

$\times(-3+15A-11A^2+3A^3)U[3(A-1)^2(A^2+3)]$. Далее из $\bar{g}_2 = 0$, $\bar{g}_1 = 0$ имеем $27(A-1)^2 \times (A+1)(A^2+3)B^2+4A^4(-17+9A-3A^2+3A^3)+4A^3U(A-3)(7-6A+3A^2)$, $N=B(U-1)$. Таким образом, получен случай центра, содержащийся в предложении 1. Если $M_2 \subset \mathbb{V}(I)$, где $M_2 \neq M_1$, то $q_i=0$, $i=\overline{1,7}$. Маловероятно, что из $q_i=0$, $i=\overline{1,7}$, можно найти случаи центра, не содержащиеся в теореме 1.

1. Куклес И. С. // ДАН СССР. 1944. Т. 42. № 5. С. 208.
2. Черкас Л. А. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 594.
3. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.
4. Zoladek H. // Topological methods in Nonlinear Analysis. 1994. Vol. 4. P. 79.
5. Садовский А. П. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 236.
6. Cox D., Little J., O'Shea D. Ideal, Varieties and Algorithms. New York; Berlin; Hamburg, 1998.
7. Romanovski V. G., Suba A. // Ann. of Diff. Eqs. 2001. Vol. 17. № 4. P. 363.
8. Ладис Н. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1976. № 1. С. 21.
9. Villarini M. // Nonlinear Anal. 1992. Vol. 19. № 8. P. 787.

Поступила в редакцию 26.12.2002.

Ле Ван Линь – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. П. Садовский.

УДК 517.943

М. В. КОЖЕРО, Н. В. СПИЧЕКОВА

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПФАФФА С СУММОЙ ЛИНЕЙНОГО И БИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРОВ В R^3

One totally integrable nonhomogeneous Pfaff equation with sum of linear and bilinear operators in R^3 is considered. Its canonical forms and their general solutions are given.

Пусть $u=(x, y, z)$ – вектор из R^3 , $(\dots\dots)$ – скалярное произведение в R^3 , A – линейный, B – билинейный операторы в R^3 .

Рассмотрим вполне интегрируемое уравнение Пфаффа [1]

$$(Au+B(u, u), du)=0, \quad (1)$$

в котором Au и $B(u, u)$ не имеют общих множителей. Условие его вполне интегрируемости имеет вид

$$(Au+B(u, u), \operatorname{rot} (Au+B(u, u)))=0. \quad (2)$$

Ставится задача найти общее решение уравнения (1).

Определение 1. Уравнение (1) называется вырожденным уравнением Пфаффа, если существует невырожденное линейное преобразование $u=Sv$, приводящее его к обыкновенному дифференциальному уравнению. В противном случае будем называть его невырожденным уравнением Пфаффа.

Теорема 1. Вырожденное уравнение Пфаффа всегда вполне интегрируемо, а его интегральными поверхностями являются цилиндрические поверхности с направляющими, определяемыми соответствующим обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение 2. Уравнение (1) называется квазиоднородным, если существует преобразование $u=v+u_0$, где u_0 – постоянный вектор из R^3 , приводящее его к однородному уравнению вида $(B(v, v), dv)=0$.

Такие уравнения были полностью изучены первым из авторов данной статьи.

Среди невырожденных уравнений (1) простейшим является уравнение в полных дифференциалах, т. е. когда $\text{rot}(Ai+B(u, u))=0$.

Теорема 2. Если (1) является уравнением в полных дифференциалах, то его общее решение имеет вид $(Ai+B(u, u), u)=c$, а особые точки будут либо седловыми, либо точками типа центр.

Далее уравнения в полных дифференциалах, вырожденные, а также квазиоднородные, мы рассматривать не будем.

Интегрирование и качественное исследование уравнения (1) в общем случае представляет собой довольно сложную задачу, так как оно содержит 27 параметров. Поэтому, на наш взгляд, возможен только один путь: применив какое-либо линейное преобразование, разбить его на канонические виды со значительно меньшим числом параметров. Естественно попытаться упростить его линейную часть Ai , что и было сделано нами. В результате было получено 6 канонических видов уравнения (1). Однако ни одно из них нам проинтегрировать не удалось, так как они содержат достаточно большое число параметров – не менее 18.

Поэтому мы избрали не совсем стандартный подход: не трогая линейной части Ai уравнения (1), упростить его билинейную часть $B(u, u)$. Билинейный оператор B однозначно определяет кубическую матрицу (b_{ijk}) , симметрическую по двум индексам i, j [2]. Используя ее, рассмотрим кубическую тройничную форму $(B(u, u), u)$. Данная форма однозначно определяет кубическую матрицу (f_{ijk}) , симметрическую по всем трем индексам, элементы которой связаны с элементами матрицы (b_{ijk}) соотношениями $b_{ijk}+b_{jik}+b_{kij}=3f_{ijk}$.

Известно [2], что каждая кубическая тройничная форма, а значит, и соответствующая ей кубическая матрица невырожденным линейным преобразованием приводится к одному из конечного числа канонических видов. Будем считать, что матрица (f_{ijk}) уже приведена к каноническому виду. Используя условие $(B(u, u), u) \equiv (F(u, u), u)$, где F – билинейный оператор, определенный кубической матрицей (f_{ijk}) , а также условия вполне интегрируемости (2), получим канонические виды уравнения (1). Затем, используя классические методы интегрирования уравнений Пфаффа, находим их общие решения.

Далее кубическую тройничную форму $(F(u, u), u)$ будем обозначать Ψ , дифференциальные 1-формы, являющиеся левыми частями исходного уравнения и его i -го канонического вида, – соответственно ω и ω_i , а общее решение уравнения $\omega_i=0$ – записывать в виде $\Phi_i=c$. Следующие обозначения мы заимствуем из [2]: r – двумерный или трехмерный ранг матрицы (f_{ijk}) (в случае симметрической по всем индексам матрицы они совпадают); I и T – соответственно абсолютный и относительный инварианты матрицы (f_{ijk}) ; $\varpi(T)=\text{sgn}(T)$; r_c и σ_c – соответственно ранг и сигнатура присоединенной матрицы C девятого порядка для матрицы (f_{ijk}) ; r_3 и σ_3 – соответственно ранг и сигнатура сложной квадратной матрицы $\mathfrak{Z}$ девятого порядка для матрицы (f_{ijk}) .

Этими величинами и определителем $\det(f_{ijk})$ матрицы (f_{ijk}) определяются канонические виды кубической тройничной формы Ψ .

Теорема 3. Если выполняется одно из условий:

$$1) \det(f_{ijk}) \neq 0;$$

2) $I=0$, $\varpi(T)=1$, $r=3$, $r_c=8$, $\sigma_c=-2$, $r_3=4$, $\sigma_3=0$ (здесь и далее $\det(f_{ijk})=0$);

3) $I = \frac{0}{0}$ (условное обозначение [2]), $\varpi(T)=0$, $r=3$, $r_c=5$, $\sigma_c=-1$, $r_3=0$, $\sigma_3=0$;

4) $I=0$, $\varpi(T)=-1$, $r=3$, $r_c=8$, $\sigma_c=-2$, $r_3=4$, $\sigma_3=0$, то (1) будет уравнением в полных дифференциалах.

Далее остается рассмотреть следующие случаи:

I. $I=0$, $\varpi(T)=1$, $r=3$, $r_c=8$, $\sigma_c=-2$, $r_3=2$, $\sigma_3=0$. Тогда $\Psi=x^3+6xyz$.

$$\omega_1=(a_1x+a_2y+a_3z+\lambda x^2+a_4yz)dx+(b_1x+b_2xz)dy+(c_1x+b_2xy)dz,$$

где

$$a_4b_1-a_2b_2=0, a_4+2b_2=6, a_4c_1-a_3b_2=0;$$

$$a_4 \neq \pm 6: \Phi_1(u)=|x|^{\frac{a_4}{b_2}}(a_2y+a_4yz+a_3z+\frac{2a_1a_4}{a_4+6}x+\lambda\frac{a_4}{6}x^2); x=0;$$

$$a_4=-6: \Phi_1(u)=\frac{-a_2y-a_3z+6yz}{x}+a_1\ln|x|+\lambda x; x=0.$$

$$\omega_2=(a_1x+\lambda x^2+a_2yz)dx+(b_1z+b_2xz)dy+(b_1y+b_2xy)dz,$$

где

$$2b_2+a_4=6; a_2=0: \Phi_2(u)=yz+\frac{3a_1-\lambda b_1}{9}x+\frac{\lambda}{6}x^2+\frac{\lambda b_1^2-3a_1b_1}{29}\ln|b_1+3x|; b_1+3x=0;$$

$$a_2 \neq \pm 6, 0: \Phi_2(u)=|b_1+b_2x|^{\frac{a_2}{b_2}}(3yz+\frac{6a_1-2\lambda b_1}{6+a_2}x+\frac{1}{2}\lambda x^2+\frac{2\lambda}{a_2(6+a_2)}(b_1^2-6a_1b_1)); b_1+b_2x=0;$$

$$a_2=6, b \neq 0: \Phi_2(u)=e^{\frac{6}{b}x}(yz+a_1\frac{6x-b_1}{36}x+\lambda\frac{18x^2-6b_1x+b_1^2}{108});$$

$$a_2=-6: \Phi_2(u)=\frac{1}{b_1+6x}(yz+\frac{6a_1b_1-\lambda b_1^2}{216})+\frac{\lambda}{36}x+\frac{3a_1-\lambda b_1}{108}\ln|b_1+6x|; b_1+6x=0.$$

При выполнении условий I $\lambda=1$ в ω_1 и ω_2 .

II. $I=0$, $\varpi(T)=1$, $r=3$, $r_c=8$, $\sigma_c=-2$, $r_3=0$. Тогда $\Psi=6xyz$ и ω приводится к виду ω_1 или ω_2 (при $\lambda=0$) или

$$\omega_3=aydx+bx dy+6xy dz; \Phi_3(u)=|x|^a|y|^b e^{6z}; x=0; y=0.$$

III. $I=\frac{0}{0}$, $\varpi(T)=0$, $r=3$, $r_c=4$, $\sigma_c=-2$, $r_3=0$. Тогда $\Psi=3x^2y+3y^2z$.

$$\omega_4=(-\frac{3}{2}c_1z-3xy)dx+(6x^2+\frac{9}{2}yz)dy+(c_1x-\frac{3}{2}y^2)dz;$$

$$\Phi_4(u)=\left|c_1x-\frac{3}{2}y^2\right|^{-\frac{3}{2}}(c_1^2z-6y^3+6c_1xy)=c; c_1x-\frac{3}{2}y^2=0.$$

$$\omega_5=(2a_1x+2a_2xy)dx+(b_1y+a_1z+b_2x^2+b_3yz)dy+(a_1y+a_2y^2)dz,$$

где

$$2a_2+b_2=3, a_2+b_3=3;$$

$$a_2 \neq 0, \frac{3}{2}: \Phi_5(u)=|a_1+a_2y|^{\frac{b_2}{a_2}}(x^2+yz+b_1\frac{b_2y-a_1}{b_2b_3}); a_1+a_2y=0;$$

$$a_2=0, a_1 \neq 0: \Phi_5(u)=e^{\frac{3}{a_1}y}(x^2+yz+b_1\frac{3y-a_1}{9});$$

$$a_2=3: \Phi_5(u)=\frac{x^2+yz}{a_1+3y}+b_1(\frac{1}{9}\ln|a_1+3y|-\frac{y}{3(a_1+3y)}); a_1+3y=0;$$

$$a_2 = \frac{3}{2} : \Phi_5(u) = x^2 + yz + b_1 \left(\frac{2}{3}y - \frac{4}{9} \ln \left| a_1 + \frac{3}{2}y \right| \right); \quad a_1 + \frac{3}{2}y = 0.$$

$$\omega_6 = (a_1y + 2\lambda c_1xy)dx + (b_1x + b_2y + \lambda b_3x^2 + b_4yz)dy + c_1y^2dz,$$

где

$$b_1c_1 - a_1b_3 = 0, \quad b_3 + 2c_1 = 3, \quad b_4 + c_1 = 3;$$

$$c_1 \neq 3: \Phi_6(u) = |y|^{\frac{b_4}{c_1}} (a_1x + \lambda c_1x^2 + c_1yz + \frac{b_2c_1y}{b_4}); \quad y = 0;$$

$$c_1 = 3: \Phi_6(u) = \frac{a_1x + 3\lambda x^2 + 3yz}{y} + b_2 \ln|y|; \quad y = 0.$$

В данном случае в $\omega_6 \lambda = 1$.

IV, V. $I=0$, $\varpi(T)=-1$, $r=3$, $r_c=8$, $\sigma_c=-2$, $r_3=2$, $\sigma_3=\pm 2$. Тогда $\Psi = 3x^2y + ny^3 + 3yz^2$, где $n = -\text{sgn}(\sigma_3)$.

$$\omega_7 = (\mu a_1y + a_2xy)dx + (\mu b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + \lambda y^2 + \mu b_4z^2)dy + (c_1y + \mu a_2yz)dz,$$

где

$$2a_1b_4 - a_2b_1 = 0, \quad a_2 + b_4 = 3, \quad 2b_4c_1 - a_2b_3 = 0;$$

$$b_4 \neq \pm 3: \Phi_7(u) = |y|^{\frac{2b_4}{a_2}} \left(\mu \frac{b_1}{b_4}x + x^2 + \frac{b_1}{b_4}z + \mu z^2 + \frac{2b_2}{3+b_4}y + \frac{\lambda}{3}y^2 \right); \quad y = 0;$$

$$b_4 = -3: \Phi_7(u) = \frac{-\mu b_1x + 3x^2 - b_3z + 3\mu z^2}{y} + b_2 \ln|y| + \lambda y; \quad y = 0.$$

$$\omega_8 = (a_1x + a_2xy)dx + (b_1y + b_2x^2 + \lambda y^2 + b_2z^2)dy + (a_1z + a_2yz)dz,$$

где

$$a_2 + b_2 = 3;$$

$$b_2 \neq \pm 3, 0: \Phi_8(u) = |a_1 + a_2y|^{\frac{2b_2}{a_2}} (x^2 + z^2 + b_1 \frac{2b_2y - a_1}{b_2(3+b_2)} + \frac{\lambda}{3}y^2 + \lambda \frac{a_1^2 - 2a_1b_2y}{3b_2(b_2+3)}); \quad a_1 + a_2y = 0;$$

$$b_2 = 0: \Phi_8(u) = \frac{x^2 + z^2}{2} + \lambda \left(\frac{y^2}{6} - \frac{a_1}{9}y + \frac{a_1^2}{27} \ln|a_1 + 3y| \right) + b_1 \left(\frac{y}{3} - \frac{a_1}{9} \ln|a_1 + 3y| \right); \quad a_1 + 3y = 0;$$

$$b_2 = -3: \Phi_8(u) = \frac{x^2 + z^2}{a_1 + 6y} + \left(\frac{a_1b_1}{18} - \lambda \frac{a_1^2}{108} \right) \frac{1}{a_1 + 6y} + \frac{\lambda}{18}y + \left(\frac{b_1}{18} - \lambda \frac{a_1}{54} \right) \ln|a_1 + 6y|; \quad a_1 + 6y = 0.$$

$$b_2 = 3, a_1 \neq 0: \Phi_8(u) = e^{\frac{6}{a_1}y} (x^2 + z^2 + b_1 \frac{6y - a_1}{18} + \lambda \frac{18y^2 - 6a_1y + a_1^2}{54}).$$

В данном случае $\lambda = n$, $\mu = 1$ в ω_7 и $\lambda = n$ в ω_8 .

VI. $I=0$, $\varpi(T)=-1$, $r=3$, $r_c=8$, $\sigma_c=-2$, $r_3=0$. Тогда $\Psi = 3x^2y + 3yz^2$ и ω приводится к виду ω_7 (при $\lambda=0$, $\mu=1$), либо ω_8 (при $\lambda=0$), либо

$$\omega_9 = (a_1x + a_2z)dx + 3(x^2 + z^2)dy + (-a_2x + a_1z)dz;$$

$$\Phi_9(u) = 3y - a_2 \arg \operatorname{tg} \frac{z}{x} + \frac{a_1}{2} \ln(x^2 + z^2); \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

VII. $I = \frac{0}{0}$, $\varpi(T)=0$, $r=2$, $r_c=2$, $\sigma_c=-2$, $r_3=0$. Тогда $\Psi = 3x^2y - y^3$ и ω приводится к виду ω_7 , где $\lambda = -1$, $\mu = 0$.

VIII. $I = \frac{0}{0}$, $\varpi(T)=0$, $r=2$, $r_c=2$, $\sigma_c=0$, $r_3=0$. Тогда $\Psi = x^3 + y^3$. Невырожденным линейным преобразованием $x = \frac{x+y}{\sqrt[3]{2}}$, $y = \frac{y-x}{\sqrt[3]{2}}$ форма Ψ приводится к ви-

ду y^3+3x^2y , и единственным каноническим видом ω в данном случае является ω_7 , где $\lambda=1, \mu=0$.

IX. $I=\frac{0}{0}$, $\varpi(T)=0$, $r=2$, $r_c=1$, $\sigma_c=-1$, $r_3=0$. Тогда $\Psi=3x^2y$. Невырожденным линейным преобразованием $x=y$, $y=z$, $z=x$ форма Ψ приводится к виду $3y^2z$. В данном случае каноническими видами ω являются ω_7 , где $\lambda=0, \mu=0$, а также ω_6 , где $\lambda=0$.

X. $I=\frac{0}{0}$, $\varpi(T)=0$, $r=1$, $r_c=0$, $\sigma_3=0$. Тогда $\Psi=x^3$.

$$\omega_{10}=(a_1x-2b_1y-2c_1z+\lambda x^2+a_2z^2+xy)dx+(b_1x-x^2)dy+(c_1x-a_2xz)dz;$$

$$\Phi_{10}(u)=\frac{2b_1y-2xy+2c_1z-a_2z^2}{x^2}-2\frac{a_1}{x}+2\lambda\ln|x|; x=0.$$

$$\omega_{11}=(a_1x-2b_1y-2c_1z+\lambda x^2+a_2y^2+a_3z^2)dx+(b_1x-a_2xy)dy+(c_1x-a_3xz)dz;$$

$$\Phi_{11}(u)=\frac{2b_1y-a_2y^2+2c_1z-a_3z^2}{x^2}-2\frac{a_1}{x}+2\lambda\ln|x|; x=0.$$

$$\omega_{12}=(a_1x+\lambda x^2+a_2y^2+a_2z^2)dx+(b_1y-a_2xy)dy+(b_1z-a_2xz)dz;$$

$$\Phi_{12}(u)=\frac{1}{(b_1-a_2x)^2}(y^2+z^2+2\frac{a_1}{a_2}x+3\frac{\lambda}{a_2}x^2-2\lambda\frac{b_1}{a_2^2}x-\frac{a_1b_1}{a_2^2})-2\frac{\lambda}{a_2^3}\ln|b_1-a_2x|; b_1-a_2x=0.$$

В данном случае в $\omega_{10}-\omega_{12}\lambda=1$.

XI. Если $\Psi=0$, то ω приводится к одному из видов $\omega_{10}-\omega_{12}$, где $\lambda=0$.

Теорема 4. Невырожденное вполне интегрируемое уравнение Пфаффа (1) всегда интегрируется в элементарных функциях.

1. Карган А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
2. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., 1960.

Поступила в редакцию 05.11.2002.

Михаил Васильевич Кожеро – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений.

Наталья Викторовна Спичекова – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – М.В. Кожеро.