УДК 33:517.925

Б.С. КАЛИТИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МОНОПОЛЬНОГО РЫНКА

The full research of stability of a dynamic model of the monopoly market is conducted.

Целью настоящей статьи является исследование устойчивости равновесия рынка типа «чистая монополия». Такая модель следует из уравнений модели [1] при n=1. Она представляется системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{v(p-p^0)}{p-p^*} - \dfrac{d(p-p^0)}{p^{**}-p} + r(pq - p^0q^0), \\ \dfrac{dq}{dt} = -g(p-p^0) - m(q-q^0) \end{cases} \qquad (1)$$

при $v>0$, $d>0$, $r>0$, $g\geq 0$, $m\geq 0$, $p^* < p < p^{**}$, $p^* < p^0 < p^{**}$,

где p и p^0 – текущая и равновесная цены, q, q^0 – текущий и равновесный объемы продаж, p^* и p^{**} – нижнее и верхнее пороговые значения цен соответственно. Экономический смысл остальных параметров системы подробно изложен в [1]. Добавим только, что из экономических соображений, вообще говоря, следуют ограничения и на величину объема продаж в виде неравенства $q^* < q < q^{**}$. Здесь значение q^* можно трактовать как минимально возможное количество товара; q^{**} – либо как максимальную величину спроса на предлагаемый товар, либо как максимально возможный потенциал производственных мощностей монополиста. Однако формально мы эти ограничения здесь учитывать не будем.

Для исходной модели замена $x = p - p^0$, $y = q - q^0$ дает систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{vx}{x+p'} - \dfrac{dx}{p''-x} + rq^0x + rp^0y + rxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -gx - my \end{cases} \qquad (2)$$

при $m\geq 0$, $g\geq 0$, $v>0$, $d>0$, $r>0$, $q^0>0$, $p^0>0$, $-p'<x<p''$,

где величины $p' = p^0 - p^*$ и $p'' = p^{**} - p^0$ можно трактовать как цену выигрыша для продавца и покупателя соответственно. Исследуемое на устойчивость равновесие экономической модели отвечает началу координат x=0, y=0. Разложим правую часть (2) в ряд Тейлора в окрестности этой точки. Тогда система примет вид

$$\frac{dx}{dt} = -Sx + rp_0y + rxy + \sum_{j=2}^{\infty} H_j x^j, \quad \frac{dy}{dt} = -gx - my, \qquad (3)$$

где $S = \dfrac{v}{p'} + \dfrac{d}{p''} - rq_0$ есть запас прочности рынка [2], а коэффициенты разложения представляются равенствами $H_j = (-1)^j \dfrac{v}{(p')^j} - \dfrac{d}{(p'')^j}$, j=2, 3, 4, … .

Выпишем характеристическое уравнение системы линейного приближения для (3):

$$\lambda^2 + \lambda(S+m) + Sm + grp^0 = 0. \qquad (4)$$

Поскольку условия устойчивости экономического равновесия зависят от соотношений между параметрами системы, рассмотрим несколько случаев. С этой целью предварительно отметим все возможные состояния равновесия (2).

Точки покоя (2) находятся из системы уравнений

$$-\frac{vx}{x+p'}-\frac{dx}{p''-x}+rq^0x+rp^0y+rxy=0,\ -gx-my=0,$$

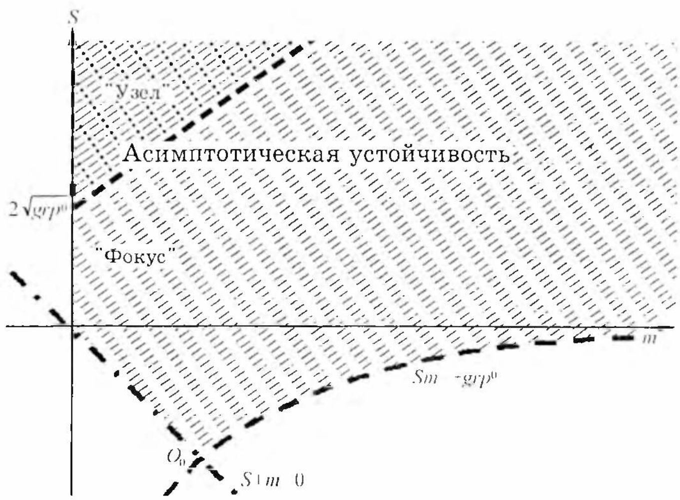
анализ которых показывает следующее. Если $Sm+grp^0>0$, $m\neq 0$, то система (2) может иметь одну, две или три точки покоя вида $(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$, где $-p'<x^*<0$. Если $m=0$, $g\neq 0$, то единственной точкой покоя будет начало координат.

При $Sm+grp^0=0$, $m\neq 0$, $g\neq 0$, точки покоя $(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$ находятся как решение $x=x^*$ квадратного уравнения $x^2+x(p''-p'+\frac{m}{gr}(S+rq^0))+p''p'(H_2-\frac{gr}{m})=0$.

1. Основной случай. Если действительные части корней (4) отличны от нуля, то теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению дает следующий результат.

Теорема 1. *Если выполнены условия $S+m>0$, $Sm+grp^0>0$, то равновесная цена $p=p^0$ и равновесный объем продаж $q=q^0$ асимптотически устойчивы.*

Если же $Sm+grp^0<0$ или $S+m<0$, $Sm+grp^0>0$, то это равновесие неустойчиво.



Область асимптотической устойчивости
на плоскости параметров (m, S)

Область асимптотической устойчивости системы (2) удобно представить на плоскости двух переменных: запаса прочности S и коэффициента эффекта насыщения m (рисунок). Здесь заштрихованная область соответствует асимптотической устойчивости равновесия, причем штрихпунктир соответствует особой точке типа «узел» (на оси OS граница этой области начинается в точке $2\sqrt{grp^0}$), а пунктир – в особой точке типа «фокус». Нетрудно видеть, что границы этой области ($S+m=0$, $Sm+grp^0=0$) будут соответствовать критическим случаям [3].

2. Критический случай одного нулевого корня. Пусть характеристическое уравнение (4) удовлетворяет условиям

$$S+m>0, \quad Sm+grp^0=0,$$

т. е. один его корень равен нулю, а второй отрицателен.

Проведение необходимых исследований в соответствии с теорией критического случая с одним нулевым корнем [3] приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *Если* $S+m>0$, $Sm+rgp^0=0$, $H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = \frac{gr}{m}$, *то равновесная цена* $p=p^0$ *и равновесный объем продаж* $q=q^0$ *асимптотически устойчивы.*

Если же $H_2 \neq \frac{gr}{m}$, *то равновесие неустойчиво.*

Замечание 1. Отметим, что при выполнении всех требований теоремы 2 система (2) наряду с началом координат будет иметь второе равновесие $(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$, если выполняются условия

$$g(2p^0-p^{**}) < q^0 m < g(2p^0-p^*). \qquad (5)$$

3. Критический случай двух нулевых корней. Условия существования двух нулевых корней уравнения (4) задаются равенствами $Sm+grp^0=0$, $S+m=0$. Теория данного критического случая изложена в [4]. Она дает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $S+m=0$, $Sm+grp^0=0$. *Тогда равновесие* $p=p^0$, $q=q^0$ *системы* (1) *будет устойчивым при*

$$H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = \frac{gr}{m}$$

и неустойчивым при $H_2 \neq \frac{gr}{m}$.

Здесь также система (1) будет иметь второе равновесие $(x^*, -\frac{g}{m}x^*)$ в области своего определения, если выполняются условия (5).

4. Критический случай пары чисто мнимых корней. Пусть теперь для (4) выполняются условия

$$S+m = 0, \ grp_0+Sm > 0.$$

Тогда собственные значения являются чисто мнимыми: $\pm(grp_0 + Sm)^{1/2} i$. Используя первый из предложенных в [3] способов исследования устойчивости данного критического случая и ограничиваясь лишь слагаемыми третьей степени, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Если выполнены условия* $S+m=0$, $Sm+grp^0>0$, *то равновесие* $p=p^0$, $q=q^0$ *системы* (1) *будет асимптотически устойчивым при*

$$3(grp_0 - m^2)gp_0H_3 + (2mp_0H_2^2 - (2m^2 + grp_0)H_2 + mgr) < 0 \qquad (6)$$

и неустойчивым при

$$3(grp_0 - m^2)gp_0H_3 + (2mp_0H_2^2 - (2m^2 + grp_0)H_2 + mgr) > 0. \qquad (7)$$

Добавим, что неравенство (6) обеспечивает особую точку типа устойчивый «фокус», а неравенство (7) – неустойчивый «фокус». Если же левая часть (6) равна нулю, то для исследования устойчивости необходимо рассмотрение слагаемых степени выше третьей в разложении правой части (3).

5. Отсутствие эффекта насыщения (m=0). Здесь условие устойчивости по первому приближению выражается неравенством S>0, а при S=0 имеет место критический случай пары чисто мнимых корней, т. е. возникает проблема «центра» и «фокуса» [3]. Система записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = rp_0 y + rxy + \sum_{j=2}^{\infty} H_j x^j, \quad \frac{dy}{dt} = -gx.$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда величина $H_2 = \dfrac{v}{(p')^2} - \dfrac{d}{(p'')^2} = 0$. Тогда имеем систему

$$\frac{dx}{dt} = ry(p^0 + x) + H_3 x^3 + o(x^3), \quad \frac{dy}{dt} = -gx.$$

Для исследования устойчивости в данном случае возьмем функцию Ляпунова вида

$$v(x, y) = \frac{1}{2} r y^2 + g \int_0^x \frac{s}{p^0 + s} ds. \qquad (8)$$

Если $g \neq 0$, то функция $v(x, y)$ определенно положительна в окрестности начала координат (точнее, в области G, где $x > -p^0$). Ее производная по времени в силу исследуемой системы равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{H_3 g x^4}{p^0 + x}(1 + o(1)).$$

Ясно, что $dv/dt \leq 0$ при $x > -p^0$ и dv/dt=0, только если x=0 в окрестности G начала координат при $g \neq 0$.

Проверим условия теоремы Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости [3]. На множестве, где dv/dt=0, система дает равенства $0 = rp^0 y$, dy/dt=0. Откуда следует, что y=0. Поэтому справедлива

Теорема 5. *Если выполняются условия*

$$S = \frac{v}{p'} + \frac{d}{p''} - rq^0 = 0, \ H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = 0, \ g \neq 0, \ m = 0,$$

то равновесная цена $p=p^0$ и равновесный объем продаж $q=q^0$ асимптотически устойчивы.

Исследуем теперь случай g=0, m=0. Здесь система имеет континуум точек покоя в окрестности начала координат, расположенных на оси Oy. Снова возьмем функцию Ляпунова (8): $v(x, y) = \frac{1}{2} r y^2$. Для нее производная $dv/dt \equiv 0$. На множестве $M_0 = \{(x,y) \in R^2 : v(x,y) = 0\}$ имеем y=0. Система на M_0 редуцируется в одно дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{dt} = H_3 x^3 + o(x^3)$. Поскольку $H_3 = -\dfrac{v}{(p')^3} - \dfrac{d}{(p'')^3} < 0$, то такое уравнение обладает асимптотически устойчивым равновесием x=0. Поэтому по теореме 1 [5] нулевое решение исходной системы устойчиво. Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Если выполнены условия*

$$S = \frac{v}{p'} + \frac{d}{p''} - rq^0 = 0, \ H_2 = \frac{v}{(p')^2} - \frac{d}{(p'')^2} = 0, \ m = 0, \ g = 0,$$

то равновесная цена $p=p^0$ асимптотически устойчива, а равновесный объем продаж $q=q^0$ устойчив не асимптотически.

Отметим, что слабая устойчивость объема продаж объясняется отсутствием стабилизирующих факторов: $g=0$ (сила изменения цены равна нулю) и $m=0$ (нулевой эффект насыщения).

б) Пусть теперь величина $H_2=\dfrac{v}{(p')^2}-\dfrac{d}{(p'')^2}\neq 0$. Тогда, взяв функцию Ляпунова (8), можно, опираясь на теорему Н.Г. Четаева [3], показать, что равновесие $x=0$, $y=0$ неустойчиво. А именно справедлива

Теорема 7. *Если выполнены условия*

$$S=\frac{v}{p'}+\frac{d}{p''}-rq^0=0,\ H_2=\frac{v}{(p')^2}-\frac{d}{(p'')^2}\neq 0,\ m=0,$$

то равновесная цена $p=p^0$ и равновесный объем продаж $q=q^0$ неустойчивы.

6. Независимость величины объема продаж от изменения цены (g=0). Рассмотрим частный случай, когда $g=0$, $m>0$. Здесь система будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt}=-Sx+rp_0y+rxy+\sum_{j=2}^{\infty}H_jx^j,\ \frac{dy}{dt}=-my. \tag{9}$$

Возьмем функцию Ляпунова $v(x,y)=y^2/2$. Ее производная по времени в силу системы (9) равна $dv/dt=-my^2$. По теореме 1 [5] нулевое решение системы (9) будет асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда решение $x=0$ уравнения

$$\frac{dx}{dt}=-Sx+\sum_{j=2}^{\infty}H_jx^j \tag{10}$$

асимптотически устойчиво. С учетом того, что $H_3<0$, условия асимптотической устойчивости решения $x=0$ системы (10), а следовательно, и решения $x=0$, $y=0$ системы (9) состоят в следующем: 1) $S>0$ либо 2) $S=0$, $H_2=\dfrac{v}{(p')^2}-\dfrac{d}{(p'')^2}=0$. Во всех остальных случаях решение $x=0$ системы (10) неустойчиво, а значит, и решение $x=0$, $y=0$ системы (9) также неустойчиво. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Если изменение цены не влияет на величину объема продаж, т. е. $g=0$, $m>0$, то равновесие $p=p^0$, $q=q^0$ будет асимптотически устойчивым в каждом из следующих случаев*:

$$1)\quad S>0;\ 2)\quad S=0,\ H_2=\frac{v}{(p')^2}-\frac{d}{(p'')^2}=0.$$

При $S<0$ равновесная цена $p=p^0$ неустойчива, а равновесный объем продаж $q=q^0$ асимптотически устойчив при $m>0$ и устойчив не асимптотически при $m=0$.

В заключение отметим, что на рисунке отрезок прямой OO_0 границы области асимптотической устойчивости соответствует критическому случаю пары чисто мнимых корней; точка O_0 – критическому случаю двух нулевых корней; отрезок пунктирной границы, начиная от точки O_0 вправо, – критическому случаю одного нулевого корня.

1. Калитин Б.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 28.
2. Калитин Б.С. // Там же. 1997. № 2. С. 68.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.

4. Каменков Г.В. Избранные труды: В 2 т. Т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. М., 1972.
5. Калитин Б.С. Динамические процессы и их устойчивость. Якутск, 1987. С. 78.

Поступила в редакцию 18.09.2001.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

УДК 517.44

Е.В. ГРОМАК

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУВЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Generalized integral transform involving Struve function in the kernel is studied in the weighed spaces of r-summable functions. Mapping properties such as the boundedness, the representation and the range of the considered transform are given, and the inversion formulae are established.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$(\mathcal{H}_{\eta;\sigma,\omega;a,b,\lambda} f)(x) = x^{\sigma} \int_0^{\infty} \mathbb{H}_{\eta}(\lambda x^a t^b) t^{\omega} f(t)dt \qquad (x>0) \tag{1}$$

с комплексными σ, ω и действительными $a>0$, $b>0$, $\lambda>0$, содержащее функцию Струве $\mathbb{H}_{\eta}(z)$ в ядре [1, с. 46]. Это преобразование определено для непрерывных функций $f \in C_0$ на $\mathbf{R}_+=(0, \infty)$. При $\sigma=\omega=1/2$ и $a=b=\lambda=1$ преобразование (1) принимает вид классического преобразования Струве

$$(\mathcal{H}_{\eta} f)(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xt}\, \mathbb{H}_{\eta}(xt) f(t)dt \qquad (x>0). \tag{2}$$

Это преобразование, возникающее в осесимметрической теории потенциала [2], впервые было рассмотрено Титчмаршем [3] в качестве одного из взаимно обратных преобразований в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}_+)$. В связи с этим см. [4, с. 277, 280] и [5, гл. 9, 10]. Действие в пространстве $\mathcal{L}_r \mathbf{R}_+$ $(1<r<\infty)$ преобразования (1), в котором η заменено на $\eta-1/2$, $\sigma=\rho+1/2-\eta$, $\omega=1/2-\eta$ и $a=b=\lambda=1$, было изучено в [6], а преобразования (1) с $\sigma=1$, $\omega=-1$, $a=1/2$, $b=-1/2$ и $\lambda=2$ – в специальных пространствах $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ в [7, 8] и [9, теорема 36.13]. Формулы обратного преобразования для некоторых модифицированных преобразований Струве были получены авторами [10] и [11] в пространстве $\mathcal{L}_{\nu,1}$ функций f таких , что $t^{\nu} f(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R}_+)$.

В работах [2, 12–16] преобразование (2) было исследовано в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\nu,r}$, измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbf{R}_+=(0, \infty)$, для которых $\|f\|_{\nu,r}<\infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r} = \left(\int_0^{\infty} |t^{\nu} f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \qquad (1<r<\infty, \nu \in \mathbf{R}).$$

В [2, 12–16] были даны условия ограниченности и взаимной однозначности оператора $\mathcal{H}_{\eta}$, различные формы интегральных представлений и описание образа, а также установлены формулы обращения. Исследования в [2, 12–15] опирались на технику мультипликаторов Меллина для инте-