4. Каменков Г.В. Избранные труды: В 2 т. Т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. М., 1972.
5. Калитин Б.С. Динамические процессы и их устойчивость. Якутск, 1987. С. 78.

Поступила в редакцию 18.09.2001.

***Борис Сергеевич Калитин*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

*УДК 517.44*

*Е.В. ГРОМАК*

# ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУВЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Generalized integral transform involving Struve function in the kernel is studied in the weighed spaces of $r$-summable functions. Mapping properties such as the boundedness, the representation and the range of the considered transform are given, and the inversion formulae are established.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x) = x^{\sigma}\int_0^{\infty} \mathbb{H}_{\eta}(\lambda x^a t^b) t^{\omega} f(t)dt \qquad (x>0) \tag{1}$$

с комплексными $\sigma$, $\omega$ и действительными $a>0$, $b>0$, $\lambda>0$, содержащее функцию Струве $\mathbb{H}_{\eta}(z)$ в ядре [1, с. 46]. Это преобразование определено для непрерывных функций $f\in C_0$ на $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$. При $\sigma=\omega=1/2$ и $a=b=\lambda=1$ преобразование (1) принимает вид классического преобразования Струве

$$(\mathcal{H}_{\eta} f)(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xt}\,\mathbb{H}_{\eta}(xt) f(t)dt \qquad (x>0). \tag{2}$$

Это преобразование, возникающее в осесимметрической теории потенциала [2], впервые было рассмотрено Титчмаршем [3] в качестве одного из взаимно обратных преобразований в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}_+)$. В связи с этим см. [4, с. 277, 280] и [5, гл. 9, 10]. Действие в пространстве $\mathcal{L}_r\,\mathbf{R}_+$ $(1<r<\infty)$ преобразования (1), в котором $\eta$ заменено на $\eta-1/2$, $\sigma=\rho+1/2-\eta$, $\omega=1/2-\eta$ и $a=b=\lambda=1$, было изучено в [6], а преобразования (1) с $\sigma=1$, $\omega=-1$, $a=1/2$, $b=-1/2$ и $\lambda=2$ – в специальных пространствах $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ в [7, 8] и [9, теорема 36.13]. Формулы обратного преобразования для некоторых модифицированных преобразований Струве были получены авторами [10] и [11] в пространстве $\mathcal{L}_{\nu,1}$ функций $f$ таких , что $t^{\nu}f(t)\in\mathcal{L}_1(\mathbf{R}_+)$.

В работах [2, 12–16] преобразование (2) было исследовано в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\nu,r}$, измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций $f$ на $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$, для которых $\|f\|_{\nu,r}<\infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r} = \left(\int_0^{\infty} |t^{\nu} f(t)|^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \qquad (1<r<\infty, \nu\in\mathbf{R}).$$

В [2, 12–16] были даны условия ограниченности и взаимной однозначности оператора $\mathcal{H}_{\eta}$, различные формы интегральных представлений и описание образа, а также установлены формулы обращения. Исследования в [2, 12–15] опирались на технику мультипликаторов Меллина для интегральных преобразований вида (2). Другой подход к изучению указанных свойств $\mathcal{H}_\eta$-преобразования в $\mathcal{L}_{\nu,r}$, основанный на свойствах более общего *H*-преобразования, был предложен в [16].

В данной работе применяются результаты из [16] для исследования интегрального преобразования (1) в $\mathcal{L}_{\nu,r}$. Даются условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1), различные формы интегральных представлений и описание образов этих операторов в $\mathcal{L}_{\nu,r}$; устанавливаются формулы обращений.

Покажем, что обобщенное преобразование (1) может быть представлено как композиция преобразования Струве (2) и элементарных операторов $M_\varsigma$, $W_\delta$ и $N_a$, определяемых как:

$$(M_\varsigma f)(x) = x^\varsigma f(x) \qquad (\varsigma \in C),$$

$$(W_\delta f)(x) = f\left(\frac{x}{\delta}\right) \qquad (\delta \in R_+),$$

$$(N_a f)(x) = f(x^a) \qquad (a \in R,\ a \neq 0).$$

Заменяя в (1) $x$ на $x^{1/a}$ и делая замену переменных $\lambda t^b = \tau$, имеем

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x^{1/a}) = x^{\sigma/a}\int_0^\infty \mathbb{H}_\eta(\lambda x t^b) t^\omega f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{b}\lambda^{-(\omega+1)/b} x^{\sigma/a-1/2}\int_0^\infty (x\tau)^{1/2}\mathbb{H}_\eta(x\tau)\tau^{(\omega+1)/b-3/2} f\left(\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{1/b}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{b}\lambda^{-(\omega+1)/b}(M_{\sigma/a-1/2}\mathcal{H}_\eta M_{(\omega+1)/b-3/2}W_\lambda N_{1/b} f)(x).$$

Применяя к последнему равенству оператор $N_a$, получаем следующее представление обобщенного преобразования Струве (1):

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x) = \frac{1}{b}\lambda^{-(\omega+1)/b}(N_a M_{\sigma/a-1/2}\mathcal{H}_\eta M_{(\omega+1)/b-3/2}W_\lambda N_{1/b} f)(x) \tag{3}$$

или

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x) = \frac{1}{b}\lambda^{-(\omega+1)/b}(M_{\sigma-a/2}N_a\mathcal{H}_\eta M_{(\omega+1)/b-3/2}W_\lambda N_{1/b} f)(x), \tag{4}$$

если учесть операторное соотношение

$$N_a M_\varsigma = M_{a\varsigma} N_a.$$

Известно, что для преобразования (2) справедливо представление [16]

$$(\mathcal{H}_\eta f)(x) = 2^{-\eta-1}\sqrt{\pi}\int_0^\infty H_{2,3}^{1,1}\left[xt\left|\begin{matrix}\left(\frac{3}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right)\\ \left(\frac{3}{2}+\eta,1\right),\left(\frac{1}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]f(t)dt, \tag{5}$$

где под интегралом стоит *H*-функция [17, § 8.3]. Тогда $\mathcal{L}_{\nu,r}$-теория обобщенного преобразования (1) будет следовать из соответствующих утверждений для преобразования (5) [16, теоремы 3, 7] и представлений (3), (4) для оператора $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}$.

Приведем некоторые предварительные сведения. Для функции $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ при $1 \le r \le 2$ и $\nu \in \mathbf{R}$ определено преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$, которое при $f \in \mathcal{L}_{\nu,r} \cap \mathcal{L}_{\nu,1}$ и Re $s=\nu$ совпадает с классическим преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(x)=\int_0^\infty t^{s-1}f(t)dt.$$

Для двух банаховых пространств $X$ и $Y$ будем обозначать через $[X, Y]$ множество всех линейных ограниченных операторов из $X$ в $Y$.

Нам потребуется также преобразование Ханкеля, определяемое следующим равенством:

$$\left(\mathbf{H}_\varsigma f\right)(x)=\int_0^\infty \sqrt{xt}\,\mathbf{J}_\varsigma(xt)f(t)dt \quad (\varsigma\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re}\ \varsigma>-1, x>0).$$

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\theta=\frac{1}{b}(\nu-\operatorname{Re}\ \omega-1)-\frac{3}{2},$$

$$k=\frac{a}{b}(\operatorname{Re}\ \omega-\nu+1)-\operatorname{Re}\ \sigma,$$

$$k^*=\frac{b}{a}(\nu-\operatorname{Re}\ \sigma-1)+\operatorname{Re}\ \omega+1$$

и для $1<r<\infty$ $\gamma(r)$ определяется равенством

$$\gamma(r)=\max\left[\frac{1}{r},\frac{1}{r'}\right]\quad\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1\right). \tag{6}$$

Из соотношения (3) и результатов работы [16] для преобразования Струве (2) вытекают следующие утверждения, характеризующие $\mathcal{L}_{\nu,2}$- и $\mathcal{L}_{\nu,r}$-теории обобщенного преобразования Струве (1).

**Теорема 1.** Пусть $1/2+\operatorname{Re}\ \eta\leq\theta<5/2+\operatorname{Re}\ \eta$, где $\operatorname{Re}\ \eta\geq0$. Тогда верны следующие утверждения.

**а)** Преобразование $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}$ является изоморфизмом $\mathcal{L}_{\nu,2}$ на $\mathcal{L}_{k,2}$, и при $\operatorname{Re}\ s=k$ его преобразование Меллина задается формулой

$$(\mathfrak{M}\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}f)(s)=\frac{2^{-\eta-1}\sqrt{\pi}}{a}\lambda^{-(s+\sigma)/a}\times$$

$$\times\mathcal{H}_{2,3}^{1,1}\left[\left.\begin{matrix}\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(1+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right)\\(1+\eta,1),\left(-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right|\frac{s+\sigma}{a}\right](\mathfrak{M}f)\left(\omega+1-\frac{b}{a}(s+\sigma)\right). \tag{7}$$

Если $\theta=1/2$ и $\theta\leq1/2+\operatorname{Re}\ \eta$ или $\theta\geq3/2+\operatorname{Re}\ \eta$ для $\operatorname{Re}\ s=k$, то преобразование $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}$ биективно отображает $\mathcal{L}_{\nu,2}$ на $\mathcal{L}_{k,2}$.

**б)** Если $f\in\mathcal{L}_{\nu,2}$ и $g\in\mathcal{L}_{k^*,2}$, то справедливо равенство

$$\int_0^\infty f(x)(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}g)(x)dx=\int_0^\infty g(x)(\mathcal{H}_{\eta;\omega,\sigma;b,a,\lambda}f)(x)dx. \tag{8}$$

**в)** Пусть $f\in\mathcal{L}_{\nu,2}$, $\alpha\in\mathrm{C}$ и $h>0$. Если $\operatorname{Re}\ \alpha>(1-\theta)h-1$, то почти для всех $x>0$ справедливо представление

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}f)(x)=\frac{2^{-\eta-1}\sqrt{\pi}}{a}h\lambda^{-1/2}x^{\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}x^{a(\alpha+1)/h}\int_0^\infty H_{3,4}^{1,2}\left[\lambda x^a t^b\left|\begin{matrix}(-\alpha,h),\left(\frac{3}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right)\\\left(\frac{3}{2}+\eta,1\right),\left(\frac{1}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),(-\alpha-1,h)\end{matrix}\right.\right]\times$$

$$\times t^{\omega-b/2} f(t)dt. \qquad (9)$$

Если Re $\alpha<(1-\theta)h-1$, то

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x) = -\frac{2^{-\eta-1}\sqrt{\pi}}{a} h\lambda^{-1/2} x^{\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h} \times$$

$$\times \frac{d}{dx} x^{a(\alpha+1)/h} \int_0^\infty H_{3,4}^{2,1}\left[\lambda x^a t^b \left| \begin{matrix} \left(\frac{3}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),(-\alpha,h) \\ (-\alpha-1,h),\left(\frac{3}{2}+\eta,1\right),\left(\frac{1}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right.\right] \times$$

$$\times t^{\omega-b/2} f(t)dt. \qquad (10)$$

**г)** Если $\theta>1/2$, то $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f$ задается равенством (1) для $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$.

**Теорема 2.** Пусть $1<r<\infty$ и $1/2+\mathrm{Re}\,\eta\leq\theta<5/2+\mathrm{Re}\,\eta$, где $\gamma(r)$ задается равенством (6). Тогда:

**а)** для всех $s\geq r$ таких, что $s'\geq\theta^{-1}$ и $1/s+1/s'=1$, преобразование $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}$, определенное в $\mathcal{L}_{\nu,2}$, может быть продолжено в $\mathcal{L}_{\nu,r}$ как элемент $\left[\mathcal{L}_{\nu,r},\ \mathcal{L}_{k,s}\right]$;

**б)** если $1<r\leq 2$, то преобразование $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}$ является изоморфизмом на $\mathcal{L}_{\nu,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (7) для Re $s=k$ и $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$;

**в)** для функций $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k',s}$, где $1<r$, $s<\infty$, $1/r+1/s\geq 1$ и $\max\{\gamma(s), \gamma(r)\}\leq\theta<5/2+\mathrm{Re}\,\eta$, справедливо равенство (8);

**г)** если $\theta\leq 1/2+\mathrm{Re}\,\eta$ или $\theta\geq 3/2+\mathrm{Re}\,\eta$ для Re $s=k$, то преобразование $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}$ является изоморфизмом на $\mathcal{L}_{\nu,r}$. Если мы положим $\xi=\mathrm{Re}\,\eta+1$, то

$$\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r}) = (N_a M_{\sigma/a-1/2}\mathbf{H}_\xi)(\mathcal{L}_{\nu,r}). \qquad (11)$$

Если предположение г) не выполняется, то $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}(\mathcal{L}_{\nu,r})$ является подмножеством правой части (11);

**д)** если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, $\alpha\in\mathbf{C}$ и $h>0$, то при $\gamma(r)\leq\theta<5/2+\mathrm{Re}\,\eta$ интегральное представление $\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f$ задается равенством (9) и (10) для Re $\alpha>(1-\theta)h-1$ и Re $\alpha<(1-\theta)h-1$ соответственно. Если $\theta>1/2$, то справедлива формула (1).

Из представления (3) и формулы обращения для преобразования Струве [16] вытекают следующие утверждения об обратимости оператора (1) в $\mathcal{L}_{\nu,r}$.

**Теорема 3.** Пусть $1<r<\infty$, $\gamma(r)\leq\theta$ и $1/2+\mathrm{Re}\,\eta<\theta<5/2+\mathrm{Re}\,\eta$, $-1/2+|\mathrm{Re}\,\eta|<\theta<\min[7/2+\mathrm{Re}\,\eta, 1]$. Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, то при Re $\alpha>\theta h-1$ справедливо равенство

$$f(x) = 2^{-\eta-1}\sqrt{\pi} h a \lambda^{-5/2-(\alpha+1)/h} x^{3b/2-\omega-b(\alpha+1)/h\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h} \times$$

$$\times \frac{d}{dx} x^{b(\alpha+1)/h} \int_0^\infty H_{3,4}^{2,2}\left[\lambda x^a t^b \left| \begin{matrix} (-\alpha,h),\left(-\frac{3}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{2}-\eta,\frac{1}{2}\right),(-\alpha-1,h) \end{matrix}\right.\right] \times$$

$$\times t^{3a/2-\sigma-1} (\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(t)dt.$$

Если Re $\alpha>0h-1$, то

$$f(x) = -2^{-\eta-1}\sqrt{\pi} h a \lambda^{-5/2-(\alpha+1)/h} x^{3b/2-\omega-b(\alpha+1)/h\sigma+1-a/2-a(\alpha+1)/h} \times$$

$$\times \frac{d}{dx} x^{b(\alpha+1)/h} \int_0^\infty H_{3,4}^{3,1}\left[\lambda x^a t^b \left| \begin{matrix} (-\alpha,h),\left(-\frac{3}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{4}+\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4}-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{2}-\eta,\frac{1}{2}\right),(-\alpha-1,h) \end{matrix}\right.\right] \times$$

$$\times t^{3a/2-\sigma-1}(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda}f)(t)dt.$$


1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974.
2. Rooney P.G. // Canad. J. Math. 1980. Vol. 35. P. 1024.
3. Titshmarsh E.C. // Proc. London Math. Soc. 1923 Vol. 22. P. XXXIV.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: В 2 т. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М., 1970.
6. Hardy G.H. // Proc. London Math. Soc. 1924. Vol. 23. P. LXI.
7. Okikioulu G.O. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1966. Vol. 62 P. 477; 1970. Vol. 67. P. 583.
8. Marichev O.I., Vu Kim Tuan // Analysis and Applications '85 (Varna, 1985). Sofia, 1986. P. 418.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.
10. McKellar B.H.J., Box M.A., Love E.R. // J. Austral. Math. Soc., Ser. B. 1983. Vol. 25. P. 161.
11. Love E.R. // Res. Notes in Math. 1985. Vol. 138. P. 75.
12. Rooney P.G. // Canad. Math. Bul. 1994. Vol. 37. P. 545.
13. Rooney P.G. // Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A. 1995. Vol. 125. P. 449.
14. Heywood P., Rooney P.G. // Canad. J. Math. 1988. Vol. 40. P. 989.
15. Heywood P., Rooney P.G. // SIAM J. Math. Anal. 1994. Vol. 25. P. 450.
16. Kilbas A.A., Gromak E.V. // Integral Transforms Spec. Funct. 2002. Vol. 13. P. 259.
17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: В 3 т. Т. 3. Дополнительные главы. М., 1986.


Поступила в редакцию 03.12.2002.

*Елена Валерьевна Громак* – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.А. Килбас.

*УДК 517.925*

*А.В. ЧИЧУРИН*

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯМИ АБЕЛЯ

The existence map between the nonlinear differential equation of the second order and Abel equations is prove.

В работе [1] для уравнения Абеля первого рода

$$y' = a_0\, y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 \qquad (1)$$

($a_i (i = \overline{0,3})$ – произвольные аналитические функции по $x$) была приведена процедура, сводящая это уравнение к уравнению второго порядка

$$\begin{gathered}(3a_0\gamma + a_1)\gamma'' = 5a_0\gamma'^2 + (20a_0^2\gamma^3 + 20a_0a_1\gamma^2 + (3a_0' + 6a_1^2 + 2a_0a_2)\gamma + \\ + a_1' - 7a_0a_3 + 3a_1a_2)\gamma' - 16a_0^3\gamma^6 - 32a_0^2a_1\gamma^5 - 20a_0(a_0a_2 + a_1^2)\gamma^4 - \\ -(2(11a_0a_1a_2 + 7a_0^2a_3 + 2a_1^3) - 2(a_0a_1' - a_0'a_1))\gamma^3 - \\ -(2(7a_0a_1a_3 + 2a_0a_2^2 + 3a_1^2a_2) - 3(a_0a_2' - a_0'a_2))\gamma^2 - \\ -(2(a_1a_2^2 + a_0a_2a_3 + 2a_1^2a_3) - 3(a_0a_3' - a_0'a_3) - \\ -(a_1a_2' - a_1'a_2))\gamma - 2a_3(a_1a_2 - a_0a_3) + a_1a_3' - a_1'a_3.\end{gathered} \qquad (2)$$

Там же была отмечена актуальность исследования уравнения (2) для исследования уравнений (1). В данной работе уравнение (2) рассматривается с