

В результате $E(I_{421}(t))^2 \leq CMN \delta h_n(1+1/(h_n n)) \leq C \delta(1+1/(h_n n))$.

В итоге получена оценка

$$\sup_{t \in T} E \left\{ \sum_{k=1}^{m_t} f_n(B_n^1(\tau_t + (k-1)h_n), B_n^2(\tau_t + (k-1)h)) [B_n^1(\tau_t + kh_n) - B_n^1(\tau_t + (k-1)h_n)] - \right. \\ \left. - (I) \int_0^t f(B^1(s), B^2(s)) dB^1(s) - \frac{1 - K_1(n, h_n)}{2} \int_0^t f'_1(B^1(s), B^2(s)) ds \right\}^2 \leq \\ \leq Ch_n + \frac{C}{n} + \frac{C}{n\delta} + \frac{C\delta}{nh_n} + \frac{C\delta^2}{h_n}.$$

Если $1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2}$, то, положив $\delta = h_n^{1/3}/n^{1/3}$, а если $1/n^{1/2} \leq h_n$, тогда $1/(nh_n) \leq h_n$, и взяв $\delta = h_n$, получим требуемый результат.

Используя связь между интегралом Ито и θ -интегралом, получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если $K_i(n, h_n) \rightarrow (1 - 2\theta_i)$, $\theta_i \in [0; 1/2]$, $i = \overline{1, r}$, при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n^2 = o(h_n)$, то

$$\sup_{t \in T} E \left\{ \sum_{k=1}^{m_t} \sum_{i=1}^r f_n(\bar{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n)) [B_n^i(\tau_t + kh_n) - B_n^i(\tau_t + (k-1)h_n)] - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^r (\theta_i) \int_0^t f(\bar{B}(s)) dB^i(s) \right\}^2 \rightarrow 0.$$

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.

2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

3. Лазакович Н.В. // Докл. НАН Беларуси. 1994. Т. 38. № 5. С. 23.

4. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П. // Теория вероятностей и ее приложения. 1996. Т. 41. Вып. 4. С. 783.

5. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Яблонский О.Л. // Лит. мат. сб. 1999. Т. 39. № 2. С. 248.

6. Яблонский О.Л. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 22.

Поступила в редакцию 26.12.2002.

Андрей Николаевич Ковальчук – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н.В. Лазакович.

УДК 517.9

В.Г. НОВОХРОСТ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Differential equations with composition of discontinuous functions and distributions in the right-hand part are considered. It is shown that the approach based on approximation with delay differential equations is the partial case of the average-out finite-difference approach.

Решение нелинейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами связано с проблемой определения умножения обобщенных функций. Существует несколько подходов к определению решений таких дифференциальных уравнений (см., например, [1, 2]), которые, вообще го-

воря, приводят к различным результатам. Отметим, что выбор той или иной интерпретации зависит от конкретной практической задачи, которую такое уравнение описывает.

В последнее время интенсивно развивается единый подход в исследовании решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами, в том числе стохастических, основанный на аппроксимации решений таких уравнений решениями соответствующих конечно-разностных уравнений с осреднением [3, 4]. В настоящей работе будет показано, что метод, предложенный в работе [5], является частным случаем единого подхода.

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где f – произвольная функция, а $L(t)$ – функция ограниченной вариации на отрезке T . Без существенного ограничения общности будем считать, что функция $L(t)$ непрерывна справа, $L(0)=0$ и $L(a-0)=L(a)$.

В работе [5] задаче (1) ставилась в соответствие следующая задача Коши с запаздыванием:

$$\begin{cases} \dot{Y}_n(t) = f(Y_n(t-\lambda_n))\dot{L}_n(t), \\ Y_n(t)|_{[-\lambda_n, 0]} = Y_0, \quad t \in T, \end{cases} \quad (2)$$

и были показаны существование и единственность решения (2) при условиях $\lambda_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и $\lambda_n > 1/n$.

Здесь $L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)ds$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$\rho(t) \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset [0, 1]$, $\int_0^1 \rho(s)ds = 1$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t)) [L_n(t+h_n) - L_n(t)], \\ X_n(t)|_{[0, h_n]} = X_{n0}(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (3)$$

где $f_n(t) = (f * \rho_n)(t)$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T . Тогда t можно представить в виде $t = \tau_i + m_i h_n$, где $\tau_i \in [0, h_n)$, $m_i \in \mathbb{N}$.

Несложно видеть, что решение системы (3) можно записать в виде

$$X_n(t) = X_{n0}(\tau_i) + \sum_{k=0}^{m_i-1} f_n(X_n(\tau_i + kh_n)) [L_n(\tau_i + (k+1)h_n) - L_n(\tau_i + kh_n)]. \quad (4)$$

Связь между решениями задач (2) и (3) устанавливает следующая

Теорема. Пусть $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, $L(t)$ – функция ограниченной вариации на отрезке T . Тогда при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n = o(h_n)$, $\lambda_n \rightarrow 0$ так, что $\lambda_n > 1/n$ для всех $t \in T$ $|X_n(t) - Y_n(t)| \rightarrow 0$, где $X_n(t)$, $Y_n(t)$ – решения задач (3) и (2) соответственно, если для любого $t \in T$ выполняется $|X_{n0}(\tau_i) - Y_0| \rightarrow 0$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. Пусть для любого n справедливо неравенство

$$Z_{n+1} \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n B_k Z_k, \quad (5)$$

где A, A_k, B_k – некоторые положительные константы и $Z_k > 0, k = \overline{1, n}$. Тогда верно неравенство

$$Z_{n+1} \leq (A + \sum_{k=1}^n A_k) e^{\sum_{k=1}^n B_k}.$$

Доказательство. Последовательно применяя неравенство (5), получаем

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &\leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k + B_n Z_n \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + B_n (A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k = A + \sum_{k=1}^n A_k + B_n (A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k) + (B_n + 1) \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k \leq \dots \leq A + \sum_{k=1}^n A_k + \\ &+ B_n (A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k) + B_{n-1} (B_n + 1) (A + \sum_{k=1}^{n-2} A_k) + \dots + \\ &+ B_1 (1 + B_2 (1 + \dots (1 + B_{n-1} (1 + B_n)))) A \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) \prod_{k=1}^n (1 + B_n). \end{aligned}$$

Прологарифмируем левую и правую части этой цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \ln Z_{n+1} &\leq \ln \left(\left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) \prod_{k=1}^n (1 + B_n) \right) = \ln \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) + \sum_{k=1}^n \ln (1 + B_n) \leq \\ &\leq \ln \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) + \sum_{k=1}^n B_n. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $Z_{n+1} \leq \left(A + \sum_{k=1}^n A_k \right) e^{\sum_{k=1}^n B_k}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Задача Коши (2) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$Y_n(t) = Y_0 + \int_0^t f(Y_n(s - \lambda_n)) dL_n(s). \quad (6)$$

Сначала рассмотрим случай $\lambda_n = h_n$.

Обозначим $t_k = \tau_i + kh_n$. Тогда, используя представление (4), получим

$$\begin{aligned} |X_n(t) - Y_n(t)| &= \left| X_{n0}(\tau_i) + \sum_{k=0}^{m_i-1} f_n(X_n(t_k)) [L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)] - Y_0 - \right. \\ &- \int_0^{\tau_i} f(Y_n(s - h_n)) dL_n(s) - \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(Y_n(s - h_n)) dL_n(s) \left| \leq |X_{n0}(\tau_i) - Y_0| + \right. \\ &+ \left| \int_0^{\tau_i} f(Y_n(s - h_n)) dL_n(s) \right| + \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} (f_n(X_n(t_k)) - f(Y_n(t_k))) [L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)] \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(X_n(t_k)) - f(Y_n(t_k))] dL_n(s) \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(Y_n(t_k)) - f(Y_n(s - h_n))] dL_n(s) \right| = \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t). \end{aligned}$$

Так как $f \in C_b^1(\mathbb{R})$ и функция $L(t)$ имеет ограниченную вариацию, то

$$I_2(t) \leq M \varlimsup_{t \in [0, h_n)} L^c(t),$$

где $M = \max_{x \in R} |f(x)|$.

Воспользуемся представлением f_n и ограниченностью вариации L_n и получим оценку для $I_3(t)$

$$I_3(t) \leq (M_1/n) \sum_{k=0}^{m_i-1} |L_n(t_k) - L_n(t_{k+1})| \leq M_1 \varlimsup_{t \in T} L(t)/n.$$

Здесь $M_1 = \max_{x \in R} |f'(x)|$.

В силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях и того, что $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, верна следующая оценка:

$$I_4(t) \leq M_1 \sum_{k=0}^{m_i-1} |X_n(t_k) - Y_n(t_k)| |L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)|.$$

Рассмотрим $I_5(t)$. Применяя представление (6) для $Y_n(t)$ и представление $L(t)$ в виде $L(t) = L^c(t) + L^d(t)$, где $L^c(\cdot)$ и $L^d(\cdot)$ – непрерывная и разрывная части $L(\cdot)$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} I_5(t) &\leq M_1 \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |Y_n(t_k) - Y_n(s - h_n)| |dL_n(s)| = \\ &= M_1 \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \int_{s-h_n}^{t_k} f(Y_n(u)) dL_n(u) \right| |dL_n(s)| \leq MM_1 \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n(u)| |dL_n(s)| \leq \\ &\leq MM_1 \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^c(u)| |dL_n^c(s)| + \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^c(u)| |dL_n^d(s)| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^d(u)| |dL_n^c(s)| + \sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^d(u)| |dL_n^d(s)| \right) = \\ &= I_6(t) + I_7(t) + I_8(t) + I_9(t). \end{aligned}$$

В $I_6(t)$ ограничиваем внутренний интеграл максимумом разности значений функции $L_n^c(t)$ на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, тогда

$$I_6(t) \leq MM_1 \max_k \max_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |L_n^c(t_k) - L_n^c(s - h_n)| \varlimsup L^c(t).$$

Аналогичные оценки верны и для $I_7(t)$ и $I_8(t)$.

Так как функция $L(\cdot)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва и ее вариация конечна, то $\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta L(\mu_i)| < +\infty$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{i=n_0}^{\infty} |\Delta L(\mu_i)| < \varepsilon$.

Представим $L^d(\cdot)$ в виде

$$L^d(t) = L^{d, \geq n_0}(t) + L^{d, < n_0}(t), \quad (7)$$

где $L^{d, \geq n_0}(\cdot)$ и $L^{d, < n_0}(\cdot)$ содержат точки разрывов μ_i с номерами i , большими либо равными n_0 и меньшими n_0 соответственно. Тогда

$$I_9(t) \leq MM_1 \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, \geq n_0}(u)| |dL_n^{d, \geq n_0}(s)| + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=0}^{m_l-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, < n_0}(u)| |dL_n^{d, \geq n_0}(s)| + \\
 & + \sum_{k=0}^{m_l-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, \geq n_0}(u)| |dL_n^{d, < n_0}(s)| + \sum_{k=0}^{m_l-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s-h_n}^{t_k} |dL_n^{d, < n_0}(u)| |dL_n^{d, < n_0}(s)| = \\
 & = I_{10}(t) + I_{11}(t) + I_{12}(t) + I_{13}(t).
 \end{aligned}$$

Действуя так же, как в случае $I_6(t)$, и с учетом представления (7) получим

$$I_{10}(t) \leq MM_1 \max_{t_1, t_2 \in T} |L_n^{d, \geq n_0}(t_1) - L_n^{d, \geq n_0}(t_2)| \varlimsup_{t \in T} L^{d, \geq n_0}(t) \leq MM_1 \varlimsup_{t \in T} L(t) \varepsilon.$$

Аналогичные оценки выполняются для $I_{11}(t)$ и $I_{12}(t)$.

Так как у функции $L^{d, < n_0}(t)$ ровно n_0-1 точек разрыва на отрезке T , то существует конечное число номеров k_i таких, что $\mu_i \in [t_{k_i}, t_{k_i+1})$, причем если $2h_n < \min_{1 \leq i \leq n_0-1} |\mu_i - \mu_{i+1}|$, то $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$. Тогда при $1/n = o(h_n)$ верно

$$I_{13}(t) \leq \sum_{k=0}^{m_l-1} |L_n^{d, < n_0}(t_k) - L_n^{d, < n_0}(t_{k+1})| \max_{s \in [t_k, t_{k+1})} |L_n^{d, < n_0}(t_k) - L_n^{d, < n_0}(s - h_n)| = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 |X_n(t) - Y_n(t)| & \leq |X_{n0}(\tau_t) - Y_0| + M \varlimsup_{t \in [0, h_n)} L^c(t) + M_1 \varlimsup_{t \in T} L(t)/n + \\
 & + M_1 \sum_{k=0}^{m_l-1} |X_n(t_k) - Y_n(t_k)| |L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)| + \\
 & + 3MM_1 \max_k \max_{s \in [t_k, t_{k+1})} |L_n^c(t_k) - L_n^c(s - h_n)| \varlimsup_{t \in T} |L^c(t)| + 3MM_1 \varlimsup_{t \in T} L(t) \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Применяем лемму 1 к последнему неравенству, тогда

$$\begin{aligned}
 |X_n(t) - Y_n(t)| & \leq \left(|X_{n0}(\tau_t) - Y_0| + M \varlimsup_{t \in [0, h_n)} L^c(t) + M_1 \varlimsup_{t \in T} L(t)/n + \right. \\
 & + 3MM_1 \max_k \max_{s \in [t_k, t_{k+1})} |L_n^c(t_k) - L_n^c(s - h_n)| \varlimsup_{t \in T} |L^c(t)| + 3MM_1 \varlimsup_{t \in T} L(t) \varepsilon \Big) \times \\
 & \times \exp \left(M_1 \varlimsup_{t \in T} L(t) \right).
 \end{aligned}$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $1/n = o(h_n)$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, используя равномерную непрерывность $L^c(t)$ и то, что для любого $t \in T$ выполняется $|X_{n0}(\tau_t) - Y_0| \rightarrow 0$, для любого $t \in T$ получим $|X_n(t) - Y_n(t)| \rightarrow 0$ при $\lambda_n = h_n$.

В силу единственности решения задачи Коши (2) теорема выполняется для любого $\lambda_n \rightarrow 0$ так, что $\lambda_n > 1/n$, что и требовалось доказать.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

2. Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы модели и приложения. М., 1991.

3. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Стемковская Т.В. // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43. № 2. С. 272.

4. Лазакович Н.В., Яблонский О.Л. // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 87.

5. Kurzweil J. // Czech. Math. J. 1958. Vol. 8. № 3. P. 360.

Поступила в редакцию 24.12.2002.

Вероника Геннадьевна Новохрост – студентка 5-го курса механико-математического факультета.