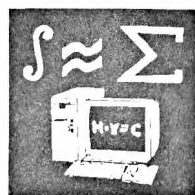


Математика и информатика



УДК 519.24

Н.Н. ТРУШ, Т.И. ИЛЮКЕВИЧ

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

In this article stationary random process with non-regular observations are considered. The estimation of mathematical expectation for stationary random process with non-regular observations has been constructed, its statistical properties having been studied too.

При решении многих практических задач часто приходится иметь дело со стационарными случайными процессами с нерегулярными наблюдениями. Нерегулярности могут носить как систематический, так и случайный характер. В 1984 г. на симпозиуме [1] по проблемам анализа временных рядов с нерегулярными наблюдениями были рассмотрены подходы к исследованиям по данной тематике. Различным аспектам изучения временных рядов с нерегулярными наблюдениями посвящены работы [2], [3]. В данной статье анализируются стационарные процессы со случайными нерегулярностями.

Пусть $X(t)$, $d(t)$, $t \in Z$, — стационарные в широком смысле случайные процессы с математическими ожиданиями m^X , m^d , ковариационными функциями $R^X(\tau)$, $R^d(\tau)$, $\tau \in Z$, и спектральными плотностями $f^X(\lambda)$, $f^d(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, соответственно.

Рассмотрим случайный процесс

$$Y(t) = X(t)d(t), \quad (1)$$

$t \in Z$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Если имеет место соотношение (1), а процессы $d(t)$ и $X(t)$, $t \in Z$, независимы, то $Y(t)$, $t \in Z$, будет стационарным в широком смысле случайным процессом с математическим ожиданием

$$m^Y = m^X m^d, \quad (2)$$

ковариационной функцией

$$R^Y(\tau) = R^X(\tau)R^d(\tau) + R^X(\tau)(m^d)^2 + R^d(\tau)(m^X)^2, \quad (3)$$

$t \in Z$, и спектральной плотностью

$$f^Y(\lambda) = \int_{\Pi} f^X(\lambda - \mu) f^d(\mu) d\mu + (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda), \quad (4)$$

$\lambda \in \Pi$.

Доказательство. С учетом независимости процессов $X(t)$ и $d(t)$ соотношение (2) очевидно. Используя определение ковариационной функции, соотношение (1), независимость процессов $X(t)$ и $d(t)$, получим

$$R^Y(t_1, t_2) = MX(t_1)X(t_2)Md(t_1)d(t_2) - MX(t_1)Md(t_1)MX(t_2)Md(t_2).$$

Из стационарности процессов $X(t)$ и $d(t)$ вытекает, что правая часть последнего равенства равна

$$(R^X(t_1 - t_2) + (m^X)^2)(R^d(t_1 - t_2) + (m^d)^2) - (m^X)^2(m^d)^2.$$

Таким образом, $Y(t)$, $t \in Z$, – стационарный в широком смысле случайный процесс, и выполняется соотношение (3).

Используя определение спектральной плотности и равенство (3), получим

$$f^Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R^X(\tau)R^d(\tau)e^{-i\lambda\tau} + (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda).$$

Учитывая соотношения, связывающие ковариационные функции и спектральные плотности, спектральное представление обобщенной функции [4] и меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} f^Y(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^X(\lambda_1) f^d(\lambda_2) \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{i\tau(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda)} d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ &+ (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda) = \int_{\Pi} f^d(\lambda_2) \int_{-\infty}^{\infty} f^X(u + \lambda - \lambda_2) \delta(u) du d\lambda_2 + \\ &+ (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda), \end{aligned}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Лемма доказана.

Пусть в результате некоторого эксперимента получено T последовательных через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1) \quad (5)$$

за процессом $Y(t)$, $t \in Z$, который связан с процессами $X(t)$, $d(t)$, $t \in Z$, соотношением (1). Возникает задача: по наблюдениям (5) построить оценку неизвестного математического ожидания процесса $X(t)$, $t \in Z$, при условии, что характеристики процесса $d(t)$, $t \in Z$, известны и $m^d \neq 0$.

В качестве оценки математического ожидания m^X , построенной по наблюдениям (5), рассмотрим статистику

$$\hat{m}^X = \frac{1}{Tm^d} \sum_{t=0}^{T-1} Y(t). \quad (6)$$

Для построенной оценки справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Статистика (6) является несмещенной оценкой для m^X и

$$\begin{aligned} D\hat{m}^X &= \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{(m^d)^2} \iint_{\Pi^2} f^X(\mu) f^d(\lambda - \mu) \Phi_T(\lambda) d\mu d\lambda + \int_{\Pi} f^X(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m^X}{m^d} \right)^2 \int_{\Pi} f^d(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda \right], \end{aligned}$$

где

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} - \text{ядро Фейера, } \lambda \in \Pi.$$

Доказательство. Несмещенность оценки (6) непосредственным образом вытекает из свойств математического ожидания.

Используя определение дисперсии и соотношение (3), имеем

$$D\hat{m}^x = \frac{1}{(Tm^d)^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} R^y(t_1 - t_2) = \frac{1}{(Tm^d)^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} [R^x(t_1 - t_2)R^d(t_1 - t_2)] + \\ + \frac{1}{T^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} [R^x(t_1 - t_2)] + \frac{(m^x)^2}{(Tm^d)^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} [R^d(t_1 - t_2)].$$

Подставляя вместо ковариационной функции ее выражение через спектральную плотность, меняя порядок суммирования и интегрирования и используя элементарное равенство

$$\sum_{t=0}^{T-1} e^{itx} = \frac{\sin \frac{Tx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{\frac{i(T-1)x}{2}},$$

имеем

$$D\hat{m}^x = \frac{2\pi}{T(m^d)^2} \iint_{\Pi^2} f^x(\lambda_1) f^d(\lambda_2) \Phi_T(\lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ + \frac{2\pi}{T} \int_{\Pi} f^x(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda + \frac{2\pi}{T} \left(\frac{m^x}{m^d} \right)^2 \int_{\Pi} f^d(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda.$$

Сделав замену переменных интегрирования $\mu = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ в первом слагаемом, получим требуемый результат. Теорема доказана.

Исследуем асимптотическое поведение дисперсии оценки.

Теорема 2. Пусть спектральная плотность $f^x(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda=0$ и ограничена на Π , а спектральная плотность $f^d(\lambda)$ непрерывна и ограничена на Π , тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TD\hat{m}^x = 2\pi \left[\frac{1}{(m^d)^2} \int_{\Pi} f^x(\mu) f^d(\mu) d\mu + f^x(0) + \left(\frac{m^x}{m^d} \right)^2 f^d(0) \right].$$

Доказательство. Используя выражение для дисперсии, полученное в теореме 1, рассмотрим отдельно каждое слагаемое. С учетом непрерывности спектральной плотности $f^d(\lambda)$ на Π имеем

$$\frac{2\pi}{(m^d)^2} \int_{\Pi} f^x(\mu) \left[\int_{\Pi} f^d(\lambda - \mu) \Phi_T(\lambda) d\lambda \right] d\mu \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{(m^d)^2} \int_{\Pi} f^x(\mu) f^d(\mu) d\mu.$$

Проведем доказательство для второго слагаемого. Рассмотрим модуль разности

$$\left| \int_{\Pi} f^x(\lambda) \Phi_T(\lambda) d\lambda - f^x(0) \right| \leq \int_{\Pi} |f^x(\lambda) - f^x(0)| \Phi_T(\lambda) d\lambda = \\ = \int_{|\lambda| \leq \delta} |f^x(\lambda) - f^x(0)| \Phi_T(\lambda) d\lambda + \int_{\Pi \setminus \{|\lambda| \leq \delta\}} |f^x(\lambda) - f^x(0)| \Phi_T(\lambda) d\lambda,$$

где $0 < \delta < \pi$.

Второй интеграл по свойству ядра Фейера и ограниченности $f^x(\lambda)$ на Π будет стремиться к нулю, а первый в силу непрерывности функции $f^x(\lambda)$ в точке $\lambda=0$ не будет превосходить некоторое, заданное наперед, сколь угодно малое число. Аналогично проводится доказательство для третьего слагаемого. Теорема доказана.

Теорема 3. Статистика $\hat{m}^X$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для m^X .

Доказательство непосредственным образом вытекает из теоремы 2, так как $D\hat{m}^X \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$.

1. Time series analysis of irregularly observed data: proceedings of a symposium held at Texas A&M Uni / Ed. by E. Parzen. New York, 1983.

2. Hideaki Sakai, Takashi Soeda, Hidekatsu Tokumaru // The annals of statistics. 1979. Vol. 7. № 1. P. 99.

3. Jones R. H. // Ann. Math. Statist. 1962. Vol. 33. № 2.

4. Журбенко И. Г. Спектральный анализ временных рядов. М., 1982.

5. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.

Поступила в редакцию 28.12.2002.

Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Татьяна Ивановна Илюкевич – методист факультета прикладной математики. Научный руководитель – Н.Н. Труш.

УДК 519.214.5

А.С. ШИМУРАТКО

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Given a strongly mixed sequence of random variables with mean zero and moments of order greater than three. We obtain the asymptotic expansion of length two for the distribution function of the normalized sum of random variables. The theorem requires that the characteristic function of the sum be small in the specified interval.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность случайных величин с $EX_j=0, j \geq 1$, и коэффициентом сильного перемешивания α . Обозначим

$$\sigma_n^2 = E \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2, \quad S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad F_n(x) = P(S_n < x),$$

$$G_n(x) = \Phi(x) - \frac{ES_n^3}{6} \varphi(x)(x^2 - 1), \quad \rho(F, G) = \sup_{x \in R} |F(x) - G(x)|,$$

$$f_n(t) = Ee^{itS_n}, \quad g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dG_n(x) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - \frac{it^3}{6} ES_n^3 \right),$$

где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

Тема нашей работы – асимптотические разложения в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин – уже исследовалась разными методами и при различных условиях [1, 2 и др.].

В этой работе мы получаем асимптотическое разложение длины два для $F_n(x)$, т. е. оцениваем величину $\rho(F_n, G_n)$, для последовательности сильно перемешанных случайных величин. При доказательстве мы опираемся на работу [3], которая восходит к [4] и оценивает $\rho(F_n, \Phi)$ также в случае сильного перемешивания.

1. Основной результат. Обозначим также $s_0 = \min\{3, s-1\}$,