Im}\, z > 0$ будет ограниченным решением задачи Гильберта (1) и (2).

Функцию $F(z)$ с указанными свойствами проще всего построить по формуле [13, с. 13]

$$F(z) = i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta_1}{n} \right)^{\frac{n}{\rho_1}} z^n, \ \ 0 < \rho_1 < \rho, \ \ \Delta_1 > 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для разрешимости однородной задачи Гильберта (1) – (4) в классе B ограниченных кусочно-аналитических функций необходимо выполнение неравенств*

$$h\left(\tilde{\beta}_{k^+}\right) \le 0,$$

где k^+ – те индексы $k = \overline{0, m+1}$, для которых $\lambda_k > 0$.

Если имеют место строгие неравенства

$$h\left(\tilde{\beta}_{k^+}\right) < 0,$$

то общее решение задачи Гильберта дается формулой

$$\Phi(z) = iX(z)F(z), \ \ \mathrm{Im}\, z > 0,$$

где $F(z)$ – целая функция с вещественными коэффициентами Тейлора, имеющая порядок $\rho_F \le \rho$ и подчиненная на L условию (16).

Теорема вытекает из теоремы 2 с учетом симметричности индикатора $h_X(\theta)$ из (13) относительно точки $\theta = \pi$ и его тригонометрической выпуклости на отрезках $\left[\tilde{\beta}_{k^+}, \ \tilde{\beta}_{k^+ +1}\right]$.

Пример. *Пусть* $\rho(r) = \rho \in (0, \pi)$, $m = 1$, $\beta_1 = \beta \in (0, \pi)$, $\lambda_+ = -\lambda_- = \lambda > 0$. Если $\lambda_1 = -\left(\frac{1 + \cos\rho\pi}{2\cos\rho\pi} \right)\lambda$, *то задача Гильберта (1) – (3) с неопределенно бесконечным индексом имеет одно линейно независимое ограниченное решение*

$$\Phi(z) = iCX(z),$$

где C – произвольная действительная постоянная, а $X(z)$ – каноническая функция.

В рассматриваемом случае индикатор канонической функции имеет вид

$$h_X(\theta) = -\frac{\pi}{\sin\rho\pi}\Big(\lambda\cos\rho(\theta-\pi) - \lambda_1\cos\rho\big(|\theta-\beta|-\pi\big) - \lambda\cos\rho\big(|\theta-\pi|-\pi\big) -$$

$$-\lambda\cos\rho\big(|\theta-2\pi+\beta|-\pi\big)\Big),\ \ 0\le\theta\le 2\pi\ .$$

При указанном значении λ_1 будет

$$h_X(\theta)<0,\ \ \theta\in[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]\ \text{ и }\ h_X(0)=0.$$

Кроме того, $\ln\left|X^{\pm}(-r)\right| = O(1)$ при $r>0$. Поскольку $F(z)=\mathrm{const}$ – единственная целая функция порядка $\rho_F < 1/2$, ограниченная на некотором луче [13, с. 71], то отсюда следует утверждение примера.

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. М., 1970.
3. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986.
4. Рогожина И.С. // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 139.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
6. Сандригайло И.Е. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 6. С. 16.
7. Алекна П.Ю. // Лит. мат. сб. 1977. № 1. С. 5.
8. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. // Мат. заметки. 2003. Т. 73. № 5. С. 724.
9. Алехно А.Г. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 2. С. 5.
10. Алехно А.Г. // Там же. 1997. Т. 41. № 2. С. 37.
11. Островский И.В. // Докл. Ан УССР. Сер. А. 1990. № 5. С. 24.
12. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин И.М. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1982.
13. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М., 1956.

Поступила в редакцию 23.10.09.

Антон Брониславович Севрук – старший преподаватель кафедры общей математики и информатики.