Заметим, что в случае независимости случайных величин нормировка $\alpha_n = \frac{h(n)}{n^{1/2}}$ необходима для сходимости распределений сумм к нормальному закону (см., например, [6, 7]).

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965.
2. Ибрагимов И. А. // Теория вероятностей и ее применения. 1975. Т. 20. № 1. С. 134.
3. Юдин М. Д. // Изв. вузов. Математика. 1999. № 4 С. 61.
4. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. Мн., 1990.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
6. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., 1949.
7. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.
8. Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1980.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., 1989.

Поступила в редакцию 03.10.2002.

Андрей Григорьевич Федосенко – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Г.А. Медведев.

УДК 517.925.6

В.И. МАТАТОВ, О.Н. ТИШКЕВИЧ

К ВОПРОСУ О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The non-autonomous system of two differential equations with quadratic non-linearity concerning the polarity of sliding singularities is studied. The corresponding systems of P -type are integrated of elementary or elliptic functions and also in terms of function-solutions of the first of Penleve equation.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2, \\ \frac{dy}{dz} = b_0 + b_1x + b_2y + a_3xy + a_4y^2, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_0=a_0(z), \dots, a_4=a_4(z), a_5=a_5(z) \neq 0, b_0=b_0(z), b_1=b_1(z), b_2=b_2(z)$ – голоморфные функции, $z \in C, (x, y) \in \bar{C}^2, \bar{C} = C \cup \{\infty\}$. В статье [1] изучена система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = P_2(z, x, y), \\ y' = Q_2(z, x, y) \end{cases} \quad (2)$$

с квадратичными по x, y нелинейностями на предмет полярности подвижных особых точек. С помощью линейного преобразования $x=X+\mu Y, y=Y$, где μ – корень алгебраического уравнения

$$b_3\mu^3 + (b_4 - a_3)\mu^2 + (b_5 - a_4)\mu - a_5 = 0, \quad (3)$$

система (2) упрощалась. Случай, когда алгебраическое уравнение (3) не имеет корней, т. е. когда $b_3=0, b_4=a_3, b_5=a_4, a_5 \neq 0$, в [1] не рассматривался. Этому случаю и соответствует система дифференциальных уравнений (1). Найдем условия того, что система (1) принадлежит классу P , т. е. что ее

решения могут иметь только полярные подвижные особенности. Установим также классы функций, через которые выражаются решения соответствующих систем P -типа.

Из второго уравнения системы (1) имеем

$$x = \frac{y' - b_0 - b_2 y - a_4 y^2}{a_3 y + b_1} = R_1(z, y, y'), \quad (4)$$

где R_1 – рациональная функция относительно y и y' . Этот факт позволяет перейти от системы (1) к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$y'' = \frac{2a_3}{a_3 y + b_1} y'^2 + F_1(z, y) y' + F_2(z, y), \quad (5)$$

где F_1, F_2 – известные рациональные функции относительно y с голоморфными коэффициентами. Например,

$$F_1(z, y) = 3a_4 y + a_1 + b_2 + \frac{b_1' + a_3' y - 3a_3(b_0 + b_2 y + a_4 y^2)}{a_3 y + b_1}.$$

Сравнивая дифференциальное уравнение (5) с каноническими уравнениями Пенлеве – Гамбье [2], получим три серии условий принадлежности компоненты $y(z)$ классу P :

- 1) $a_4 = 0, b_1' + b_1(a_1 + b_2) = 0, a_3 b_1 = 6, b_2' - (b_2 b_1')/b_1 + a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0,$
 $b_0' - (b_0 b_1')/b_1 + a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0;$
- 2) $a_4 = 0, \dots, b_0' - (b_0 b_1')/b_1 + a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1/2;$
- 3) $a_4 = 0, \dots, b_0' - (b_0 b_1')/b_1 + a_0 b_1 - a_1 b_0 = z.$

Причем во всех случаях $a_5 \neq 0, b_1 \neq 0$.

Замечание 1. Многоточия означают совпадение условий второй и третьей серий с соответствующими условиями первой серии.

Так как компонента $x(z)$ рациональным образом выражается через y и y' (см. формулу (4)), то указанные условия обеспечивают полярность подвижных особенностей и для нее.

Замечание 2. При выполнении условий серий 1) или 2) получаем уравнения, которые интегрируются через эллиптические функции [2, 3]. Серия условий 3) дает для функции $y(z)$ первое уравнение Пенлеве [2].

На основании изложенного формулируется

Теорема. Если выполняются условия (6), то исходная система (1) интегрируется: а) либо через эллиптические функции, б) либо через функции-решения первого уравнения Пенлеве.

Замечание 3. Решения системы P -типа вида (1) могут выражаться и через элементарные функции. Это будет, например, когда (1) имеет вид $x' = y^2, y' = 0$.

1. Лукашевич Н. А., Мататов В. И. // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 3. С. 449.

2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.

3. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.

Поступила в редакцию 26.11.2002.

Валерий Иванович Мататов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений.

Ольга Николаевна Тишкевич – студентка 6-го курса заочного отделения механико-математического факультета.