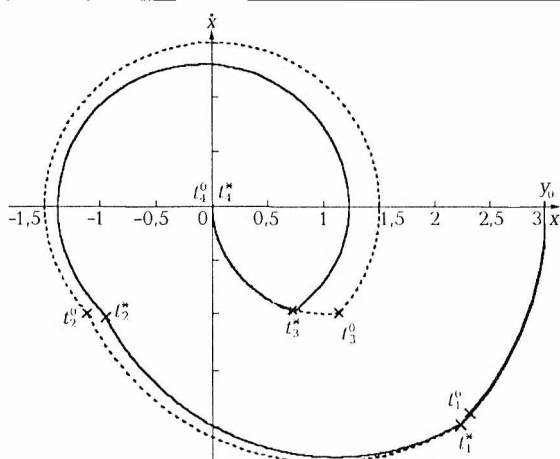




Фазовые траектории замкнутой системы (6)

Минимизируется значение

$$\int_0^T u(t) dt.$$

На рисунке штриховая линия соответствует случаю $w(t)=0, t \in T$, сплошная – случаю с возмущением. Точками $t_1^0=0,723, t_2^0=2,419, t_3^0=7,007, t_4^0=8,702, t_1^*=0,737, t_2^*=2,375, t_3^*=7,269, t_4^*=8,544$ отмечены моменты переключения соответствующих управлений, $u^0(0)=u^{**}(0)=0$.

1. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1963.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Покатаев А.В. Конструктивные методы оптимизации: В 5 ч. Мн., 1998. Ч. 5.
3. Коваленок Н.Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1. С. 96.

Поступила в редакцию 11.04.2002.

Наталья Николаевна Коваленок – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 517.926.4

Т.Г. КРАСОВСКАЯ

О ЧИСЛЕ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ БОЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

The sharp estimate of the number of different lower and higher Bohl exponents of linear diagonal differential systems is obtained.

Рассмотрим линейную диагональную систему

$$\dot{x} = A(t)x = \text{diag} [a_1(t), \dots, a_n(t)]x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами. Нижняя функция Боля ненулевого решения $x(\cdot, \alpha)$, $x(0, \alpha) = \alpha$, системы (1) определяется равенством $\bar{\beta}_A(\alpha) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \tau \rightarrow +\infty} (t - \tau)^{-1} \ln[|x(t, \alpha)| / |x(\tau, \alpha)|]$ (для нижней функции Боля $\underline{\beta}_A$ верхний предел заменяется нижним). В работе [1] получена точная оценка для числа различных элементов множества значений функций $\bar{\beta}_A(\alpha)$ и $\underline{\beta}_A(\alpha)$ диагональной системы (1) с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами. В данной статье показано, что эта оценка достигается уже на системах с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами.

Теорема. Для любых натуральных n и $m \leq 2^n - 1$ существует n -мерная линейная диагональная дифференциальная система (1) с бесконечно дифференцируемой ограниченной матрицей коэффициентов, все производные ко-

торой ограничены (своим для каждой из них числом), функция $\beta_{-A}(\alpha)$ которой принимает ровно m различных значений.

Доказательство. 1. Пусть $m=2^n-1$. Обозначим через $\mathfrak{N}_n$ совокупность всех непустых подмножеств множества $N_n=\{1, \dots, n\}$; $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, где $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i \in N_n$, двоичную запись числа $l \in N_{2^n-1}$, дополненную спереди нулями до n знаков; $\alpha_l=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in R^n \setminus \{0\}$; $B=\{b_i; b_i \in R, i=1, 2^n-1\}$, – множество, для элементов которого выполняются неравенства $b_{i+1} > b_i$, $\forall i \in N_{2^n-2}$. Зададим биекцию $\varphi: N_{2^n-1} \rightarrow \mathfrak{N}_n$, $\varphi(l)=\{i \in N_n; \varepsilon_i=1\}$. На оси времени t выберем точки δ_k , $k \in Z_0$: $\delta_0=0$, $\delta_{k+1}-\delta_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, $2\delta_{2k-1}-\delta_{2k-2}=\delta_{2k}$, $\forall k \in N$, и определим функцию $\mu(i, k, n)$, $k \in N$, $i=1, n$, равную 1 при $i \in \varphi(l)$ и равную 0 при $i \notin \varphi(l)$, $l \in N_{2^n-2}$, $k \equiv l \pmod{2^n-2}$, функцию $e(t, a, b)$, равную 0 при $t \in [0, a]$, равную $\exp[-(t-a)^2 \exp[-(t-b)^2]]$ при $t \in (a, b)$ и равную 1 при $t \in (b; +\infty)$ из класса $C_{[0;+\infty)}^\infty$ и имеющую ограниченные производные любого порядка, а также функции $\Phi_{1,i,k,n}(t)=b_i \mu(i, k, n)-b_{2^n-1}(\mu(i, k, n)-1)$, $\Phi_{3,i,k,n}(t)=\Phi_{1,i,k+1,n}(t)$, $\Phi_{2,i,k,n}(t)=(b_{2^n-1}-b_i)\mu(i, k, n)+b_{2^n-1}$, $t \in [0; +\infty)$, из того же класса.

Коэффициенты искомой диагональной системы (1) имеют вид

$$a_i(t) = \Phi_{1,i,1,n}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 [\Phi_{j+1,i,k,n}(t) - \Phi_{j,i,k,n}(t)] e(t, \delta_{2k+j-2} - \Delta, \delta_{2k+j-2}), \quad (2)$$

$(0, \delta_1/2) \ni \Delta$ – фикс. Так как при $\forall t \in (0; +\infty)$ в состав бесконечной суммы входит не более двух ненулевых слагаемых, то функции $a_i(t) \in C_{[0;+\infty)}^\infty$. Из определения (2) этих функций следует также их ограниченность: $|a_i(t)| \leq 2b_{2^n-1} - b_1$. Учи-

тывая, что $\Phi_{j,i,k,n}(t) = \text{const}$, $j=1, 2$, производные n -го порядка функций $a_i(t)$

имеют вид $a_i^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 [\Phi_{j+1,i,k,n}(t) - \Phi_{j,i,k,n}(t)] e^{(n)}(t, \delta_{2k+j-2} - \Delta, \delta_{2k+j-2})$,

$t \in (0; +\infty)$. В силу ограниченности производной $e^{(n)}(t, \delta_{2k+j-2} - \Delta, \delta_{2k+j-2})$ получаем ограниченность на $[0; +\infty)$ производных любого порядка коэффициентов построенной системы.

Покажем, что для функции β_{-A} построенной системы (1) верно равенство

$$\beta_{-A}(\alpha_l) = b_l, \quad \forall l \in N_{2^n-1}. \quad \text{Для } l < 2^n-1 \text{ вычислим величину } \chi_1(t, \tau, \alpha_l) = (t-\tau)^{-1} \ln[\|x(t, \alpha_l)\|_\infty / \|x(\tau, \alpha_l)\|_\infty] \text{ при } t, \tau \in [\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1}), \text{ где } \|x\|_\infty = \max_{i \in N_n} |x_i| -$$

кубическая норма вектора. Для решения $x(t, \alpha_l)$ построенной системы (1) в

силу задания функций $a_i(t)$ справедливо равенство [1]: $x_i(\delta_{2k-2}) =$

$$= \varepsilon_i \exp\{b_{2^n-1} \delta_{2k-2}\}, \quad \forall i=1, n, k \in N. \text{ Из него и с учетом того, что в силу опреде-}$$

ления биекции φ числа $\varepsilon_i=1$ тогда и только тогда, когда $i \in \varphi(l)$, а также из

задания функций $a_i(t)$, которые на промежутках $[\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1}-\Delta)$, $[\delta_{2k-1}-\Delta, \delta_{2k-1})$,

$k \equiv l \pmod{2^n-2}$, при $i \in \varphi(l)$ имеют вид $a_i(t) = b_i$ и $a_i(t) = b_l + 2(b_{2^n-1} - b_l)e(t, \delta_{2k-1}-\Delta,$

$\delta_{2k-1})$ соответственно, получаем следующие выражения для нормы решения:

$$\|x(t, \alpha_l)\|_\infty = \exp[b_{2^n-1} \delta_{2k-2} + b_l(t - \delta_{2k-2})] \quad \text{при } t \in [\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1}-\Delta), \quad \|x(t, \alpha_l)\|_\infty =$$

$$= \exp[b_{2^{n-1}} \delta_{2k-2} + [b_l + 2(b_{2^{n-1}} - b_l)e(t, \delta_{2k-1} - \Delta, \delta_{2k-1})](t - \delta_{2k-2})], \quad t \in [\delta_{2k-1} - \Delta, \delta_{2k-1}).$$

Следовательно, если $k \equiv l \pmod{2^n - 2}$, получаем

$$\chi(t, \tau, \alpha_l) \geq b_l, \quad t, \tau \in [\delta_{2k-2}, \delta_{2k-1}). \quad (3)$$

В силу определения (2) коэффициентов системы (1), так же как и в [1], получаем на рассматриваемых промежутках и оценку

$$\chi_\lambda(t, \tau, \alpha_l) > b_l, \quad k \equiv q \pmod{2^n - 2}, \quad q \in N_{2^{n-1}}, \quad q \neq l. \quad (4)$$

Для $t, \tau \in [\delta_{2k-1}, \delta_{2k})$, $k \in N$, аналогично получаем неравенство

$$\chi_\lambda(t, \tau, \alpha_l) > b_l. \quad (5)$$

В [1] доказано, что $\beta_A(\alpha) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \rightarrow +\infty \\ t, \tau \in [\delta_k, \delta_{k+1}]}} \chi(t, \tau, \alpha)$. Тогда, учитывая оценки

(3) – (5), получаем требуемое равенство $\beta_A(\alpha_l) = b_l$. Равенство $\beta_A(\alpha_{2^{n-1}}) = b_{2^{n-1}}$ доказывается так же, как в [1]. Вследствие доказанной в [1] оценки для мощности множества значений функции β_A она принимает ровно $2^n - 1$ различных значений.

II. Случай $m < 2^n - 1$ рассматривается, как и в [1].

Замечание. Аналогичная теорема верна и для функции $\bar{\beta}_A$.

1. Конюх А. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1992. № 1. С. 44.

Поступила в редакцию 26.11.2002.

Татьяна Геннадьевна Красовская – аспирант кафедры высшей математики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, доцент С.А. Мазаник.

УДК 519.62

В.В. БОБКОВ, И.А. КУЧМИЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

The method for the numerical solution of the initial value problem for the systems of ordinary differential equations is proposed. It is based on Fourier series expansion of a part of the equivalent integral equation, and has the additional parameter besides the discretization step for controlling its accuracy of approximation.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в векторном виде:

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(t) = y, \quad t \leq x \leq t + \tau. \quad (1)$$

В качестве основы для построения методов численного решения задачи (1) будем использовать интегральное соотношение

$$u(t + \tau\beta) = y + \tau \int_0^\beta \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (2)$$

где $\varphi(\alpha) = f(t + \alpha\tau, u(t + \alpha\tau))$, $\beta = \frac{x-t}{\tau}$, $0 \leq \beta \leq 1$.

В работе [1] предлагается способ аппроксимации (2), основанный на разложении в ряд Фурье подынтегрального выражения в правой части (2). Здесь же мы рассмотрим подход, использующий разложение в ряд всего интеграла.