Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Л. Л. Березкина, А. П. Шилин

Экстремумы функций нескольких переменных

Учебно-методическая разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий

Минск
2018

УДК 517.272(075.8)
Б 484

Решение о депонировании вынес:
Совет физического факультета БГУ
протокол № 5 от 29.11.2018г.

Авторы:
доцент кафедры высшей математики и математической физики
БГУ, к. ф.-м. н., доцент Березкина Лариса Лукинична;
доцент кафедры высшей математики и математической физики
БГУ, к. ф.-м. н., доцент Шилин Андрей Петрович.

Рецензенты:

профессор кафедры высшей математики №2 БНТУ, д. ф.-м. н., профессор
Мелешко Иван Николаевич;
доцент кафедры теории функций БГУ, к. ф.-м. н., доцент
Жоровина Тамара Николаевна.

Березкина, Л. Л. Экстремумы функций нескольких переменных : учебно-методическая разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий / Л. Л. Березкина, А. П. Шилин ; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики. – Минск : БГУ, 2018. – 17 с. – Библиогр.: с. 16.

Составлены многовариантные задания для студентов физических специальностей по теме «Экстремумы функций нескольких переменных». Предварительно приведены необходимые факты из теории и дано решение типичных примеров. Сделаны также важные для решения уточнения свойств квадратичных форм при невыполнении условий критерия Сильвестра.

§1. Квадратичные формы

Подробно теория квадратичных форм излагается в курсе линейной алгебры. В этом параграфе лишь кратко приводятся сведения, необходимые для изучения математического анализа.

Пусть $\xi = \ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – произвольная точка пространства $\mathbf{R}^n$, n–натуральное число.

Определение. Квадратичной формой называется функция $A\ \ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (или, короче, $A\ \ \xi$) вида

$$A\ \ \xi\ \ = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \text{, где } a_{ij} \in \mathbf{R},\ a_{ij} = a_{ji},\ i, j = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Очевидно, что $A\ \ 0, 0, \ldots, 0\ \ = 0$ (или, короче, $A\ \ 0\ \ = 0$).

Замечание. Можно заметь, что при $i \neq j$ в квадратичной форме (1) есть равные слагаемые: $a_{ij}\xi_i\xi_j = a_{ji}\xi_j\xi_i$. В примерах при развернутой записи конкретных квадратичных форм сумма этих слагаемых записывается, как правило, сразу в виде $b_{ij}\xi_i\xi_j$, где $b_{ij} = 2a_{ij}$.

Определение. Квадратичная форма $A\ \ \xi$ называется

- знакоположительной (положительно определенной), если $\forall \xi \neq 0 \quad A\ \ \xi\ \ > 0$;
- знакоотрицательной (отрицательно определенной), если $\forall \xi \neq 0 \quad A\ \ \xi\ \ < 0$;
- знакопеременной, если $\exists \xi^1, \xi^2 \in \mathbf{R}^n$ такие, что $A(\xi^1) > 0,\ A(\xi^2) < 0$;
- положительно полуопределенной, если $\forall \xi \neq 0 \quad A\ \ \xi\ \ \geq 0$,
- отрицательно полуопределенной, если $\forall \xi \neq 0 \quad A\ \ \xi\ \ \leq 0$.

Знакоположительные и знакоотрицательные квадратичные формы будем называть знакоопределенными.

Пример 1.1. Пусть

$$A_1\ \ \xi_1, \xi_2, \xi_3\ \ = 2\xi_1^2 + 5\xi_2^2 + 7\xi_3^2,\ A_2\ \ \xi_1, \xi_2, \xi_3\ \ = -2\xi_1^2 - 5\xi_2^2 - 7\xi_3^2,$$

$$A_3\ \ \xi_1, \xi_2, \xi_3\ \ = 2\xi_1^2 - 5\xi_2^2 + 7\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_2.$$

Очевидно, что квадратичная форма $A_1\ \ \xi_1, \xi_2, \xi_3$ знакоположительная, а квадратичная форма $A_2\ \ \xi_1, \xi_2, \xi_3$ – знакоотрицательная. Что касается квадратичной формы A_3, то $A_3\ \ 1, 0, 0\ \ > 0$, а $A_3\ \ 0, 1, 0\ \ < 0$. Таким образом, $A_3\ \ \xi_1, \xi_2, \xi_3$ – знакопеременная квадратичная форма.◄

Как видно из приведенного примера, в том случае, когда квадратичная форма не содержит произведений различных переменных, а коэффициенты при квадратах имеют одинаковые знаки, тип ее знакоопределенности очевиден. Также просто сделать вывод, что квадратичная форма является знакопеременной в том случае, когда она содержит коэффициенты при квадратах разных знаков. Если же квадратичная форма содержит произведения различных переменных, а коэффициенты при квадратах имеют одинаковые знаки, то результат не будет настолько же очевидным.

Пример 1.2. Рассмотрим квадратичные формы $A_1(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+5\xi_2^2$, $A_2(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+4\xi_2^2$ и $A_3(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+3\xi_2^2$.

У этих квадратичных форм все коэффициенты при квадратах положительны и создается иллюзия, что все они знакоположительны. Но при более внимательном рассмотрении оказывается, что это не так. Действительно, преобразуем каждую из квадратичных форм следующим образом:

$$A_1(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+5\xi_2^2=(\xi_1+2\xi_2)^2+\xi_2^2;$$

$$A_2(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+4\xi_2^2=(\xi_1+2\xi_2)^2;$$

$$A_3(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+3\xi_2^2=(\xi_1+2\xi_2)^2-\xi_2^2.$$

Теперь мы видим, что если квадратичная форма A_1 в самом деле принимает только положительные значения при всех ξ_1 и ξ_2, не равных нулю одновременно, A_2 – положительные значения и нуль, то A_3 может принимать как положительные значения (например, при $(\xi_1,\xi_2)=(1,0)$), так и отрицательные (например, при $(\xi_1,\xi_2)=(2,-1)$).◄

Таким образом, в тех случаях, когда квадратичная форма содержит произведения различных переменных, а ее коэффициенты при квадратах имеют один знак, то ответ на вопрос о ее типе не является очевидным. Для дальнейших исследований приведем некоторые определения и теоремы.

Определение. Матрицей квадратичной формы (1) называется матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Это, очевидно, симметричная матрица.

Определение. Главными угловыми минорами матрицы (2) называются миноры

$$\Delta_1=a_{11}, \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение. Квадратичная форма называется невырожденной, если ее матрица невырожденная.

Невырожденная квадратичная форма не может быть полуопределенной, она либо знакоопределенная, либо знакопеременная. Для исследования на знакоопределенность невырожденных квадратичных форм используется

Теорема (критерий Сильвестра). *Для того, чтобы квадратичная форма была знакоположительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры ее матрицы были положительными.*

Для того, чтобы квадратичная форма была знакоотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры ее матрицы нечетного порядка были отрицательными, а четного – положительными.

Если же какое-либо из условий критерия Сильвестра для невырожденной квадратичной формы не выполняется (т.е. какой-либо из главных угловых миноров ее матрицы равен нулю, либо существует отрицательный главный угловой минор четного порядка, либо два главных угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки), то квадратичная форма является знакопеременной.

Покажем, что в том случае, когда матрица квадратичной формы имеет отрицательный главный минор четного порядка, либо два ее главных угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки, квадратичная форма является знакопеременной независимо от того, вырожденная она или нет.

Пусть матрица квадратичной формы (1) имеет отрицательный главный минор четного порядка:

$$\Delta_{2k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k,1} & a_{2k,2} & \dots & a_{2k,2k} \end{vmatrix} < 0 .$$

Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму

$$A_1(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{2k}) = \sum_{i,j=1}^{2k} a_{ij}\xi_i\xi_j .$$

Ее матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k,1} & a_{2k,2} & \dots & a_{2k,2k} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что главные угловые миноры исходной квадратичной формы $A(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ и вспомогательной $A_1(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{2k})$ от первого порядка до порядка $2k$ совпадают. Так как определитель матрицы вспомогательной квадратичной формы $\Delta_{2k} < 0$, эта форма является невырожденной, а критерий Сильвестра для нее не выполняется. По этой причине она является знакопеременной. Это значит, что существуют два набора переменных $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{2k}$ и $\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{2k}$, не равных нулю одновременно, таких, что $A_1(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{2k}) > 0$, а $A_1(\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{2k}) < 0$. Но

$$A(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{2k}, 0, \ldots, 0) = A_1(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{2k}) > 0,$$

тогда как

$$A(\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{2k}, 0, \ldots, 0) = A_1(\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{2k}) < 0.$$

Это означает, что существует два набора переменных $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{2k}, 0, \ldots, 0)$ и $(\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{2k}, 0, \ldots, 0)$, не равных нулю одновременно, при которых квадратичная форма $A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ принимает значения разных знаков, и, т.о., эта квадратичная форма является знакопеременной.

Аналогично доказывается знакопеременность квадратичной формы и в том случае, когда ее матрица имеет два главных угловых минора нечетного порядка разных знаков.

Вывод.

- Если квадратичная форма не содержит произведений различных переменных, а все ее коэффициенты при квадратах имеют один знак, то она знакоположительна в том случае, когда эти коэффициенты положительны, и знакоотрицательна, когда они отрицательны.
- Если квадратичная форма имеет коэффициенты при квадратах разных знаков, то она знакопеременная.
- Если квадратичная форма содержит произведения различных переменных, а все коэффициенты при квадратах имеют один и тот же знак, следует вычислить главные угловые миноры ее матрицы. Если среди миноров четного порядка есть отрицательный, либо два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки, квадратичная форма является знакопеременной.
- Если все главные угловые миноры четного порядка неотрицательны, а $\Delta_n \neq 0$, а все главные миноры нечетного порядка имеют один и тот же знак, следует обратиться к критерию Сильвестра: в том случае, когда все главные угловые миноры положительны, квадратичная форма знакоположительна, если же главные миноры четного порядка положительны, а нечетного – отрицательны, то она знакоотрицательна. Во всех остальных случаях (т.е., когда $\Delta_n \neq 0$, но среди главных миноров четного порядка есть отрицательный, либо среди главных миноров есть равные нулю, либо главные миноры нечетного порядка имеют разные знаки) квадратичная форма является знакопеременной.

Остался открытым лишь вопрос в том случае, когда $\Delta_n = 0$ и один из главных угловых миноров также равен нулю. В этом случае следует обратиться к более тонким исследованиям. Приведем еще один из способов исследования квадратичной формы на знакоопределенность.

Определение. Характеристическим многочленом матрицы (2) называется многочлен

$$\det(\hat{A} - \lambda E) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}.$$

Корни этого многочлена называются характеристическими числами матрицы $\hat{A}$. Из линейной алгебры известно, что все характеристические числа симметричной матрицы, каковой является матрица квадратичной формы, действительны. Справедливы следующие утверждения:

- если все характеристические числа матрицы квадратичной формы положительны, то она знакоположительная;
- если все они отрицателны, то квадратичная форма знакоотрицательная;
- если среди характеристических чисел есть числа разных знаков, то квадратичная форма знакопеременная;
- если среди характеристических чисел матрицы квадратичной формы есть только положительные (отрицательные) числа и нуль, то эта квадратичная форма положительно (отрицательно) полуопределена.

§2. Экстремумы функций

Экстремумы функции – это ее минимумы и максимумы. Далее будут рассматриваться локальные экстремумы.

Будем в этом параграфе обозначать $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ точку пространства $\mathbf{R}^n$. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (или, короче, $f(x)$) определена в некоторой области $\mathbf{R}^n$.

Определение. Точка $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ называется точкой минимума (максимума) функции $f(x)$, если для каждой точки x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$).

В дальнейшем предполагается, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в своей области определения.

Теорема (необходимое условие наличия экстремума). *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то* $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1,n}$.

Исследование функции на экстремум следует начинать с нахождения точек, подозрительных на экстремум, т.е. точек, в которых выполняется необходимое условие экстремума.

Пусть точка x_0 оказалась подозрительной на экстремум. Найдем в этой точке дифференциал второго порядка функции:

$$d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j, \qquad (3)$$

где $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$, причем $a_{ij} = a_{ji}$ из-за непрерывности производных. Дифференциал $d^2 f(x_0)$, таким образом, представляет собой квадратичную форму относительно переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Теорема (достаточное условие наличия или отсутствия экстремума). *Если квадратичная форма (3) является*

- ***знакоположительной,*** *то у функции $f(x)$ в точке x_0* ***минимум;***
- ***знакоотрицательной,*** *то у функции $f(x)$ в точке x_0* ***максимум;***
- ***знакопеременной,*** *то у функции $f(x)$ в точке x_0* ***экстремума нет.***

Если квадратичная форма (2) является полуопределенной, то экстремум в точке x_0 может быть, а может и не быть. Этот случай требует дополнительных исследований, которых мы здесь не касаемся.

Если $\Delta_k, k = \overline{1,n}$ – главные угловые миноры матрицы квадратичной формы (3), то с помощью результатов предыдущего параграфа можно сделать следующий вывод.

У функции $f(x)$ *в точке* x_0:

- минимум, если $\Delta_k > 0,\ k = \overline{1,n}$;
- максимум, если $(-1)^k \Delta_k > 0,\ k = \overline{1,n}$;
- нет экстремума, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) какие-либо два диагональных элемента матрицы имеют разные знаки;
2) для какого–либо четного k минор $\Delta_k < 0$;
3) для каких-либо двух нечетных k и l миноры Δ_k и Δ_l имеют разные знаки;
4) для какого-либо $k < n$ минор $\Delta_k = 0$, а минор $\Delta_n \neq 0$.

Рассмотрим примеры, в которых требуется исследовать на экстремум заданные функции.

Пример 2.1. Пусть $f(x,y) = 88x + 144y - 3x^2 - 8xy - 8y^2$.

Вычисляем

$$f_x'(x,y)=88-6x-8y\,,\ f_y'\ \ x,y\ \ =144-8x-16y$$

и далее из системы

$$\begin{cases} 88-6x-8y=0, \\ 144-8x-16y=0 \end{cases}$$

находим единственную точку $x_0=8, y_0=5$, подозрительную на экстремум.

Далее вычисляем

$$f_{xx}''\ \ 8{,}5\ \ =-6,\ f_{xy}''\ \ 8{,}5\ \ =-8,\ f_{yy}''\ \ 8{,}5\ \ =-16$$

и составляем матрицу

$$\begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}.$$

Ее главные угловые миноры $\Delta_1=-6<0, \Delta_2=(-6)(-16)-(-8)(-8)=32>0$, поэтому в точке $x_0=8, y_0=5$ максимум, причем $f_{\max}=f\ \ 8{,}5\ \ =712$.◄

Пример 2.2. Пусть $f\ \ x,y,z\ \ =x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

Вначале находим $f_x'(x,y,z)=3x^2+12y$, $f_y'\ \ x,y,z\ \ =2y+12x$, $f_y'\ \ x,y,z\ \ =2z+2$, а затем из системы

$$\begin{cases} 3x^2+12y=0, \\ 2y+12x=0, \\ 2z+2=0 \end{cases}$$

находим две точки $x_1=0, y_1=0, z_1=-1$ и $x_2=24, y_2=-144, z_2=-1$, подозрительные на экстремум.

Теперь составляем матрицу

$$\begin{bmatrix} f_{xx}''(x,y,z) & f_{xy}''(x,y,z) & f_{xz}''(x,y,z) \\ f_{xy}''(x,y,z) & f_{yy}''(x,y,z) & f_{yz}''(x,y,z) \\ f_{xz}''(x,y,z) & f_{yz}''(x,y,z) & f_{zz}''(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

В первой точке она примет вид $\begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, а во второй – вид $\begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

В случае первой точки $\Delta_2=-144<0$. Так как матрица имеет отрицательный главный минор четного порядка, то квадратичная форма является знакопеременной, что означает отсутствие экстремума. Во второй точке

$\Delta_1 = 144 > 0, \Delta_2 = 144 > 0, \Delta_3 = 288 > 0$, что приводит к минимуму, причем $f_{\min} = f\ \ 24, -144, -1\ \ = -6913$. ◀

§3. Примеры для самостоятельного решения

Исследуйте на экстремум следующие функции.

1. .

1) $f = -e^x(10x^2 + y^2)$,
2) $f = x^2 + 4y^2 + 28xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 3xy - yz$.

2.

1) $f = e^x(x^2 - y^2)$,
2) $f = 2x^2 + 2y^2 + 32xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{y} + \dfrac{3}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 4yz$.

3.

1) $f = -e^x(8x^2 + 3y^2)$,
2) $f = 3x^2 + 3y^2 + 30xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{25}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{5}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 9xy + yz$.

4.

1) $f = e^x(2x^2 - y^2)$,
2) $f = 4x^2 + y^2 + 68xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{y} + \dfrac{36}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy - 4yz$.

5.

1) $f = e^x(3x^2 - 2y^2),$

2) $f = x^2 + 9y^2 - 3xy - \ln x - \ln y,$

3) $f = xyz + \dfrac{7}{x} + \dfrac{49}{y} + \dfrac{7}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0),$

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 18xy + yz.$

6.

1) $f = e^x(4x^2 - y^2),$

2) $f = 9x^2 + y^2 + 21xy - \ln x - \ln y,$

3) $f = xyz + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0),$

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 15xy + 3yz.$

7.

1) $f = -e^x(3x^2 + y^2),$

2) $f = 4x^2 + 9y^2 - 8xy - \ln x - \ln y,$

3) $f = xyz + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0),$

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 6xy - yz.$

8.

1) $f = e^x(5x^2 - 2y^2),$

2) $f = 4x^2 + 4y^2 - 7xy - \ln x - \ln y,$

3) $f = xyz + \dfrac{9}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{3}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0),$

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 15xy - 3yz.$

9.

1) $f = e^x(3x^2 - 4y^2),$

2) $f = 9x^2 + 4y^2 - 18xy - \ln x - \ln y,$

3) $f = xyz + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{16}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0),$

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 3xy + yz.$

10.

1) $f = e^x(x^2 - 5y^2)$,
2) $f = x^2 + 25y^2 + 35xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{5}{x} + \dfrac{25}{y} + \dfrac{5}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 6xy + 4yz$.

11.

1) $f = -e^x(2x^2 + y^2)$,
2) $f = 5x^2 + 5y^2 - 9xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{36}{x} + \dfrac{6}{y} + \dfrac{6}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 12xy + 4yz$.

12.

1) $f = -e^x(8x^2 + y^2)$,
2) $f = x^2 + y^2 + 98xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{7}{x} + \dfrac{7}{y} + \dfrac{49}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 9xy - yz$.

13.

1) $f = -e^x(x^2 + 2y^2)$,
2) $f = 4x^2 + 25y^2 + 30xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 3xy - yz$.

14.

1) $f = -e^x(3x^2 + 4y^2)$,
2) $f = 9x^2 + 25y^2 - 15xy - \ln x - \ln y$,
3) $f = xyz + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{9}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 6xy - yz$.

15.

1) $f = e^{x}(3x^2 - 7y^2)$,

2) $f = 16x^2 + 25y^2 - 20xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{4}{x} + \dfrac{16}{y} + \dfrac{4}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 6xy - 4yz$.

16.

1) $f = e^{x}(5x^2 - 4y^2)$,

2) $f = 2x^2 + 2y^2 - 3xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{6}{x} + \dfrac{36}{y} + \dfrac{6}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 4yz$.

17.

1) $f = -e^{x}(x^2 + 8y^2)$,

2) $f = 3x^2 + 3y^2 + 75xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{16}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{4}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 9xy - yz$.

18.

1) $f = e^{x}(x^2 - 7y^2)$,

2) $f = 25x^2 + 4y^2 + 20xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{25}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + yz$.

19.

1) $f = e^{x}(6x^2 - y^2)$,

2) $f = 25x^2 + 9y^2 + 30xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{49}{x} + \dfrac{7}{y} + \dfrac{7}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 12xy - 4yz$.

20.

1) $f = -e^x(6x^2 + y^2)$,

2) $f = 36x^2 + y^2 + 204xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y} + \dfrac{64}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 18xy - yz$.

21.

1) $f = -e^x(3x^2 + 8y^2)$,

2) $f = x^2 + 36y^2 - 6xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{9}{x} + \dfrac{81}{y} + \dfrac{9}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 15xy - 3yz$.

22.

1) $f = -e^x(2x^2 + 7y^2)$,

2) $f = 4x^2 + 36y^2 - 12xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{100}{x} + \dfrac{10}{y} + \dfrac{10}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4yz$.

23.

1) $f = e^x(2x^2 - 9y^2)$,

2) $f = 9x^2 + 36y^2 - 34xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{8}{x} + \dfrac{64}{y} + \dfrac{8}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 3xy + yz$.

24.

1) $f = e^x(3x^2 - 8y^2)$,

2) $f = 36x^2 + 9y^2 - 28xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{81}{x} + \dfrac{9}{y} + \dfrac{9}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 - 9xy + yz$.

25.

1) $f = -e^{x}(4x^2 + 7y^2)$,

2) $f = 6x^2 + 6y^2 + 88xy - \ln x - \ln y$,

3) $f = xyz + \dfrac{10}{x} + \dfrac{100}{y} + \dfrac{10}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

4) $f = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - yz$.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х т. Т.1 /Г.М. Фихтенгольц – Санкт-Петербург: Лань, 2006. – 415с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х т. Т.2 /Г.М. Фихтенгольц – Санкт-Петербург: Лань, 2006. – 423с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: АСТ; Астрель, 2007. – 558с.
4. Березкина Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра /Л.Л.Березкина – Минск: РИВШ, 2015. – 354с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е