

Теорема 3. Статистика $\hat{m}^X$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для m^X .

Доказательство непосредственным образом вытекает из теоремы 2, так как $D\hat{m}^X \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$.

1. Time series analysis of irregularly observed data: proceedings of a symposium held at Texas A&M Uni / Ed. by E. Parzen. New York, 1983.

2. Hideaki Sakai, Takashi Soeda, Hidekatsu Tokumaru // The annals of statistics. 1979. Vol. 7. № 1. P. 99.

3. Jones R. H. // Ann. Math. Statist. 1962. Vol. 33. № 2.

4. Журбенко И. Г. Спектральный анализ временных рядов. М., 1982.

5. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.

Поступила в редакцию 28.12.2002.

Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Татьяна Ивановна Илюкевич – методист факультета прикладной математики. Научный руководитель – Н.Н. Труш.

УДК 519.214.5

А.С. ШИМУРАТКО

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Given a strongly mixed sequence of random variables with mean zero and moments of order greater than three. We obtain the asymptotic expansion of length two for the distribution function of the normalized sum of random variables. The theorem requires that the characteristic function of the sum be small in the specified interval.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность случайных величин с $EX_j=0, j \geq 1$, и коэффициентом сильного перемешивания α . Обозначим

$$\sigma_n^2 = E \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2, \quad S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad F_n(x) = P(S_n < x),$$

$$G_n(x) = \Phi(x) - \frac{ES_n^3}{6} \varphi(x)(x^2 - 1), \quad \rho(F, G) = \sup_{x \in R} |F(x) - G(x)|,$$

$$f_n(t) = Ee^{itS_n}, \quad g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dG_n(x) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - \frac{it^3}{6} ES_n^3 \right),$$

где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

Тема нашей работы – асимптотические разложения в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин – уже исследовалась разными методами и при различных условиях [1, 2 и др.].

В этой работе мы получаем асимптотическое разложение длины два для $F_n(x)$, т. е. оцениваем величину $\rho(F_n, G_n)$, для последовательности сильно перемешанных случайных величин. При доказательстве мы опираемся на работу [3], которая восходит к [4] и оценивает $\rho(F_n, \Phi)$ также в случае сильного перемешивания.

1. Основной результат. Обозначим также $s_0 = \min\{3, s-1\}$,

$$\gamma = \beta \frac{s-1}{s}, \quad \beta_1 = \frac{2\tau+1}{\tau} \frac{s_0}{s_0-2} \frac{s}{s-1}, \quad \beta_2 = \frac{5}{2} \frac{2\tau+1}{\tau-1} \frac{s}{s-1},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \frac{s_0(\tau+1)+5}{s_0(\tau+1)-(3\tau+1)} \frac{s}{s-1}, \quad \tau_1 = \frac{3\tau+1}{\tau+1}, \quad \tau_2 = \frac{10\tau}{3\tau+2},$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma(s_0-1)-s_0}{\gamma\tau+s_0(\tau+1)}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \frac{4\gamma-5}{2\gamma+5} \frac{1}{\tau+1}, \quad a(s, \beta, \tau) = \begin{cases} a_1, & (s, \beta, \tau) \in D_1; \\ a_2, & (s, \beta, \tau) \in D_2; \end{cases}$$

$$D_1 = \{(s, \beta, \tau) | s > 3, \tau > 1 \text{ и, кроме того, или а) } s_0 \leq \tau_1, \beta \geq \beta_1, \\ \text{или б) } \tau_1 < s_0 \leq \tau_2, \beta_1 \leq \beta \leq \beta_3\},$$

$$D_2 = \{(s, \beta, \tau) | s > 3, \tau > 1 \text{ и, кроме того, или а) } \tau_1 < s_0 \leq \tau_2, \beta > \beta_3, \\ \text{или б) } s_0 > \tau_2 (\tau < 6), \beta \geq \beta_3\}.$$

Заметим, что $D_1 \cup D_2 = \{(s, \beta, \tau) | s > 3, \tau > 1, \beta \geq \max(\beta_1, \beta_2)\}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, функция $a(s, \beta, \tau)$ непрерывна на $D_1 \cup D_2$.

Введем следующие условия:

$$\sup_k E |X_k|^s \leq C_1 < \infty, \quad (1)$$

$$\sigma_n^2 \geq C_2 n, \quad (2)$$

$$\alpha(n) \leq C_3 n^{-\beta}, \quad (3)$$

$$|f_n(t)| \leq C_4 |t|^{-\tau}. \quad (4)$$

В приведенных обозначениях справедлива

Теорема. Пусть для последовательности $X_1, X_2, \dots$ существуют такие постоянные $C_i > 0 (i=1, 6)$, $s > 3$, $\tau > 1$, $\beta \geq \max(\beta_1, \beta_2)$, что для всех n выполняются условия (1) – (3) и условие (4) в области $|t| \in [C_5 n^a, C_6 n^{a\tau}]$. Тогда найдется такое $B > 0$, не зависящее от n , что для всех $n \geq 1$ имеет место соотношение

$$\rho(F_n, G_n) \leq B n^{-a\tau}. \quad (5)$$

Замечание. Выражение $a\tau$ в (5) монотонно возрастает по s, β, τ , и область его значений является полуинтервал $[1/2, 1)$.

2. Основное представление. Символом B (с индексом и без него) мы будем обозначать положительные ограниченные величины, не зависящие от n, m, T, U , а символом $\theta(t)$ (также с индексом и без него) – такие функции, что $|\theta(t)| \leq 1$. При этом в различных соотношениях B и $\theta(t)$ могут обозначать разные величины.

Для всех $j=1, 2, \dots, n$, $v=1, 2, \dots, R$, $r=1, 2, \dots, R+1$ обозначим

$$S_j^{(0)} = S_n, \quad S_j^{(v)} = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{|k-j| > vm} X_k,$$

$$\xi_j^{(v)} = \exp \left\{ i t \left(S_j^{(v-1)} - S_j^{(v)} \right) \right\} - 1, \quad \zeta_j^{(r)} = X_j \prod_{v=1}^{r-1} \xi_j^{(v)},$$

где m – целое, зависящее от n число. Всюду в суммах будем считать, что $X_k \equiv 0$, когда $k < 1$ или $k > n$.

Исходным для нас является следующее представление:

$$f_n'(t) = \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E X_j e^{i t S_j^{(1)}} + \sum_{r=2}^R \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} e^{i t S_j^{(r)}} + \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(R+1)} e^{i t S_j^{(R)}}, \quad (6)$$

где $R \geq 3$. Для преобразования (6) нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Приведем только наиболее существенные отличия от работы [3].

3. Вспомогательные утверждения. Будем считать, что для некоторого $s > 3$ выполнено условие (1).

Пусть Y_m обозначает сумму вида $\sum_{k=1}^{bm+c} X_{i_k}$, где $b, c \in N$, – постоянные, $i_1, i_2, \dots, i_{bm+c}$ – любые допустимые индексы. Так, например, $\xi_j^{(v)}$ можно записать в виде $\xi_j^{(v)} = \exp \left\{ \frac{it}{\sigma_n} Y_m \right\} - 1$.

Утверждение 1. Для любого $p, 0 < p \leq s$,

$$E^p |Y_m|^p \leq Bm.$$

Доказательство следует из соотношения $\left| \sum_{i=1}^l b_i \right|^q \leq l^{q-1} \sum_{i=1}^l |b_i|^q$ (для всех $q \geq 1$ и $b_1, b_2, \dots, b_l \in R$) и условия (1).

Утверждение 2. Для любых $p > 0$ и $\omega, 0 < \omega \leq \min(1, s/p)$,

$$E^{\frac{1}{p}} \left| \exp \left\{ \frac{it}{\sigma_n} Y_m \right\} - 1 \right|^p \leq B \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^\omega.$$

Доказательство следует из соотношения $|e^{ix} - 1| \leq 2|x|^\omega$ (для любых $x \in R$ и $\omega \in (0, 1]$) и утверждения 1, где в качестве p нужно взять $p\omega$.

В дальнейшем мы используем известные оценки для ковариации двух случайных величин (см. [5] и теорему 17.2.1 [6]).

Лемма 1. Пусть $\frac{|t|m}{\sigma_n} \leq 1$. Тогда для всех $j=1, 2, \dots, n$ и $r=2, 3, \dots, R+1$

имеют место соотношения (для второго из них считается, что $r \geq 4$):

$$\begin{aligned} 1) \quad E |\zeta_j^{(r)}| &\leq d_1^{(r)}(t, n) = B \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^{\min\{r, s\}-1}, \\ 2) \quad E |\zeta_j^{(r)}| &\leq d_2^{(r)}(t, n) = B \left\{ \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} + \alpha^{\frac{s-1}{r}}(m) \right\}. \end{aligned}$$

(Здесь и далее $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа.) Мы будем также писать $E |\zeta_j^{(r)}| \leq d^{(r)}(t, n)$, выбирая нужный индекс позже.

Доказательство. По неравенству Гельдера

$$E |\zeta_j^{(r)}| = E \left| X_j \prod_{v=1}^{r-1} \xi_j^{(v)} \right| \leq E^{\frac{1}{s}} |X_j|^s \prod_{v=1}^{r-1} E^{\frac{s-1}{s(r-1)}} |\xi_j^{(v)}|^{\frac{s(r-1)}{s-1}}.$$

Применяя утверждение 2 с $\omega = \min \left\{ 1, \frac{s-1}{r-1} \right\}$, получим первое соотношение леммы. Доказательство соотношения 2) аналогично [3, с. 45–46].

Лемма 2. Пусть $\frac{|t|m}{\sigma_n} \leq 1$ и для некоторых $C_3 > 0$ и $\beta > \frac{s}{s-2}$ выполняется условие (3). Тогда для всех $r=2, 3, \dots, R$

$$\left| \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} e^{i s_j^{(r)}} - f_n(t) \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} \right| \leq B \left(n \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m) + |f_n(t)| n d^{(r)} \left(\frac{|t|m}{\sigma_n} \right)^2 + \sqrt{n m} d^{(r)} \frac{|t|m}{\sigma_n} \right).$$

Замечание. Неравенство $\beta > \frac{s}{s-2}$ выполняется в условиях теоремы.

Лемма 3. Имеет место соотношение

$$\left| \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E X_j e^{i s_j^{(1)}} \right| \leq B \frac{n}{\sigma_n} \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m).$$

Доказательство лемм 2 и 3 аналогично [3, с. 46–49].

Введем коэффициенты:

$$Q_1 = B_1 \frac{n}{\sigma_n^2} \sum_{k=m+1}^n \alpha^{\frac{s-2}{s}}(k), \quad Q_2 = B_2 \frac{n}{\sigma_n^3} \sum_{k=m+1}^n k \alpha^{\frac{s-3}{s}}(k), \quad Q_3 = B_3 \frac{n}{\sigma_n} \left(\frac{m}{\sigma_n} \right)^{s_0},$$

$$Q_4 = B_4 \frac{n}{\sigma_n} \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m), \quad Q_5 = B_5 \left(\frac{\sqrt{n m}^{\frac{s}{2}}}{\sigma_n^3} + \frac{n}{\sigma_n} \left(\frac{T m}{\sigma_n} \right)^{\frac{R-3}{2}} \right) \left(\frac{m}{\sigma_n} \right)^2. \quad (7)$$

В этой работе выделение второго члена в асимптотическом разложении для $F_n(x)$ восходит к следующей лемме.

Лемма 4. В обозначениях (7) справедливо равенство

$$\frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n \sum_{r=2}^3 E \zeta_j^{(r)} = -t - \frac{i t^2}{2} E S_n^3 + \theta_1(t) Q_1 t + \theta_2(t) Q_2 t^2 + \theta_3(t) Q_3 |t|^{s_0}.$$

Доказательство. Для любого $x \in R$ $\left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| \leq |x|^{s_0}$. Тогда, обо-

значив $\Delta_j^{(v)} = S_j^{(v-1)} - S_j^{(v)} = \frac{Y_m}{\sigma_n}$, мы можем записать

$$\frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n \sum_{r=2}^3 E \zeta_j^{(r)} = \frac{i}{\sigma_n} \sum_{j=1}^n E X_j \left\{ i t \Delta_j^{(1)} - \frac{t^2}{2} \left(\left(\Delta_j^{(1)} \right)^2 + 2 \Delta_j^{(1)} \Delta_j^{(2)} \right) + \theta(t) \left| \frac{t}{\sigma_n} Y_m \right|^{s_0} \right\}. \quad (8)$$

По неравенству Гельдера и утверждению 1 с $p = \frac{s_0 s}{s-1}$

$$E \left| X_j \right| \left| Y_m \right|^{s_0} \leq E^{\frac{1}{s}} \left| X_j \right|^s E^{\frac{s-1}{s}} \left| Y_m \right|^{\frac{s_0 s}{s-1}} \leq B m^{s_0}. \quad (9)$$

Далее, $\left(\Delta_j^{(1)} \right)^2 + 2 \Delta_j^{(1)} \Delta_j^{(2)} = S_n^2 - \left(S_j^{(1)} \right)^2 - 2 S_j^{(2)} \left(S_n - S_j^{(1)} \right)$, и справедливы соотношения

$$\sum_{j=1}^n E X_j S_n = \sigma_n, \quad \sum_{j=1}^n E X_j S_j^{(1)} = \theta_1 Q_1 \sigma_n, \quad \sum_{j=1}^n E X_j S_n^2 = \sigma_n E S_n^3,$$

$$\sum_{j=1}^n E X_j \left(S_j^{(1)} \right)^2 = \theta_2 Q_2 \sigma_n, \quad \sum_{j=1}^n E X_j S_j^{(2)} \left(S_n - S_j^{(1)} \right) = \theta_3 Q_3 \sigma_n. \quad (10)$$

Теперь из (8) – (10) следует утверждение леммы.

4. Доказательство теоремы. Выберем T таким, что $0 < T \leq T_1 = \frac{\sigma_n}{m}$. Тогда, используя леммы 1–3, перепишем (6) в виде: для всех n в области $|t| \leq T$

$$f'_n(t) = B_1 \theta_1(t) \frac{n}{\sigma_n} \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m) + \sum_{r=2}^R \frac{i}{\sigma_n} \left\{ f_n(t) \sum_{j=1}^n E \zeta_j^{(r)} + B_2 \theta_2(t) n \alpha^{\frac{s-1}{s}}(m) + \right. \\ \left. + B_3 \theta_3(t) |f_n(t)| n d^{(r)} \left(\frac{tm}{\sigma_n} \right)^2 + B_4 \theta_4(t) \sqrt{n} d^{(r)} \frac{|t| m^{\frac{3}{2}}}{\sigma_n} \right\} + \theta_5(t) \frac{n}{\sigma_n} d^{(R+1)}. \quad (11)$$

Второе слагаемое в (11) при $r=2, 3$ заменим согласно лемме 4; при $r \geq 4$ заменим $E \zeta_j^{(r)}$ на $B \theta(t) d_1^{(4)}$ (лемма 1). В двух последних слагаемых в фигурных скобках заменим $d^{(r)}$ на $B \theta(t) d_1^{(2)}$, а в последнем слагаемом в (11) — $d^{(R+1)}$ на $d_2^{(R+1)}$. В итоге соотношение (11) переписывается в виде: для всех n в области $|t| \leq T$

$$f'_n(t) = f_n(t) \left(-t - \frac{it^2}{2} ES_n^3 + \theta_1(t) Q_1 t + \theta_2(t) Q_2 t^2 + \theta_3(t) Q_3 |t|^{s_0} \right) + \\ + \theta_4(t) (Q_4 + Q_5 t^2). \quad (12)$$

Положим

$$T_2 = \begin{cases} (16Q_2)^{-1}, & \text{когда } Q_2 \neq 0, \\ +\infty, & \text{когда } Q_2 = 0, \end{cases} \quad T_3 = (16Q_3)^{-\frac{1}{s_0-1}}.$$

Пусть $Q \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Интегрируя (12) в области $|t| \leq T \leq \min\{T_1, T_2, T_3\}$, получим для всех достаточно больших n в указанной области представление

$$f_n(t) = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6} ES_n^3 + \theta_1(t) Q_1 t^2 + \theta_2(t) Q_2 t^3 + \theta_3(t) Q_3 |t|^{s_0+1} \right\} + \\ + \theta_4(t) (Q_4 + Q_5) t. \quad (13)$$

Отнимем в (13) от обеих частей $g_n(t)$. Используя неравенство

$$|e^{x+iy+z} - e^x (1+iy)| \leq |z| e^{x+|z|} + y^2 e^x$$

(для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$), а затем неравенство Эссена [7], получим, что для любой функции $U=U(n)>0$ для всех достаточно больших n и всех $T, 0 < T \leq \min\{T_1, T_2, T_3\}$, справедлива оценка

$$\rho(F_n, G_n) \leq B \left\{ Q_1 + Q_2 + Q_3 + |ES_n^3|^2 + (Q_4 + Q_5) T + \right. \\ \left. + \int_{T < |t| \leq U} \left| \frac{f_n(t) - g_n(t)}{t} \right| dt + \frac{1 + |ES_n^3|}{U} \right\}. \quad (14)$$

Используя соотношения (2) и (3), неравенства $\beta > 2 \frac{s}{s-3}$ (это следует из условий теоремы) и $|ES_n^3| \leq B n^{-\frac{1}{2}}$, из (14) получим

$$\rho(F_n, G_n) \leq B \left[m^{\frac{1-\beta s-2}{1-\beta s}} + \frac{m^{\frac{2-\beta s-3}{s}}}{\sqrt{n}} + \frac{m^{s_0}}{(\sqrt{n})^{s_0-1}} + \left(\sqrt{n} m^{-\frac{s}{2}} + \frac{m^{\frac{s}{2}}}{n} \right) T + \right.$$

$$+ \left(\frac{Tm}{\sqrt{n}} \right)^{\left\lfloor \frac{R-1}{2} \right\rfloor} m + \int_{T < |t| \leq U} \left| \frac{f_n(t) - g_n(t)}{t} \right| dt + \frac{1}{U} \quad (15)$$

для достаточно больших n , где $0 < T \leq \min\{T_1, T_2, T_3\} = B_0 \sqrt{nm} \frac{s_0}{s_0 - 1}$.

Положим $T = C_5 n^a$, $U = C_6 n^{a\tau}$, $m = \lfloor n^\mu \rfloor$, где $\mu = \frac{1}{2} \frac{s_0(\tau+1) - 1}{s_0(\tau+1) + \gamma\tau}$, когда

$(s, \beta, \tau) \in D_1$, и $\mu = 3(2\gamma+5)^{-1}$, когда $(s, \beta, \tau) \in D_2$. Теперь, взяв достаточно большое $R = R(s, \beta, \tau) \geq 3$, из (15) нетрудно получить (5) и доказательство теоремы.

1. Heinrich L. // Math. Nachr. 1990. Bd. 145. S. 309, 345.
2. Rhee Wan Soo // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1985. Vol. 8. № 3.
3. Зуев Н.М. Предельные теоремы для слабо зависящих случайных величин. Мн., 2000. С. 43.
4. Тихомиров А.Н. // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25. Вып. 4.
5. Давыдов Ю.А. // Там же. 1968. Т. 13. Вып. 4. С. 731, 732.
6. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965. С. 388.
7. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М., 1972. С. 137.

Поступила в редакцию 20.12.2002.

Александр Сергеевич Шмуратко – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Н.М. Зуев.

УДК 517.9

А.Н. КОВАЛЬЧУК

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИТОВСКИХ КОНЕЧНЫХ СУММ С ОСРЕДНЕНИЕМ. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

The necessary and sufficient conditions of convergence of the Ito's finite sums with averaging to the stochastic θ -integral in multi-dimensional case are obtained. The estimates of the speed of approximations are found.

Для исследования решений дифференциальных уравнений с обобщенными случайными процессами разработана специальная теория, которая базируется на понятиях стохастических интегралов [1]. Наиболее общий среди них в непрерывном случае стохастический θ -интеграл [2].

Отметим, что изучение теории стохастических дифференциальных уравнений непосредственно связано с проблемой умножения обобщенных функций. В работах [3, 4] предложена конструкция алгебры обобщенных случайных процессов и на ее основе разработан единый подход к исследованию различных классов стохастических дифференциальных уравнений. При этом исследование ассоциированных решений уравнений в дифференциалах в алгебре сводится к описанию предельного поведения итовских конечных сумм с осреднением. В статьях [5, 6] показано, что предельное поведение таких сумм для одномерного стандартного процесса броуновского движения полностью описывается стохастическими θ -интегралами. Настоящая работа – продолжение исследований в этом направлении для многомерного случая.