

Проиллюстрируем метод на примере

$$\alpha^0 = \varphi(x^0(10)) = \min \varphi(x(10)); \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = 10, \\ x_2(0) = -10, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 10], \quad \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2. \quad (7)$$

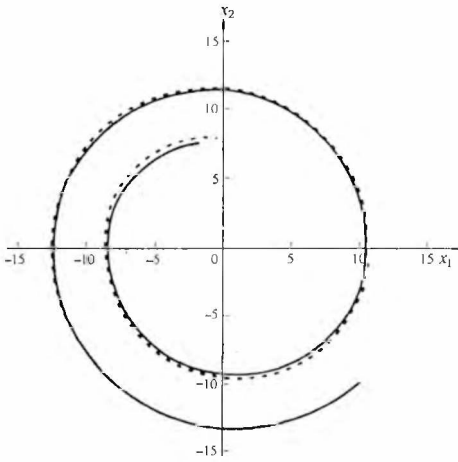


Рис. 1. Проекция траекторий задачи (7) на фазовую плоскость x_1x_2 при $m=3$

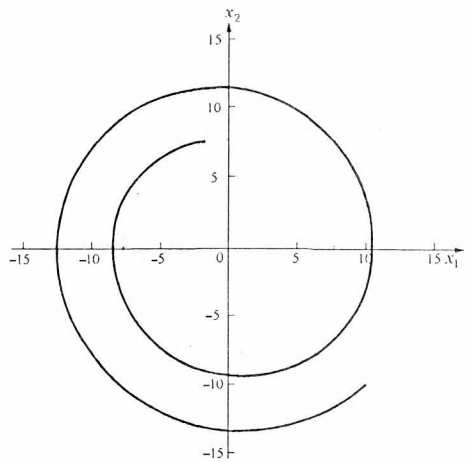


Рис. 2. Проекция траекторий задачи (7) на фазовую плоскость x_1x_2 при $m=12$

Решив кусочно-линейную аппроксимацию задачи (7) в классе дискретных управлений с $h=0,1$, получили $\alpha_{m=3}^0=7,913822$; $\alpha_{m=12}^0=7,648144$ и определили нули коуправления $\{2,617; 5,712; 8,9\}_{m=3}$; $\{2,358; 5,499; 8,641\}_{m=12}$. После процедуры доводки $\alpha^0=7,64635$, нули коуправления – $\{2,376; 5,518; 8,659\}$. Результаты показаны на рисунках: рис. 1 соответствует $m=3$ (пунктирной линией изображена фазовая траектория кусочно-линейной аппроксимации задачи (7), сплошной – оптимальная траектория задачи (7)); рис. 2 соответствует $m=12$ (траектории практически совпали).

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова А.И., Ракецкий В.М. Конструктивные методы оптимизации: В 5 ч. Ч. 4. Выпуклые задачи. Мн., 1987.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975.

Поступила в редакцию 06.12.2002.

Татьяна Георгиевна Хомицкая – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 519.24

С.Л. ЧЕХМЕНОК

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СТРОГО СИММЕТРИЧНЫХ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

In this article an algorithm of calculating a density and a function of distribution for symmetric stable random values is constructed.

Пусть задано некоторое фиксированное значение $x \in R$, в котором нужно вычислить значение плотности и функции распределения вероятностей

строго симметричной устойчивой случайной величины ξ . Из [1] известно, что плотность симметричного устойчивого закона задается равенством

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-ct^{\alpha}} dt, \quad (1)$$

где α и c – параметры устойчивого распределения, $\alpha \in (0; 2]$, $c > 0$. Построим алгоритм вычисления плотности распределения в заданной точке x . Поскольку $p(-x) = p(x)$, то достаточно рассмотреть случай, когда $x \geq 0$. Зафиксируем значение $x \in R$, $x \geq 0$, в котором требуется вычислить значение плотности распределения устойчивого закона. Представим первый сомножитель под интегралом (1) в виде $\cos(xt) = 1 + \cos(xt) - 1$, тогда $p(x) = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \int_0^{\infty} (1 + \cos(xt)) e^{-t} f(t) dt, \\ S_2 = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt, \quad (2)$$

а $f(t) = \frac{1}{\pi} e^{t - ct^{\alpha}}$. Для вычисления интегралов S_1 и S_2 воспользуемся квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ), которые, согласно [2], строятся в виде

$$S_j = \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(t_i), \quad j = \overline{1, 2}, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – некоторое фиксированное число, определяющее алгебраическую степень точности, A_i – некоторые коэффициенты, t_i – узлы, в которых вычисляются значения функции $f(t)$.

Рассмотрим S_1 . Для данного интеграла коэффициенты A_i , $i = \overline{1, n+1}$, вычисляются по формуле

$$A_i = \int_0^{\infty} (1 + \cos(xt)) e^{-t} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (t - t_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (t_i - t_j)} dt, \quad (4)$$

где узлы t_i , $i = \overline{1, n+1}$, являются корнями многочлена

$$\omega(t) = t^{n+1} + a_1 t^n + a_2 t^{n-1} + \dots + a_n t + a_{n+1}, \quad (5)$$

в котором коэффициенты a_i , $i = \overline{1, n+1}$, являются решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\begin{cases} a_1 I(n) + a_2 I(n-1) + \dots + a_{n+1} I(0) = -I(n+1), \\ a_1 I(n+1) + a_2 I(n) + \dots + a_{n+1} I(1) = -I(n+2), \\ \dots \\ a_1 I(2n) + a_2 I(2n-1) + \dots + a_{n+1} I(n) = -I(2n+1), \end{cases} \quad (6)$$

где значения $I(k)$ для $k = \overline{0, 2n+1}$ задаются интегралом

$$I(k) = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(x\tau)) e^{-\tau} \tau^k d\tau.$$

Построим явную формулу для вычисления интеграла $I(k)$:

$$I(k) = \int_0^{+\infty} (1 + \cos(x\tau)) e^{-\tau} \tau^k d\tau = k! + \int_0^{+\infty} \cos(x\tau) e^{-\tau} \tau^k d\tau.$$

Из [4] известно, что

$$\int_0^{+\infty} e^{i\tau x - \tau} \tau^k d\tau = \frac{k!}{(1+x^2)^{\frac{k+1}{2}}} \left(\cos((k+1)\arctg(x)) + i \sin((k+1)\arctg(x)) \right).$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \cos(x\tau) e^{-\tau} \tau^k d\tau = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{i\tau x - \tau} \tau^k d\tau = \frac{k! \cos((k+1)\arctg(x))}{(1+x^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

Таким образом, для вычисления интеграла S_1 нужно вычислить коэффициенты A_i , $i=1, n+1$, по формуле (4), в которой a_i , $i=1, n+1$, являются решением СЛАУ вида (6) и t_i , $i=1, n+1$, являются корнями многочлена (5).

Рассмотрим слагаемое S_2 . Для вычисления данного интеграла воспользуемся квадратурными формулами НАСТ, которые основаны на системе ортогональных многочленов Якоби с весовой функцией e^{-t} . Для данной системы многочленов коэффициенты A_i и значения t_i для формулы (3) табулированы [3]. Следовательно, $S_2 \approx \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(t_i)$, где коэффициенты A_i и значения t_i находятся из [3] для заданного значения n .

Рассмотрим вычисление функции распределения в заданной точке x . Функция распределения может быть записана в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \int_0^{+\infty} \cos(yt) e^{-ct^u} dt dy.$$

Поскольку распределение является симметричным, то $F(0)=0,5$. Следовательно,

$$F(x) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^x \cos(yt) e^{-ct^u} dy dt = 0,5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-ct^u} dt.$$

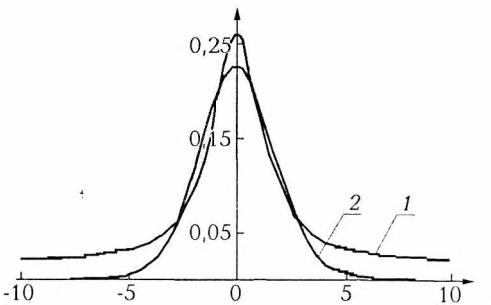


Рис. 1. Графики плотности распределения:
1 — при $\alpha=1,8$; $c=1,5$; 2 — при $\alpha=1,4$; $c=1,2$

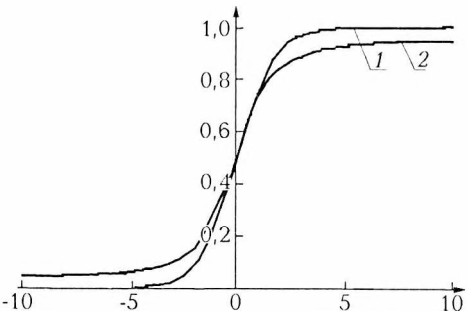


Рис. 2. Графики функции распределения:
1 — при $\alpha=1,8$; $c=1,0$; 2 — при $\alpha=1,1$; $c=1,1$

Вычислим интеграл $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-ct^u} dt$. Представим первый сомножи-

тель в виде $\frac{\sin(xt)}{t} = \frac{xt + \sin(xt)}{t} - x$. Тогда $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-ct^u} dt = S_3 - xS_2$,

где $S_1 = \int_0^{\infty} \frac{xt + \sin xt}{t} e^{-t} f(t) dt$, а S_2 определяется формулой (2).

Для вычисления S_3 воспользуемся приведенным алгоритмом для S_1 , только вместо весовой функции $(1 + \cos(xt))e^{-t}$ возьмем функцию $\frac{xt + \sin xt}{t} e^{-t}$. Тогда $I(k)$ при $k \geq 1$ вычисляется по формуле

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{x\tau + \sin x\tau}{\tau} e^{-\tau} \tau^k d\tau = xk! + \frac{(k-1)! \sin((k) \arctg(x))}{(1+x^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

При $k=0$ $I(0)=4\pi$. Графики плотности распределения при некоторых параметрах приведены на рис. 1, функции распределения – на рис. 2.

1. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.
2. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Приближенное вычисление интегралов. Мн., 1968.
3. Крылов В. И., Кругликова Л. Г. Справочная книга по численному интегрированию. Мн., 1967.
4. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.

Поступила в редакцию 10.12.2002.

Сергей Леопидович Чехменок – аспирант кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Н. Н. Демеш.

УДК 519.10

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, К. Э. КОВАЛЕНКО

КРИТЕРИЙ КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ЧАСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ ВИДА MINMIN MODUL

Necessary and sufficient conditions of quasi-stability of multi-objective (vector) problem of discrete optimization with Pareto principle of optimality and non-linear partial criteria are obtained. The problem is a discrete analogue of the lower semicontinuity by Hausdorff of the multi-valued mapping that establishes the choice function.

Изучению различных аспектов устойчивости скалярных и векторных задач дискретной оптимизации посвящен ряд публикаций (см., например, [1–5]). Настоящая работа продолжает начатые в [5–8] исследования условий квазиустойчивости векторных задач дискретной оптимизации в случае нелинейных частных критериев. Здесь для векторных траекторных задач с частными критериями вида MINMIN MODUL приводятся необходимые и достаточные условия того типа устойчивости, который можно интерпретировать как дискретный аналог свойства полунепрерывности снизу точечно-множественного отображения, задающего принцип оптимальности Парето. Ранее подобные результаты были получены в [6–8] для векторных задач с частными критериями вида MINSUM, MINMAX и MINMAX MODUL.

Под n -критериальной траекторной задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу поиска множества Парето (множества эффективных решений):

$$P^n(A) = \{t \in T: P^n(t, A) = \emptyset\},$$