

1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990. С. 36.
2. Степанова Т.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. № 2. С. 48.
3. Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939. С. 447.

Поступила в редакцию 17.10.2002.

Александра Сергеевна Зенченко – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой В.И. Громак.

УДК 517. 921. 41

ЛЕ ВАН ЛИНЬ (Вьетнам)

ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The conditions are shown, at which the Origin of the system $\dot{x}=y+Ax^2+3Bxy+Cy^2$, $\dot{y}=-x+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3$, is a center. The solution is given isochronous problem of this system center.

Проблема центра и фокуса для различных классов кубических систем рассматривалась многими авторами (см, например. [1–5, 7]). Однако полное решение этой проблемы еще далеко от завершения. В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=y+Ax^2+3Bxy+Cy^2, \quad \dot{y}=-x+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3, \quad (1)$$

где A, B, C, K, L, M, N – комплексные параметры. Будем находить условия, при которых особая точка $O(0, 0)$ системы (1) является центром, в том числе и изохронным.

Определение 1. Особая точка $O(0, 0)$ системы

$$\dot{x}=P(x, y), \quad \dot{y}=Q(x, y), \quad (2)$$

где P, Q – аналитические в окрестности $x=y=0$ функций вида $P(x, y)=y + \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij}x^i y^j$, $Q(x, y)=-x + \sum_{i+j=2}^{\infty} b_{ij}x^i y^j$, называется центром, если (2) имеет

аналитический в окрестности $x=y=0$ интеграл $x^2 + y^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} c_{ij}x^i y^j$.

Определение 2. Центр $O(0, 0)$ системы (2) называется изохронным, если существует аналитическое в окрестности $x=y=0$ преобразование $u=x +$

$\sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij}x^i y^j$, $v=y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij}x^i y^j$, приводящее (2) к системе $\dot{u}=v$, $\dot{v}=-u$.

Для системы (1) существует формальный ряд

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} f_k(x, y), \quad (3)$$

где f_k – однородные полиномы k -й степени, для которого в силу (1)

$$\dot{F} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k (x^2 + y^2)^{k+1}. \quad (4)$$

Значения g_k из (4) называются фокусными величинами системы (1). Фокусные величины g_k , $k=1, 2, \dots$, являются полиномами из кольца $\mathbb{C}[A, B, C, K, L, M, N]$. Если в (3) $f_{2p}(0,1)=0$, $p=1, 2, \dots$, то g_k определяются единствен-

ным образом. В этом случае $g_k, k=\overline{1,7}$, содержат соответственно 4, 22, 80, 224, 536, 1140, 2224 слагаемых. Образует идеал $I=\langle g_1, g_2, \dots, g_k, \dots \rangle \subset \mathbb{C}[A, B, C, K, L, M, N]$. Обозначим через $\mathbb{V}(I)$ многообразие идеала I [6], т. е. $\mathbb{V}(I)=\{a=(A, B, C, K, L, M, N) \in \mathbb{C}^7: \text{ для } \forall f \in I \ f(a)=0\}$.

Определение 3. Множество $V=\mathbb{V}(\langle g_1, \dots, g_k, \dots \rangle)$ называется многообразием центра системы (1).

Ясно, что $O(0, 0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{V}(I)$.

Фокусные величины $g_k, k=\overline{1,7}$, можно найти с помощью компьютерной системы "МАТЕМАТИКА 4.1". Вместо фокусных величин g_k будем рассматривать $G_1=\gamma_1 g_1, \gamma_1 \neq 0, G_k=g_k(\text{mod } \langle g_1, \dots, g_{k-1} \rangle), k=\overline{2,7}$. Величины G_k могут быть найдены с помощью алгоритма деления. Имеем

$$\begin{aligned} G_1 &= L+N-B(A+C), \\ G_2 &= 5(A-C)[L(7A+3C)-AB(A+C)]-27B^2(A+C)-48A^2L+3K(AB+3L)+ \\ &\quad +3M[B(A+2C)+L], \\ G_3 &= 12A^2L(31A^2+62AC+35C^2)+[AB(A+C)-L(7A+3C)](5A^3-94A^2C-165AC^2- \\ &\quad -70C^3)-54L[B^2(15A^2+25AC+8C^2)+BL(2A-5C)-L^2]+27KL(5K+M)- \\ &\quad -3AB[K(100A^2+173AC+95C^2)-M(A^2+13AC+10C^2)]-3L[3K(64A^2+ \\ &\quad +65AC+35C^2)+M(9A^2+41AC+18C^2)]+81B^2[K(2BC+5L)-LM]+ \\ &\quad +9B[A(33K^2-13KM+2M^2)-4CKM]. \end{aligned}$$

Отметим, что G_4, G_5, G_6, G_7 содержат соответственно 89, 184, 346, 584 слагаемых, $\langle g_1, \dots, g_k, \dots \rangle = \langle G_1, \dots, G_k, \dots \rangle$. Положим $I_1 = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Тогда $I_k = \langle G_1, \dots, G_k \rangle$.

Теорема 1. Множество $M_0 = \mathbb{V}(J_1) \cup \mathbb{V}(J_2) \cup \mathbb{V}(J_3)$, где

$$\begin{aligned} J_1 &= \langle L+N, A+C, 3K+M, 2AL-3BK, K^2+L^2 \rangle, \\ J_2 &= \langle 2N-3AB, A+2C, L+AB, 2M-2A^2+9B^2, K \rangle, \\ J_3 &= \langle A^2(AB-L)(A^2B^2-10ABL-3L^2)+C^2(AB-3L)(A^2B^2+3L^2)+ \\ &\quad +2AC(A^3B^3-7A^2B^2L+6ABL^2-6L^3), \\ &\quad AC(AB-3L)(A^2B^2-6ABL+L^2)-3K(AB+L)(A^2B^2+3L^2)+ \\ &\quad +A^2(A^3B^3-7A^2B^2L+19ABL^2+11L^3), \\ &\quad A^2(AB-L)(3A^3B^3-23A^2B^2L+33ABL^2-21L^3)+AC(AB-3L)(3A^3B^3- \\ &\quad -11A^2B^2L+15ABL^2-3L^3)-3M(AB-L)^2(A^2B^2+3L^2), \\ &\quad -16A^4L(AB-L)(3AB-L)-27(AB-L)^2(AB+L)(A^2B^2+3L^2)+4A^3C(AB-3L) \times \\ &\quad \times (3A^2B^2-6ABL+7L^2), \\ &\quad -4A^4(AB-3L)^2-9(AB-L)^2(A^2B^2-6ABL+L^2)+4A^2K(3A^2B^2-6ABL+7L^2), \\ &\quad 4A^4(AB-3L)(3AB-5L)+9(AB+L)(3A^3B^3-11A^2B^2L+15ABL^2-3L^3)- \\ &\quad -4A^2M(3A^2B^2-6ABL+7L^2), \quad G_1, G_2, G_3 \rangle, \end{aligned}$$

принадлежит многообразию центра системы (1).

Положим $P(x, y)=y+Ax^2+3Bxy+Cy^2, Q(x, y)=-x+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3$. Для (1) существует формальный ряд

$$H(x, y)=x+\sum_{k=2}^{\infty} h_k(x, y), \quad (5)$$

где h_k – однородные полиномы k -й степени, для которого [3]

$$P^2 H_{xx} + 2PQH_{xy} + Q^2 H_{yy} + (P_x P + P_y Q) H_x + (Q_x P + Q_y Q) H_y + H = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k x y^{2k} + \omega_k y^{2k+1}). \quad (6)$$

Значения v_k, ω_k из (6) называются изохронными величинами системы (1).

Если в (5) $h_{2k+1}(0, 1)=0$, $\frac{\partial h_{2k+1}}{\partial x}(0, 1)=0$, то все v_k, ω_k определяются единственным образом. Образуем идеал $K=\langle v_1, \omega_1, \dots, v_k, \omega_k, \dots \rangle$.

Определение 4. Множество $\mathbb{V}(K)$ называется многообразием изохронного центра системы (1).

Заметим, что $O(0, 0)$ системы (1) является изохронным центром тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{V}(K)$.

Теорема 2. Многообразие изохронного центра системы (1) представимо в виде $W=\mathbb{V}(J_1) \cup \mathbb{V}(J_4)$, где $J_4=\langle B, C, L, M, N, 4A^2+9K \rangle$.

Лемма 1. Начало координат системы

$$\dot{x} = y - p(x \pm iy), \quad \dot{y} = -x - q(x \pm iy), \quad (7)$$

где $p(u), q(u)$ – аналитические в окрестности $u=0$ функции без свободных и линейных членов, является изохронным центром.

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $p(x+iy), q(x+iy)$. Система (7) имеет интеграл $(x^2+y^2)\exp[-\alpha(x+iy)]-(x+iy)^3\beta(x+iy)$, где $\alpha(u), \beta(u)$ – аналитические в окрестности $u=0$ функции вида

$$\alpha(u) = \int_0^u t^{-1} [p(t) + iq(t)][it + p(t) + iq(t)]^{-1} dt,$$

$$\beta(u) = u^{-3} \int_0^u t [p(t) - iq(t)][it + p(t) + iq(t)]^{-1} \exp[-\alpha(t)] dt,$$

т. е. $O(0, 0)$ – центр системы (7). Для (7) коммутирующей системой является

$$\dot{x} = x - ip(x+iy) + q(x+iy) - is(x+iy), \quad \dot{y} = y + s(x+iy),$$

где

$$s(u) = u^{-1} \exp[\alpha(u)] \int_0^u t [q'(t)(t+q(t)) - ip(t)(1+q'(t))][it+p(t)+iq(t)]^{-1} \exp[-\alpha(t)] dt.$$

Из [8, 9] следует, что $O(0,0)$ является изохронным центром системы (7).

Предложение 1. Если

$$\begin{aligned} &A(A^2B^2-L^2)(A^2B^2+3L^2) \neq 0, \quad L+N-B(A+C)=0, \\ &AC(AB-3L)(A^2B^2-6ABL+L^2)-3K(AB+L) \times \\ &\times (A^2B^2+3L^2)+A^2(A^3B^3-7A^2B^2L+19ABL^2+11L^3)=0, \\ &A^2(AB-L)(3A^3B^3-23A^2B^2L+33ABL^2-21L^3)+AC(AB-3L) \times \\ &\times (3A^3B^3-11A^2B^2L+15ABL^2-3L^3)-3M(AB-L)^2(A^2B^2+3L^2)=0, \\ &4A^3C(AB-3L)(3A^2B^2-6ABL+7L^2)-16A^4L(AB-L) \times \\ &\times (3AB-L)-27(AB-L)^2(AB+L)(A^2B^2+3L^2)=0, \\ &A^2(AB-L)(A^2B^2-10ABL-3L^2)+C^2(AB-3L)(A^2B^2+3L^2)+ \\ &+2AC(A^3B^3-7A^2B^2L+6ABL^2-6L^3)=0, \end{aligned} \quad (8)$$

то $O(0, 0)$ системы (1) является центром.

Доказательство. При выполнении условий (8) система (1) имеет аналитический в окрестности $x=y=0$ интеграл

$$f_1^{v_1} f_2 \exp(v_0 x), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1 + 3(AB-L)x/(2A) - [2A(AB-L) - C(AB-3L)]y/[3(AB-L)], \\
f_2 &= 1 + 3(AB+L)x/(2A) + 2A(AB+L)[A(AB-L)(AB-5L) + C(AB-2L) \times \\
&\times (AB-3L)]x^2/[3(AB-L)(A^2B^2+3L^2)] - [4A(AB-L) + C(AB-3L)]y/[3(AB-L)] - L[4A(AB-L) + \\
&+ C(AB-3L)]xy/[A(AB-L)] + 2A[A(AB-L)(A^2B^2+2ABL-7L^2) + C(AB-3L) \times \\
&\times (A^2B^2+2ABL-L^2)]y^2/[3(AB-L)(A^2B^2+3L^2)], \\
v_0 &= [A(A^2B^2-ABL+6L^2) + C(A^2B^2+3L^2)]/[A^2(AB-L)], \\
v_1 &= -[A(5A^2B^2-2ABL+9L^2) + 2C(A^2B^2+3L^2)]/[3A(AB-L)^2].
\end{aligned}$$

Предложение 2. Пусть в (1)

$$\begin{aligned}
&ABCKLMN(A+C)(A+2C)(L^2-A^2B^2)(3L-AB) \times \\
&\times (L+2AB+2BC)(3A^2B^2-6ABL+7L^2)(A^2B^2+3L^2) = 0.
\end{aligned} \quad (10)$$

Тогда многообразием центра системы (1) является множество $V = \mathbb{V}(J_1)$

$$\begin{aligned}
&\cup \mathbb{V}(J_2) \bigcup_{k=1}^{10} \mathbb{V}(P_k), \text{ где } P_1 = \langle B, L, N \rangle, P_2 = \langle A, C, L, N \rangle, P_3 = \langle A, L, 2M-9B^2, \\
&N-BC \rangle, P_4 = \langle C, N, M, L-AB, K-A^2, 2A^2+9B^2 \rangle, P_5 = \langle B, L+N, 9K-A(11A-3C), \\
&3M-A(7A+3C), A^2-4AC-3C^2, 81L^2+4A^3(4A+21C) \rangle, P_6 = \langle C, L+N-AB, 18K- \\
&-16A^2-81B^2, 3M-2(5A^2+27B^2), 3AL+B(13A^2+81B^2), 3L^2-AB(AB-10L) \rangle, \\
&P_7 = \langle N-B(12A+5C), M, L+B(11A+4C), 9K-A(53A+18C), 2A^2-27B^2, \\
&28A^2+27AC+6C^2 \rangle, P_8 = \langle 2(L+N)-AB, A+2C, 9K+4(7A^2+27B^2), 6M-38A^2-135B^2, \\
&27AL+B(115A^2+432B^2), 27L^2+AB(AB-20L) \rangle, P_9 = \langle L+N-B(A+C), \\
&3M-C(A+2C)-74A^2-135B^2, 6K+8(5A^2+9B^2)-C(3A+2C), 7AL+B(71A^2+126B^2), \\
&A(88A^2+75AC+2C^2)+9B^2(17A+14C), 3AB(AB-2L)+7L^2 \rangle, P_{10} = \langle 2L+B(8A+7C), \\
&2N-B(10A+9C), K+3(A^2+2B^2), 2M-18A^2-37B^2, 3AC-7B^2, A^2B^2+3L^2 \rangle.
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть выполняется условие (10). Используя базисы Грёбнера [6], имеем $\mathbb{V}(I_6) = V$. Следовательно, $\mathbb{V}(I) \subset V$. Покажем, что $\mathbb{V}(I) \supset V$.

На множестве $\mathbb{V}(J_1)$ система (1) имеет вид

$$\dot{x} = y + A(x \pm iy)^2, \quad \dot{y} = -x + K(x \pm iy)^3. \quad (11)$$

Из леммы 1 заключаем, что $O(0, 0)$ системы (11) является центром. На множестве $\mathbb{V}(J_2)$ система (1) при $B \neq 0$ имеет аналитический интеграл $[(1-Ay+3ABxy+9B^2y^2/2)/(1+3Bx-Ay)] \exp(3Bx)$, $O(0, 0)$ системы (1) – центр. На множествах $\mathbb{V}(P_1)$, $\mathbb{V}(P_2)$ имеем случаи симметрии, а поэтому система (1) имеет в $O(0, 0)$ центр. На множестве $\mathbb{V}(P_3)$ система (1) при $B \neq 0$ имеет аналитический интеграл $[18B^2K(1+Bx)x^2 + (1+3Bx)(4K-6B^2+27B^4y^2) + 18B^4Cy^3] \times \exp(-3Bx)$. На множестве $\mathbb{V}(P_4)$ имеем систему

$$\dot{x} = y + Ax^2 + 3Bxy, \quad \dot{y} = -x + A^2x^3 + 3ABx^2y. \quad (12)$$

Замена $y = (z - Ax^2)/(1+3Bx)$ и исключение времени приводит систему (12) к уравнению

$$p_0(x)zz' = -x + xp_1(x)z + p_2(x)z^2, \quad (13)$$

где $p_0(x) = 2[1 + (1+3Bx)^2]$, $p_1(x) = 2A(1+3Bx)$, $p_2(x) = 6B[1 + (1+3Bx)(1 + (1+3Bx)^2)]$. Так как $p_0 p_1' + p_1 p_2 = 0$, то $O(0, 0)$ системы (13), а значит, и (12) является центром. На множествах $\mathbb{V}(P_5) - \mathbb{V}(P_9)$ при $A \neq 0$ имсют место условия (8), а значит, на основании предложения 1 система (1) имеет на этих множествах центр. На множествах $\mathbb{V}(P_5) - \mathbb{V}(P_9)$ система (1) имеет аналитический инте-

грал (9). На множестве $\mathbb{V}(P_{10})$ аналитическим интегралом системы (1) при $A \neq 0$ является интеграл вида (9), где

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + 3B(10A + 7C)x/(4A) - 3(2A + C)y/2, \\ f_2 &= 1 - 3B(6A + 7C)x/(4A) + (2A + 3C)y/2 + 3A(14A + 11C)x^2/14 + \\ &\quad + 3B(6A + 5C)xy/2 - 4A(7A + 6C)y^2/7, \\ v_0 &= B(22A + 21C)/(4A), \quad v_1 = (6A + 7C)/(4A), \end{aligned}$$

т. е. $O(0, 0)$ – центр системы (1).

Доказательство теоремы 1. Доказательство следует непосредственно из предложений 1, 2.

Доказательство теоремы 2. Образует идеал $K_6 = \langle v_1, \omega_1, \dots, v_6, \omega_6 \rangle$. Находя для K_6 базисы Грёбнера, получаем $\mathbb{V}(K_6) = W$. Следовательно,

$\mathbb{V}(K) \subset W$. Покажем, что $\mathbb{V}(K) \supset W$. На множестве $\mathbb{V}(J_1)$ система (1) имеет вид (11). Из леммы 1 заключаем, что на $\mathbb{V}(J_1)$ $O(0, 0)$ – изохронный центр системы (1). На множестве $\mathbb{V}(J_4)$ система (1) имеет вид

$$\dot{x} = y + Ax^2, \quad \dot{y} = -x - 4A^2x^3/9. \quad (14)$$

Система (14) имеет в $O(0, 0)$ изохронный центр, так как замена $u = x/(1 - 2A^2x^2/9 - 2Ay/3)$, $v = (y + Ax^2/3)/(1 - 2A^2x^2/9 - 2Ay/3)$ преобразует (14) к системе $\dot{u} = v$, $\dot{v} = -u$.

Заметим, что $V \subset M_0 \subset \mathbb{V}(I)$. Пусть $M_1 \subset \mathbb{V}(I)$, но $M_1 \neq V$. Тогда $BL \neq 0$. Замена $x = BX/L$, $y = BY/L$ приводит систему (1) к системе

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y + ABX^2/L + 3B^2XY/L + BCY^2/L, \\ \dot{Y} &= -X + KB^2X^3/L^2 + 3B^2X^2Y/L + MB^2XY^2/L^2 + NB^2Y^3/L^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Система (15) показывает, что при $BL \neq 0$ в системе (1) можно считать $L = B$. Полагая $L = B$, $C = U - A$, имеем систему

$$\dot{x} = y + Ax^2 + 3Bxy + (U - A)y^2, \quad \dot{y} = -x + Kx^3 + 3Bx^2y + Mxy^2 + Ny^3. \quad (16)$$

При $M_1 \neq V$ $U(A - 1)(A + 1)(2U + 1)(A - 3)(A^2 + 3)(3A^2 - 6A + 7) \neq 0$. Из $G_1 = 0$ получаем

$$N = B(U - 1). \quad (17)$$

С учетом (17) $G_k = B \bar{g}_k$, $k = \overline{2, 6}$, где $\bar{g}_2 = -8A^2 + 3K(A + 3) - 3M(A - 2U - 1) - 10AU(A - 1) - 27B^2U + 5U^2(A - 3)$. Если $\bar{g}_2 = 0$, то $\bar{g}_3 = h_3/U$, $\bar{g}_4 = h_4/U^2$, $\bar{g}_5 = h_5/U^3$, $\bar{g}_6 = h_6/U^3$, где $h_i \in \mathbb{C}[M, K, A, U]$. С учетом $h_3 = 0$ получаем $h_i = W_i(A - 1)^{i-3} \times$

$\times (2U + 1)^{i-3}$, $i = \overline{4, 6}$, где W_i – полиномы первой степени относительно M . Обозначим через $R_x(p, q)$ результат полиномов p, q относительно x . Имеем $R_M(W_4, g_3) = \alpha_4(A - 1)U^2(2U + 1)r_4$, $R_M(W_4, W_1) = \alpha_1(A - 1)U^2(2U + 1)r_1$, где $\alpha_i \neq 0$, $r_i \in \mathbb{C}[K, A, U]$, $i = \overline{4, 6}$. Далее находим $R_K(r_4, pr_5 + r_6) = \beta(A - 1)^5(A + 1)^2 U^{15}(2U + 1)^5 \times$
 $\times [-2A^2(A - 3) - 2AU(4A^2 - 3A - 3) + U^2(A - 3)(A^2 + 3)] P_0^2 [-(A + 1)P_1q_7p^6 - 2q_6p^5 - 8\gamma q_5p^4 -$
 $- 64\gamma^2 q_4p^3 - 256\gamma^3 q_3p^2 - 512\gamma^4 q_2p - 2048\gamma^5 q_1]$, где $\beta \neq 0$, $\gamma = (A - 1)(2U + 1)$, q_i , $i = \overline{1, 7}$ – полиномы от A, U , состоящие соответственно из 4174, 4020, 3866, 3693, 3523, 3338, 2478 слагаемых, P_0, P_1 – полиномы от A, U , содержащие соответственно 438, 29 слагаемых. Если $-2A^2(A - 3) - 2AU(4A^2 - 3A - 3) + U^2(A - 3) \times$
 $\times (A^2 + 3) = 0$, то из $r_i = 0$, $i = \overline{4, 6}$, находим $K = [2A^2(A^2 + 7) + AU(A - 3) \times$
 $\times (1 - 6A + A^2)]/[3(A + 1)(A^2 + 3)]$, а из $h_4 = 0$ $M = [-2A^2(-6 + 3A - 4A^2 + 3A^3) + AU(A - 3) \times$

$\times(-3+15A-11A^2+3A^3)U[3(A-1)^2(A^2+3)]$. Далее из $\bar{g}_2 = 0$, $\bar{g}_1 = 0$ имеем $27(A-1)^2 \times (A+1)(A^2+3)B^2+4A^4(-17+9A-3A^2+3A^3)+4A^3U(A-3)(7-6A+3A^2)$, $N=B(U-1)$. Таким образом, получен случай центра, содержащийся в предложении 1. Если $M_2 \subset \mathbb{V}(I)$, где $M_2 \neq M_1$, то $q_i=0$, $i=\overline{1,7}$. Маловероятно, что из $q_i=0$, $i=\overline{1,7}$, можно найти случаи центра, не содержащиеся в теореме 1.

1. Куклес И. С. // ДАН СССР. 1944. Т. 42. № 5. С. 208.
2. Черкас Л. А. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 594.
3. Амелин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.
4. Zoladek H. // Topological methods in Nonlinear Analysis. 1994. Vol. 4. P. 79.
5. Садовский А. П. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 236.
6. Cox D., Little J., O'Shea D. Ideal, Varieties and Algorithms. New York; Berlin; Hamburg, 1998.
7. Romanovski V. G., Suba A. // Ann. of Diff. Eqs. 2001. Vol. 17. № 4. P. 363.
8. Ладис Н. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1976. № 1. С. 21.
9. Villarini M. // Nonlinear Anal. 1992. Vol. 19. № 8. P. 787.

Поступила в редакцию 26.12.2002.

Ле Ван Линь – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. П. Садовский.

УДК 517.943

М. В. КОЖЕРО, Н. В. СПИЧЕКОВА

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПФАФФА С СУММОЙ ЛИНЕЙНОГО И БИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРОВ В R^3

One totally integrable nonhomogeneous Pfaff equation with sum of linear and bilinear operators in R^3 is considered. Its canonical forms and their general solutions are given.

Пусть $u=(x, y, z)$ – вектор из R^3 , $(\dots\dots)$ – скалярное произведение в R^3 , A – линейный, B – билинейный операторы в R^3 .

Рассмотрим вполне интегрируемое уравнение Пфаффа [1]

$$(Au+B(u, u), du)=0, \quad (1)$$

в котором Au и $B(u, u)$ не имеют общих множителей. Условие его вполне интегрируемости имеет вид

$$(Au+B(u, u), \operatorname{rot} (Au+B(u, u)))=0. \quad (2)$$

Ставится задача найти общее решение уравнения (1).

Определение 1. Уравнение (1) называется вырожденным уравнением Пфаффа, если существует невырожденное линейное преобразование $u=Sv$, приводящее его к обыкновенному дифференциальному уравнению. В противном случае будем называть его невырожденным уравнением Пфаффа.

Теорема 1. Вырожденное уравнение Пфаффа всегда вполне интегрируемо, а его интегральными поверхностями являются цилиндрические поверхности с направляющими, определяемыми соответствующим обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение 2. Уравнение (1) называется квазиоднородным, если существует преобразование $u=v+u_0$, где u_0 – постоянный вектор из R^3 , приводящее его к однородному уравнению вида $(B(v, v), dv)=0$.