сти достоверной оценки риска на основе применения традиционных статистических подходов.

Литература

1. Беннинга, Ш. Финансовое моделирование с использованием Excel / Ш. Беннинга ; пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс». – 2007. – 592 с.
2. Винс, Р. Математика управления капиталом. Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров / Р. Винс ; пер. с англ. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2006. – 417 с.
3. Галиц, Л. Финансовая инженерия: инструменты и способы управления финансовым риском / Л. Галиц ; пер. с англ. под ред. А.М. Зубкова. – М. : ТВП, 1998. – 576 с.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМИ ФАКТОРНЫМИ ЭЛАСТИЧНОСТЯМИ

Хацкевич Г.А., *доктор экономических наук, профессор (Институт бизнеса Белорусского государственного университета, г. Минск)*
Проневич А.Ф., *кандидат физико-математических наук, доцент (Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г. Гродно)*

Производственные функции (ПФ) являются базовым элементом математического аппарата моделирования производственных объектов и систем на различных уровнях – от крупного предприятия (фирмы) до национальных экономик [1]. Ввиду большого разнообразия экономических процессов одной из основных проблем при их моделировании становиться задача выбора аналитической формы ПФ. Прежде всего, этот выбор обусловливается теоретическими соображениями, которые должны учитывать особенности взаимосвязей между конкретными ресурсами и результативными признаками.

Каждая из ПФ f характеризуется рядом экономико-математических показателей. Одной из основных является характеристика *эластичность выпуска по отношению к затратам* i-го фактора производства

$$\varepsilon_i(x) = \frac{x_i}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \ln x_i}, \quad i \in \{1, \dots n\},$$

которая служит мерой измерения выпуска продукции при изменении затрат ресурсов и в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ приближенно показывает на сколько процентов измениться объем выпуска при изменении размера i-го фактора на один процент при условии, что количество остальных факторов остается неизменным.

Так, например, для ПФ Кобба–Дугласа

$$f(x) = Ax_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \qquad A > 0, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

эластичности выпуска по i-му фактору есть функции постоянные $\varepsilon_i(x)=\alpha_i$, $i=1,\ldots,n,$ а для ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства (CES-функция)

$$f(x)=A\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\gamma}\right)^{\alpha_0/\gamma}, \quad A>0, \quad \alpha_j>0,\ j=0,\ldots,n, \quad \gamma\in(-\infty;0)\cup(0;1), \tag{2}$$

являются функциями от однородных координат $\xi_j=x_j/x_i,\ j=1,\ldots,n,\ j\neq i$:

$$\varepsilon_i(x)=\frac{\alpha_0\alpha_i}{\alpha_1\xi_1^{\gamma}+\ldots+\alpha_{i-1}\xi_{i-1}^{\gamma}+\alpha_i+\alpha_{i+1}\xi_{i+1}^{\gamma}+\ldots+\alpha_n\xi_n^{\gamma}}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Функции (1) и (2) составляют класс однородных ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства [2]. Однако этот класс ПФ в полной мере не позволяет описывать реальные процессы производства, что приводит к задаче его расширения в разных направлениях [3 − 6].

В данной работе получены новые виды многофакторных ПФ. А именно решена одна из обратных задач теории ПФ: восстановить ПФ исходя из заданной эластичности выпуска. Способ построения ПФ основан на нахождении решений линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Множество многофакторных ПФ с заданной факторной эластичностью выпуска описывается следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть для некоторого производства известна эластичность выпуска по* i*-му фактору* $\varepsilon_i(x),\ i=1,\ldots,n.$ *Тогда этот производственный процесс описывается одной из ПФ вида*

$$f_{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)=\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots x_n)\exp\int\frac{\varepsilon_i(x_1,\ldots,x_n)}{x_i}dx_i,$$

где φ *– произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.*

Из теоремы 1 для двухфакторных ПФ $F(K,L)$ получаем

Следствие 1 [7]. *Пусть для некоторого производства известна эластичность выпуска по капиталу* (*по труду*)

$$E_K(K,L)=\frac{K}{F(K,L)}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \quad \left(E_L(K,L)=\frac{L}{F(K,L)}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\right).$$

Тогда этот производственный процесс описывается одной из ПФ вида

$$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(L)\exp\int\frac{E_K(K,L)}{K}dK \quad \left(F_{\varphi}(K,L)=\varphi(K)\exp\int\frac{E_L(K,L)}{L}dL\right),$$

где φ *– произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.*

Основываясь на следствии 1 для некоторых заданных эластичностей выпуска по капиталу (по труду), вычислим соответствующие им классы ПФ (таблицы 1 и 2).

Таблица 1 – Вид ПФ, соответствующий заданной эластичности выпуска по капиталу ($\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, f,g – произвольные непрерывные функции).

№	Эластичность выпуска по капиталу	Аналитический вид ПФ

1.	$E_K(K,L)=\gamma$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)K^\gamma$
2.	$E_K(K,L)=\alpha K+\beta L+\gamma$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)K^{\beta L+\gamma}e^{\alpha K}$
3.	$E_K(K,L)=f(K)+g(L)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)K^{g(L)}\exp\int\frac{f(K)}{K}dK$
4.	$E_K(K,L)=K^\alpha f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)\exp\left(L^\alpha\int\xi^{\alpha-1}f(\xi)d\xi\right)_{\vert\xi=\frac{K}{L}}$
5.	$E_K(K,L)=L^\beta f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)\exp\left(L^\beta\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\vert\xi=\frac{K}{L}}$
6.	$E_K(K,L)=f\left(K^\alpha L^\beta\right),\quad \alpha,\beta\neq 0$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(L)\exp\left(\frac{1}{\alpha}\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\vert\xi=K^\alpha L^\beta}$

Источник: разработана авторами

Таблица 2 – Вид ПФ, соответствующий заданной эластичности выпуска по труду $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R},\ f,g$ – произвольные непрерывные функции).

№	**Эластичность выпуска по труду**	**Аналитический вид ПФ**
1.	$E_L(K,L)=\gamma$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(K)L^\gamma$
2.	$E_L(K,L)=\alpha K+\beta L+\gamma$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(K)L^{\alpha K+\gamma}e^{\beta L}$
3.	$E_L(K,L)=f(K)+g(L)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(K)L^{f(K)}\exp\int\frac{g(L)}{L}dL$
4.	$E_L(K,L)=K^\alpha f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(K)\exp\left(-K^\alpha\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\vert\xi=\frac{K}{L}}$
5.	$E_L(K,L)=L^\beta f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(K)\exp\left(-K^\beta\int\frac{f(\xi)}{\xi^{\beta+1}}d\xi\right)_{\vert\xi=\frac{K}{L}}$
6.	$E_L(K,L)=f\left(K^\alpha L^\beta\right),\quad \alpha,\beta\neq 0$	$F_\varphi(K,L)=\varphi(K)\exp\left(\frac{1}{\beta}\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\right)_{\vert\xi=K^\alpha L^\beta}$

Источник: разработана авторами

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов, для которых известны факторные эластичности.

Литература

1. Горбунов, В.К. Производственные функции: теория и построение / В.К. Горбунов. – Ульяновск: УлГУ, 2013. – 84 с.

2. Chen, B.-Y. Classification of h-homogeneous production functions with constant elasticity of substitution / B.-Y. Chen // Tamkang journal of mathematics. – 2012. – Vol. 43, No. 2. – P. 321 – 328.

3. Клейнер, Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

4. Господарик, Е.Г. ЕАЭС-2050: глобальные тренды и евразийская экономическая политика / Е.Г. Господарик, М.М. Ковалев. – Мн.: БГУ, 2015. – 152 с.

5. Khatskevich, G.A. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2017. – No. 1. – P. 46 – 50.

6. Хацкевич, Г.А. Квазиоднородные производственные функции единичной эластичности замещения факторов по Хиксу / Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич // Экономика, моделирование, прогнозирование. – 2017. – Вып. 11. – С. 135 – 140.

7. Хацкевич, Г.А. Двухфакторные производственные функции с заданными эластичностями выпуска и производства / Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич, В.Ю. Медведева // Бизнес. Инновации. Экономика. – 2017. – Вып. 1. – С. 110 – 119.