

ты не уступали соответствующим результатам, полученным с помощью методов рядов и Рунге – Кутты 1–4-го порядков, а в некоторых случаях и превосходили их. В частности, при решении задач, осложненных проблемой «подвисания», использование классических пошаговых методов не позволяло добиться удовлетворительного качества приближения, поскольку уменьшение шага дискретизации вело к «подвисанию» медленной компоненты решения, а его увеличение ухудшало уровень приближения быстрой. В случае использования нашего метода основными рычагами для достижения желаемой точности служили параметры m и p . При их увеличении качество приближения быстрой компоненты, как и следовало ожидать, улучшалось; медленная же компонента при этом не «подвисала».

1. Бобков В.В., Кучмиенко И.А., Фалейчик Б.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 68.

2. Кучмиенко И.А. // Сборник статей VII Республиканской конференции студентов и аспирантов Беларуси «НИРС-2002». Витебск, 2002. С. 46.

3. Антонец А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 05.12.2002.

Владимир Васильевич Бобков – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики.

Игорь Александрович Кучмиенко – студент 5-го курса факультета прикладной математики и информатики.

УДК 517.977

Т.Г. ХОМИЦКАЯ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Realization of the numerical method for the problem of minimizing the convex quadratic function on terminal conditions of the linear system is described. Results are illustrated by the example.

В классе кусочно-непрерывных управляющих функций $u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, $t \in T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$ (допустимые управления) рассмотрим задачу минимизации выпуклой квадратичной функции на терминальных состояниях линейной системы [1, 2]:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \varphi(x^0(t_*)) = \min \varphi(x(t_*)), \\ \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi(x) = c'x + x'Dx/2$, $c, x \in R^n$, $u \in R$, $D \in R^{n \times n}$, $D > 0$, $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные функции.

Допустимые управления $u^0(t)$, $t \in T$, и траекторию $x^0(t)$, $t \in T$, назовем оптимальными, если на них критерий качества задачи (1) достигает минимума: $\varphi(x^0(t_*)) = \min \varphi(x(t_*))$.

Введем выпуклое множество $X^\alpha = \{x \in R^n : \varphi(x) \leq \alpha\}$ и запишем задачу (1) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \min \alpha, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \\ x(t_*) &\in X^\alpha, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи (2) проведем в два этапа. Сначала решим кусочно-линейную аппроксимацию задачи в классе дискретных управлений, затем,

применив процедуру доводки к полученному решению, построим решение исходной задачи.

Первый этап. Заменим множество X^α на его кусочно-линейную аппроксимацию $X_m^\alpha = \{x \in R^n: g_{*i}(\alpha) \leq h'_i x \leq g_i^*(\alpha), i \in I\}$. Здесь $\{h_i, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}\}$, $m \geq n+1$, – семейство единичных n -векторов, выпуклая оболочка которых является телом в R^n ; $g_i^*(\alpha) = \max_{x \in X^\alpha} h'_i x$, $i \in I$; $g_{*i}(\alpha) = \min_{x \in X^\alpha} h'_i x$, $i \in I$.

Введем кусочно-линейную аппроксимацию задачи (2)

$$\alpha_m^0 = \min \alpha, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad g_*(\alpha) \leq Hx(t^*) \leq g^*(\alpha), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \quad (3)$$

где $H' = (h_i, i \in I)$, $g_*(\alpha) = g_{*i}(\alpha)$, $i \in I$, $g^*(\alpha) = g_i^*(\alpha)$, $i \in I$.

Для решения нелинейной задачи оптимального управления (3) введем вспомогательную задачу:

$$\beta(\alpha) = \min \beta, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, \quad g_*(\alpha) \leq Hx(t^*) \leq g^*(\alpha), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T \quad (\beta \in R), \quad (4)$$

где $l = x^* - x_0$, x^* – такая точка, что $\varphi^* = \varphi(x^*) = \min \varphi(x)$, $x \in R^n$.

При фиксированном значении α задача (4) – линейная задача оптимального управления, для которой разработан быстрый двойственный метод вычисления оптимальных программ.

Лемма 1. $\beta(\alpha)$, $\alpha \in R$, – непрерывная монотонно убывающая функция, для которой $\beta(\varphi^*) = \beta^*$, $\beta(\alpha) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Оптимальное значение α_m^0 критерия качества задачи (3) равно минимальному корню уравнения $\beta(\alpha) = 0$.

Схема решения задачи (3). Решаем задачу (4) с $\alpha = \varphi^*$. Пусть $\beta^* = \beta(\varphi^*)$ – значение критерия качества задачи (4). Если $\beta^* < 0$, то x^* – внутренняя точка множества достижимости $Q(x_0)$ системы (1), задача (3) не экстремальная. Если $\beta^* = 0$, то $\alpha = \varphi^*$ – решение задачи (3): $\alpha_m^0 = \varphi^*$. При $\beta^* > 0$ методами [3] находим минимальный корень уравнения $\beta(\alpha) = 0$ и переходим к второму этапу.

Второй этап. Процедура доводки [2] заключается в решении системы алгебраических уравнений

$$(c + Dx(t^*))' F(t^*, t_j) b(t_j) = 0, \quad j = \overline{1, s^*}, \quad (5)$$

относительно неизвестных

$$t_j, \quad j = \overline{1, s^*}. \quad (6)$$

Здесь t_j , $j = \overline{1, s^*}$, – нули коуправления $\Delta(t) = \psi'(t)b(t)$, $t \in T$, $\dot{\psi} = -A'(t)\psi$, $\psi(t^*) = c + Dx(t^*)$; $x(t^*)$ – значение в точке t^* траектории $x(t)$, $t \in T$, соответствующей управлению $u(t) = (-1)^{j+1} \gamma$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, s^*}$, $t_0 = t_*$, $t_{s^*+1} = t^*$, где $\gamma = \text{sign } \Delta(t_* + 0)$.

При $\dot{\Delta}(t_j) \neq 0$, $j = \overline{1, s^*}$, матрица Якоби системы (5) неособая. Поэтому (5) можно решить методом Ньютона. Необходимое для сходимости метода Ньютона достаточно хорошее начальное приближение элементов (6) получаем после первого этапа, решив задачу (3) с малым периодом квантования h .

Проиллюстрируем метод на примере

$$\alpha^0 = \varphi(x^0(10)) = \min \varphi(x(10)); \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = 10, \\ x_2(0) = -10, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 10], \quad \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2. \quad (7)$$

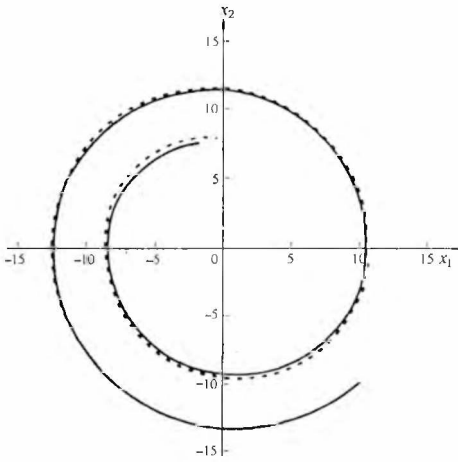


Рис. 1. Проекция траекторий задачи (7) на фазовую плоскость x_1x_2 при $m=3$

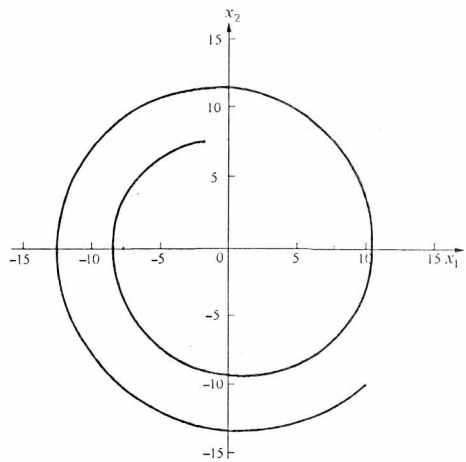


Рис. 2. Проекция траекторий задачи (7) на фазовую плоскость x_1x_2 при $m=12$

Решив кусочно-линейную аппроксимацию задачи (7) в классе дискретных управлений с $h=0,1$, получили $\alpha_{m=3}^0=7,913822$; $\alpha_{m=12}^0=7,648144$ и определили нули коуправления $\{2,617; 5,712; 8,9\}_{m=3}$; $\{2,358; 5,499; 8,641\}_{m=12}$. После процедуры доводки $\alpha^0=7,64635$, нули коуправления – $\{2,376; 5,518; 8,659\}$. Результаты показаны на рисунках: рис. 1 соответствует $m=3$ (пунктирной линией изображена фазовая траектория кусочно-линейной аппроксимации задачи (7), сплошной – оптимальная траектория задачи (7)); рис. 2 соответствует $m=12$ (траектории практически совпали).

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова А.И., Ракецкий В.М. Конструктивные методы оптимизации: В 5 ч. Ч. 4. Выпуклые задачи. Мн., 1987.

3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975.

Поступила в редакцию 06.12.2002.

Татьяна Георгиевна Хомицкая – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 519.24

С.Л. ЧЕХМЕНОК

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СТРОГО СИММЕТРИЧНЫХ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

In this article an algorithm of calculating a density and a function of distribution for symmetric stable random values is constructed.

Пусть задано некоторое фиксированное значение $x \in R$, в котором нужно вычислить значение плотности и функции распределения вероятностей