

Применим подобные рассуждения к однородной линейной системе (22), (23), содержащей в качестве неизвестных функции  $F_i$  ( $i=\overline{1,6}$ ). В результате получаем равенства

$$F_i=0 \quad (i=\overline{1,6}). \quad (26)$$

Коэффициенты при  $y^2-y^0$  обращаются в нуль, если выполняются равенства (25), (26). Из соотношений (20), (25) следует, что  $a_i$  ( $i=\overline{1,6}$ ) – постоянные, и, следовательно,  $C_i=0$  ( $i=\overline{1,6}$ ).

Учитывая, что  $\varphi_1=\varphi_2=0$ , перепишем уравнение (9) в виде

$$y'' = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{y-1} + \frac{1}{y+1} \right) y'^2.$$

Последнее уравнение автономно и легко интегрируется. Его общее решение есть дробно-рациональная функция вида

$$y = 1 + \frac{1}{C_1(x-C_2)-1} + \frac{1}{C_1(C_2-x)-1}, \quad (27)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. Сформулируем приведенные рассуждения в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Уравнение Шази  $y'' = \sum_{k=1}^n \frac{y'y'' - y'^3/a_k}{y - a_k}$  имеет двухпараметри-

ческое семейство решений вида (27), если  $a_k$  ( $k=\overline{1,6}$ ) удовлетворяют условиям  $\sigma_2=0, \sigma_3=2, \sigma_4=0, \sigma_6=1$ .

1. Chazy J. // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 317.
2. Добровольский В.А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Киев, 1974.
3. Лукашевич Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 353.
4. Чичурин А.В // Весн. Брэсц. ун-та. 2001. № 2. С. 55.

Поступила в редакцию 25.09.2002.

*Александр Вячеславович Чичурин* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина.

УДК 517.925.42

И.Л. ШЕВЦОВ

### КВАДРАТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ С РАЗЛИЧНЫМИ КОНФИГУРАЦИЯМИ ОСОБЫХ ТОЧЕК И МАКСИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ВОКРУГ НЕГРУБОГО ФОКУСА

A series of parametric sets of quadratic systems with different configurations of singular points and with maximum numbers of limit cycles around of weak focus is constructed.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

где  $P(x,y), Q(x,y)$  – полиномы относительно  $x, y$  степени не выше  $m$ , причем один из них имеет степень  $m$ . Как известно [1], квадратичная система ( $m=2$ ) может иметь предельные циклы, окружающие лишь одну особую точку, которая является фокусом. Так как квадратичная система может иметь не более двух фокусов [1], то у системы (1) будет распределение  $m, m \in N_0$ , если

она имеет  $m$  предельных циклов вокруг фокуса при условии, что фокус единственный, и распределение  $(m_1, m_2)$ ,  $m_1+m_2>0$ ,  $m_1\geq 0$ ,  $m_2\geq 0$ , если вокруг двух фокусов содержится  $m_1$  и  $m_2$  предельных циклов соответственно при условии, что фокусы существуют. Будем также говорить, что система (1) с негрубым фокусом имеет, например, конфигурацию особых точек  $3A+1S+2S_\infty+1A_\infty$ , если в конечной части плоскости существуют три антиседла и одно седло, а также два седла и одно антиседло в бесконечности.

Цель настоящей работы – привести ряд параметрических семейств квадратичных систем с негрубым фокусом и максимальным числом предельных циклов (т. е. распределениями (2), (2,0), (2,1)) на случай всех возможных конфигураций особых точек. Такие системы ранее были получены на уровне инфинитезимальных предельных циклов или с помощью численных методов.

**Теорема 1** [2]. Пусть в односвязной области  $\Omega\subset R^2$  система (1) имеет единственную особую точку – антиседло  $A$ ,  $\text{div}f(A)\neq 0$ ,  $f=(P, Q)$ . Пусть также функция  $\Psi(x, y)\in C^1(\Omega)$  удовлетворяет при некотором  $k<0$ ,  $k\in R$ , условию

$$\Phi = k\Psi\text{div}f + \frac{\partial\Psi}{\partial x}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q > 0, \tag{2}$$

при этом уравнение  $\Psi(x, y)=0$  определяет гнездо из  $q$  вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из  $q-1$  двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом в области  $\Omega$  она имеет не более  $q$  предельных циклов.

Для системы Лъенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \tag{3}$$

можно всегда найти функцию  $\Psi$  в виде полинома относительно  $y$  степени  $N-1$

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Psi_i(x)y^{N-i} \tag{4}$$

такую, что соответствующая функция  $\Phi$  не зависит от  $y$  [2]. Для этого необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\Psi_1 = C_1, \quad \Psi'_1 = 0, \quad \Psi_2 = kFC_1 + C_2, \quad \Psi'_2 = kfC_1, \tag{4'}$$

$$f = F'(x), \quad \Psi'_i = kf\Psi_{i-1} + (n-i+2)g\Psi_{i-2} + F\Psi'_{i-1},$$

$$\Psi_i = \int \Psi'_i(t)dt + C_i, \quad i = 3, \dots, N,$$

где  $C_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , – произвольные константы, появляющиеся при интегрировании функций  $\Psi'_i(t)$  по  $t$ . Функция  $\Phi$  при этом имеет вид

$$\Phi = -kf\Psi_N - g\Psi_{N-1} - F\Psi'_N \tag{5}$$

и является линейной комбинацией полиномов  $\Phi_i(x)$ , т. е.

$$\Phi = \Phi(x, C) = \sum_{i=1}^N C_i\Phi_i(x). \tag{6}$$

Для существования положительной на некотором отрезке  $[\alpha, \beta]$  функции  $\Phi$  в семействе функций (6) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\max_{|C_i|\leq 1} \min_{x\in[\alpha, \beta]} \Phi(x, C) > 0. \tag{7}$$

В нашем случае система Лъенара (3) имеет негрубый фокус при  $F'(0)=0$ , т. е. все функции  $\Phi_i(x)$  обращаются в нуль при  $x=0$ . Тогда можно рассмот-

реть подсемейство семейства функций  $\Phi$ , удовлетворяющих условию  $\Phi'(0)=0$ , притом, что хотя бы одно из чисел  $\bar{\Phi}_i(0) \neq 0$ . Функцию  $\Phi$  можно представить в виде

$$\Phi = x^2 \sum_{i=1}^{N-1} \bar{C}_i \bar{\Phi}_i(x) = x^2 \bar{\Phi}, \quad (7')$$

где не все числа  $\bar{\Phi}_i(x) = 0$ . Далее можно искать условие положительности функции  $\bar{\Phi}$  при помощи выбора значений постоянных  $\bar{C}_i$ .

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= 1 + xy, & dy/dt &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + ay^2, \\ a_{00} &= a_{01} + a_{11} - a_{10} - a_{20} - a_{02}, & a_{01} &= 2a_{02} + 1 - a_{11}, \end{aligned} \quad (8)$$

имеющую негрубый фокус  $A(1, -1)$ . К системе (8) в невырожденном случае приводится любая квадратичная система с негрубым фокусом с помощью аффинного преобразования фазовых переменных и растяжения шкалы времени. Так как предельные циклы данной системы окружают единственную особую точку, которая является негрубым фокусом, то в дальнейшем будем изучать ее предельные циклы вокруг особой точки  $A(1, -1)$  в полуплоскости  $x > 0$ .

Существует гипотеза, что в случае, когда точка  $A$  является фокусом кратности 1, ее могут окружать не более двух предельных циклов. Получаем следующие условия:

$$\operatorname{div}f(A)=0, \quad v_3 \neq 0, \quad (9)$$

где  $f$  – векторное поле, ассоциированное с системой (8),  $v_3$  – первая фокусная величина в точке  $A$ .

Фактически в работе используется метод возмущения первой фокусной величины для появления двух предельных циклов при варьировании выражения (9). Далее с помощью вспомогательных функций Дюлака и численного метода доказываем, что система имеет ровно два предельных цикла вокруг соответствующего фокуса.

Для применения численного метода переходим от канонического вида

$$(8) \text{ к системе Льенара (3), применив преобразование } x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \bar{y}\xi^{-a} - \xi.$$

Тогда

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{y}, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = -P_4(\xi)\xi^{2a-3} - P_2(\xi)\xi^{a-2}\bar{y}, \quad (10)$$

где  $P_2(\xi) = a_{11} + a_{01}\xi - (2a+1)\xi^2$ ,  $P_4(\xi) = a_{20} + a_{10}\xi + (a_{00} - a_{11})\xi^2 - a_{01}\xi^3 + a\xi^4$ . Система (10) стандартным преобразованием  $\bar{y} = y - F(\xi)$  приводится ко второй форме системы Льенара (3)

$$\frac{d\xi}{dt} = y - F(\xi), \quad \frac{dy}{dt} = -g(\xi), \quad (11)$$

где  $F(\xi) = \int_1^\xi P_2(t)t^{a-2} dt$ ,  $g(\xi) = P_4(\xi)\xi^{2a-3}$ . Особой точке  $A(1, -1)$  системы (8) соответствует особая точка  $\bar{A}(1, 0)$  систем (10), (11).

Использование вспомогательной функции Дюлака вида  $|\Psi(x, y)|^{1/k}$ ,  $k < 0$ ,  $\Psi(x, y)$  – полином относительно  $y$  с гладкими коэффициентами относительно  $x$  в рассматриваемой области [2], позволяет свести задачу оценки числа предельных циклов к нахождению положительной функции одной переменной в случае отсутствия кратных предельных циклов.

В работах [2, 3] продемонстрирована возможность применения численного метода для квадратичных систем с негрубым фокусом.

**Теорема 2.** Пусть система (8) с негрубым фокусом удовлетворяет одному из условий таблицы. Тогда она имеет два предельных цикла вокруг негрубого фокуса  $A(1, -1)$  и соответствующие распределения предельных циклов, указанные в таблице.

Семейства квадратичных систем с негрубым фокусом с конфигурацией особых точек и распределением предельных циклов

| № | Коэффициенты системы |          |          |      | Конфигурация особых точек    | Распределение предельных циклов |
|---|----------------------|----------|----------|------|------------------------------|---------------------------------|
|   | $a_{10}$             | $a_{20}$ | $a_{11}$ | $a$  |                              |                                 |
| 1 | -51,880              | -115     | 1,80     | 1,03 | $2A+2S_{\infty}+1A_{\infty}$ | (2,1)                           |
| 2 | 5,587                | -6       | -1,85    | 3    | $2A+2S_{\infty}+1A_{\infty}$ | 2                               |
| 3 | 23,540               | -20      | -0,60    | 2,4  | $2A+2S_{\infty}+1A_{\infty}$ | (2,0)                           |
| 4 | 5,720                | -8       | 0,80     | 3/2  | $2A+2S_{\infty}+1A_{\infty}$ | (2,0)                           |
| 5 | -3,402               | -6       | 2,45     | 8/11 | $2A+1S_{\infty}$             | (2,1)                           |
| 6 | -17,280              | 8        | 9,04     | -2   | $3S+1A$                      | 2                               |
| 7 | 6,945                | -1       | 9,50     | -2   | $1A+1S$                      | 2                               |
| 8 | 7,770                | -0,25    | 11,50    | -3   | $2A+2S$                      | 2                               |
| 9 | 44,470               | -30      | -5       | 5    | $3A+1S$                      | 2                               |

Во всех примерах значения коэффициентов  $a_{00}$  и  $a_{01}$  однозначно определяются из системы (8).

**Доказательство. Система 1.** Для оценки числа предельных циклов системы 1 вокруг негрубого фокуса  $A(1, -1)$  рассмотрим соответствующую ей систему Льенара (11), в которой сделана замена  $y \rightarrow 10y$ , т. е. систему (11) при

$$F(\xi) = -124860/20909 + 6\xi^{3/100} + 63\xi^{103/100}/515 - 153\xi^{203/100}/1015, \quad g(\xi) = -23/20\xi^{47/50} - 5188\xi^{3/50}/10000 + 16711\xi^{53/50}/10000 - 63\xi^{103/50}/5000 + 103\xi^{153/50}/10000. \quad (12)$$

Тогда для системы (11), (12) ищем функцию  $\Psi$  в виде (4), (4') при  $x=\xi$ ,  $N=8$ ,  $k=-1$ . Функцию  $\Phi^*(\xi, C)=10\Phi(\xi, C)/(\xi-1)^2$  берем в виде (7') при  $x=\xi$ . Для нахождения

$$\max_{|C_j| \leq 1} \min_{\xi \in (0,1)} \Phi^*(\xi, C)$$

рассмотрим сеточную задачу

$$\Phi^*(\xi_j, C) \geq L, \quad L \rightarrow \max, \quad |C_j| \leq 1 \quad (13)$$

на равномерной сетке  $\xi_i = \alpha + (i-1)(\beta-\alpha)/M$ ,  $i=1, \dots, M+1$ ;  $j=1, \dots, N+1$ ;  $\alpha=0,1$ ;  $\beta=2$ ;  $M=151$ . Задача (13) имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=1,01663 \cdot 10^{-6}$ ;  $C=C^* = (-0,00053; -0,00121; 0,0572; 0,99999(9); 0,05736; -1; -0,01494; -1; 0,000001)$ . Но при найденном  $C^*$  функция  $\Phi^*(\xi, C^*)$ , а также  $\Phi(\xi, C^*)$  положительны при  $\xi > 0$ , и уравнение  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  определяет в полуплоскости  $\xi > 0$  два вложенных друг в друга овала. На основании теоремы 1 заключаем, что система (11), (12) в области  $\xi > 0$ , а система 1 в области  $x > 0$  имеют не более двух предельных циклов, причем точно один лежит в кольце между соседними овалами. Существование второго предельного цикла легко доказать с помощью построения кольца Бендиксона. Расположение овалов кривой  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  и предельных циклов показано на рис. 1.

Докажем теперь, что система 1 вокруг фокуса  $B(x_0, -1/x_0)$ ,  $x_0 = -1,45672$  имеет один предельный цикл. Для доказательства единственности предельного цикла рассмотрим систему Льенара (3), соответствующую системе 1, в которой точка  $B(x_0, -1/x_0)$  перешла в точку  $A(1, -1)$  после преобразования

$x \rightarrow x_0x, y \rightarrow y_0y$ . Функцию  $\Psi$  будем искать в виде (4), (4') при  $x=\xi, N=3, k=-2/3$ . Рассмотрим функцию  $\Phi^*(\xi, C)=10^6 \xi^{97/100} \Phi(\xi, C)$ .

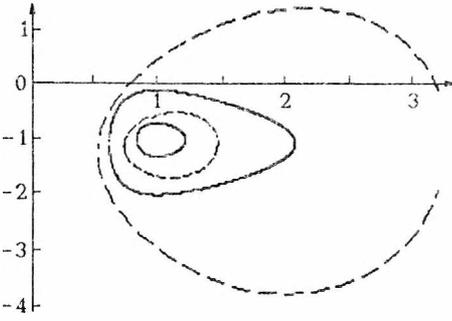


Рис. 1. Овалы, определенные кривой  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  (сплошные), и предельные циклы (штриховые) для системы 1

Для нахождения  $\max_{|C_j| \leq 1} \min_{\xi \in [0, 7]} \Phi^*(\xi, C)$

решим сеточную задачу (13) на сетке  $\xi_j=(i-1)7/80, j=1, \dots, 81; j=1, \dots, N+1$ . Решение задачи приближенно равно  $L=L_{\max}=7,84919 \cdot 10^{-8}; C=C^*=(-0,00014; 0,01229; 0,9999995; 0,9999995)$ . Средствами анализа легко показать, что  $\Phi^*(\xi, C^*)$ , а следовательно, и  $\Phi(\xi, C^*)$  положительны при  $\xi > 0$ . Уравнение  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  определяет в области  $\xi > 0$  один овал, что по теореме 1 доказывает единственность предельного цикла системы 1, окружающего фокус  $B(x_0, -1/x_0), x_0 < 0$ .

Существование предельного цикла вокруг фокуса  $B$  можно доказать с помощью построения кольца Бендиксона. Таким образом, утверждение теоремы 2 для системы 1 доказано.

**Система 2.** Для оценки числа предельных циклов вокруг фокуса  $A(1, -1)$  преобразуем систему 2 к системе Лъенара (11) с соответствующими  $F(\xi)$  и  $g(\xi)$ . Тогда для системы (11) ищем функцию  $\Psi$  в виде (4), (4') при  $N=9, k=-1$  и берем функцию  $\Phi^*(\xi, C)=\Phi(\xi, C)/(\xi-1)^2$  при  $x=\xi$ . Для нахождения  $\max_{|C_j| \leq 1} \min_{\xi \in [0, 6; 1, 25]} \Phi^*(\xi, C)$  рассмотрим сеточную задачу (13) на сетке  $\xi_i=\alpha+$

$+(i-1)(\beta-\alpha)/M, i=1, \dots, M+1; j=1, \dots, N+2; \alpha=0,6; \beta=1,25; M=151$ . Задача (13) имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=3,29784 \cdot 10^{-6}, C=C^*=(0,33924; 0,638267; 0,999996; 0,36027; -0,999996; -0,93278; -0,97214; -0,31861; 0,999996; 0,999996; 0,999996)$ . При найденном  $C^*$  функция  $\Phi(\xi, C^*)$  положительна в случае  $\xi > 0$ , уравнение  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  определяет в полуплоскости  $\xi > 0$  два вложенных друг в друга овала. Тогда на основании теоремы 1 система (11) в области  $\xi > 0$ , а система 2 в области  $x > 0$  имеют не более двух предельных циклов. Это завершает исследование системы 2.

Следующие две системы 3 и 4 имеют одну и ту же конфигурацию особых точек  $2A+2S_{\infty}+1A_{\infty}$  и одинаковое распределение предельных циклов  $(2, 0)$ , но коэффициент  $a_{11}$  имеет различные знаки. Отсутствие предельных циклов вокруг фокуса  $B(x_0, -1/x_0)$  при  $x_0=-0,560932$  для системы 3 и при  $x_0=-0,821504$  для системы 4 доказывается так же, как и единственность предельного цикла, окружающего фокус  $B$ , для системы 1.

**Система 3.** Берем соответствующие  $F(\xi), g(\xi)$  для системы (11). Тогда при  $N=8, k=-1$  для системы (11) ищем функцию  $\Phi^*(\xi, C)=\Phi(\xi, C)/(\xi-1)^2$  при  $x=\xi$ . Для нахождения максимума рассмотрим сеточную задачу (13) на сетке  $\xi_i=\alpha+(i-1)(\beta-\alpha)/M, i=1, \dots, M+1; j=1, \dots, N+1; \alpha=0,01; \beta=2; M=151$ .

Задача (13) имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=1,81484 \cdot 10^{-4}, C=C^*=(-0,00043; -0,0048; -0,03732; -0,30907; -0,11731; 0,99999(9); 0,19194; -1; 0,00018)$ . Положительность максимума подтверждается средствами анализа. При найденном  $C^*$  функция  $\Phi(\xi, C^*)$  положительна при  $\xi > 0$ , уравнение  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  определяет в полуплоскости  $\xi > 0$  два вложенных друг в друга овала. Тогда на основании теоремы 1 система (11) в области  $\xi > 0$ , а система

3 в области  $x > 0$  имеют не более двух предельных циклов, причем ровно один лежит в кольце между соседними овалами. Сказанное завершает доказательство теоремы 2 для системы 3.

**Система 4.** При  $N=9, k=-1$  для системы (11) ищем функцию  $\Psi$  и функцию  $\Phi^*(\xi, C) = \Phi(\xi, C)/(\xi-1)^2$  при  $x=\xi$ . Задачу нахождения максимина на отрезке с концами  $\alpha=0,1$  и  $\beta=1,75$  заменим сеточной задачей (13) с равномерной сеткой  $\xi_i = \alpha + (i-1)(\beta-\alpha)/M, i=1, \dots, M+1; j=1, \dots, N+1; M=151$ .

Задача (13) имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=3,711 \cdot 10^{-4}, C=C^*=(0,00018; 0,00167; 0,00746; 0,03443; 0,22298; 0,1645; -1; -0,28016; -1; 0,00037)$ . При найденном  $C^*$  функция  $\Phi(\xi, C^*)$  положительна при  $\xi > 0$ , уравнение  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  определяет в полуплоскости  $\xi > 0$  два вложенных друг в друга овала. Далее, рассуждая так же, как и для системы 3, получаем утверждение теоремы 2.

**Система 5.** Система имеет два фокуса:  $A(1, -1), B(x_0, -1/x_0), x_0 = -1,53989$ . Единственность предельного цикла вокруг фокуса  $B$  доказывается так же, как и в системе 1. Для исследования предельных циклов вокруг негрубого фокуса  $A$  рассмотрим систему Льенара (11) с соответствующими  $F(\xi)$  и  $g(\xi)$ .

Тогда для системы (11) при  $N=9, k=-1$  берем функцию  $\Phi^*(\xi, C) = \Phi(\xi, C)/(\xi-1)^2$ . Задачу нахождения максимина функции  $\Phi^*(\xi, C)$  на отрезке  $[0,1; 2]$  заменяем сеточной задачей (13) с равномерной сеткой  $\xi_i = \alpha + (i-1) \times (\beta-\alpha)/M, i=1, \dots, M+1; j=1, \dots, N+1; M=451$ . Сеточная задача имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=7,31335 \cdot 10^{-6}; C=C^*=(-2,69947; -0,00009; -0,00152; -0,01805; -0,18438; -0,09796; 1; 0,17751; -1; 0,000007)$ . При найденном  $C^*$   $\Phi(\xi, C^*)$  положительна при  $0 < \xi < 2,8$ , и уравнение  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  определяет при  $0 < \xi < 2,8$  два вложенных друг в друга овала. На основании теоремы 1 заключаем, что система (11) в области  $0 < \xi < 2,8$ , а система 5 в области  $x > 0,36$  имеют не более двух предельных циклов. Численный анализ показывает, что предельные циклы системы 5 локализованы в полосе  $0,4 < x < 3,2$ , а, значит, их число равно двум. Расположение овалов кривой  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  и предельных циклов показано на рис. 2.

**Система 6.** Система имеет три седла  $B(x_i, -1/x_i), x_1 = -0,799841; x_2 = 0,175133; x_3 = 1,78471$ , и фокус  $A(1, -1)$ , поэтому для изучения ее предельных циклов достаточно рассмотреть полосу  $x_2 \leq x \leq x_3$  фазовой плоскости  $xOy$ . Если преобразовать ее в систему (10), то получим в ней отрицательные степени переменной  $\xi$ . Чтобы этого избежать, сделаем в соответствующей системе (10) замену  $\xi = 1/x$ . После растяжения шкалы времени получим систему

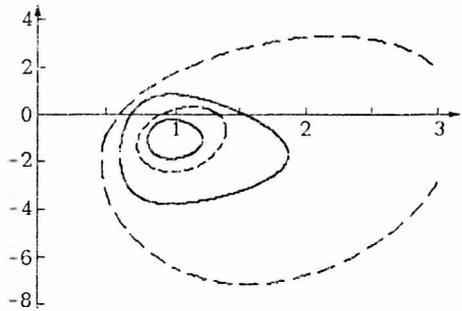


Рис. 2. Овалы, определенные кривой  $\Psi(\xi, y, C^*)=0$  (сплошные), и предельные циклы (штриховые) для системы 5

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{y}, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{P}_4(x)x^{-2a-3} - \tilde{P}_2(x)x^{-a-2}\tilde{y}, \quad (14)$$

где  $\tilde{P}_2(x) = P_2(x)x^2, \tilde{P}_4(x) = P_4(x)x^4$ .

Система (14) после замены  $\tilde{y} = y - F(x)$  превращается в систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (15)$$

$$F(x) = -\int_1^x \bar{P}_2(t)t^{-a-2} dt, \quad g(x) = -\bar{P}_4(x)x^{-2a-3}.$$

Далее сделаем для системы (15) замену  $x = \bar{x} + 1$ . Ищем функцию  $\Psi$  в виде (4), (4') при  $N=9, k=-9/10$  и берем  $\Phi^*(\bar{x}, C) = \Phi(\bar{x}, C)/100\bar{x}^2$ . Ищем максимум  $\Phi^*(\bar{x}, C)$  на отрезке  $[-0,5; 0,3]$ . Для этого решаем сеточную задачу

$$\Phi^*(\bar{x}_i, C) \geq L, \quad L \rightarrow \max, \quad |C_j| \leq 1 \quad (16)$$

на сетке  $\bar{x}_i = \alpha + (i-1)(\beta - \alpha)/M, i=1, \dots, M+1; j=1, \dots, N+2; M=230$ . Задача (16) имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=1,785 \cdot 10^{-6}; C=C^*=(0,00229; 0,01142; -0,03721; -0,31501; -1; -0,14664; 0,999996; 0,05069; 0,999996; -0,000002; 0,9999998)$ . Функция  $\Phi(\bar{x}, C^*)$  положительна на интервале  $(-0,6; 0,6)$ , который содержит отрезок  $[x_2; x_3]$ . Учитывая, что кривая  $\Psi(\bar{x}, y, C^*)=0$  в полосе  $x_2 \leq x \leq x_3$  имеет два вложенных друг в друга овала, по теореме 1 получаем для системы (15), а также для системы 6 ровно два предельных цикла.

**Система 7.** Система имеет фокус  $A(1, -1)$  и седло  $B(x_0, -1/x_0), x_0=0,215912$ . Приводим ее к системе (15) и делаем замену  $x = \bar{x} + 1$ . При  $N=9, k=-1$  рассматриваем функцию  $\Phi^*(\bar{x}, C) = \Phi(\bar{x}, C)/100\bar{x}^2$ .

Решение задачи (16) на сетке  $\bar{x}_i = \alpha + (i-1)(\beta - \alpha)/M, i=1, \dots, M+1; i=1, \dots, N+2; \alpha=-0,6; \beta=1; M=440$  есть  $L=L_{\max}=4,91721 \cdot 10^{-6}; C=C^*=(0,00229; 0,01142; -0,03721; -0,31501; -1; -0,14664; 0,999996; 0,05069; 0,999996; -0,000002; 0,9999998)$ . Функция  $\Phi(\bar{x}, C^*)$  положительна на интервале  $(-1, 1; +\infty)$ , который содержит отрезок  $(-1+x_0; +\infty)$ . Кривая  $\Psi(\bar{x}, y, C^*)=0$  в полуплоскости  $\bar{x} > -1, 1$  имеет два вложенных друг в друга овала, по теореме 1 получаем для системы (15), а также для системы 7 не более двух предельных циклов. Существование первого предельного цикла вытекает из теоремы 1, а существование второго доказывается по принципу кольца Бендиксона.

**Система 8.** Система имеет фокус  $A(1, -1)$ , два седла  $B(x_i, -1/x_i), x_1=0,259374; x_2=1,64185$ , и узел  $B(x_3, -1/x_3), x_3=28,1788$ . Для изучения ее предельных циклов достаточно исследовать полосу  $x_1 \leq x \leq x_2$  фазовой плоскости  $xOy$ . Приводим систему к виду (15) при  $x = \bar{x} + 1$ . Для системы (15) ищем функцию  $\Psi$  в виде (4), (4') при  $N=9, k=-1$ . Функцию  $\Phi(\bar{x}, C)$  берем в виде (7'), т. е. рассмотрим функцию  $\Phi^*(\bar{x}, C) = 1000\Phi(\bar{x}, C)/\bar{x}^2$ . Ищем максимум  $\Phi^*(\bar{x}, C)$  с помощью редукции к задаче (16) с сеткой  $\bar{x}_i = \alpha + (i-1)(\beta - \alpha)/M, i=1, \dots, M+1; j=1, \dots, T+1; \alpha = -0,6; \beta=0,4; M=391$ . Задача (16) имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=3,23485 \cdot 10^{-2}; C=C^*=(-0,13477; -0,339862; -0,63309; -0,83381; -1; -0,13758; 0,21084; 0,01133; -1; 0,03287)$ . Функция  $\Phi(\bar{x}, C^*)$  положительна на отрезке  $[-0,9; 0,65]$ , который содержит интервал  $(-0,6; 0,4)$ , где локализованы предельные циклы. Уравнение  $\Psi(\bar{x}, y, C^*)=0$  в интервале  $(-0,6; 0,4)$  имеет два вложенных друг в друга овала. По теореме 1 получаем ровно два предельных цикла.

**Система 9.** Для оценки числа предельных циклов вокруг фокуса  $A(1, -1)$  преобразуем систему 9 к системе Лъенара (11)

$$F(\xi) = -7/60 - 5\xi^4/4 + 16\xi^5/5 - 11\xi^6/6, \quad (17)$$

$$g(\xi) = \xi^7 \left( -30 + 4447\xi/100 - 347\xi^2/100 - 16\xi^3 + 5\xi^4 \right).$$

Тогда для системы (11), (17) ищем функцию  $\Psi$  в виде (4), (4')  $N=9$ ,  $k=-1$ . Берем функцию  $\Phi^*(\xi, C)=\Phi(\xi, C)/\xi^2$ . Для нахождения максимума функции  $\Phi^*(\xi, C)$  рассмотрим сеточную задачу (13) на сетке  $\bar{x}_i=\alpha+(i-1)\times(\beta-\alpha)/M$ ,  $i=1, \dots, M+1$ ,  $j=1, \dots, N+1$ ;  $\alpha=0,4$ ;  $\beta=1,17$ ;  $M=151$ . Сеточная задача имеет решение, найденное численно,  $L=L_{\max}=4,87603 \cdot 10^{-5}$ ;  $C=C^*=(-0,14764; -0,6406; -1; 0,062; 0,304604; -0,00268; 0,014501; 0,00154; -1; 0,000058)$ . Функция  $\Phi(\bar{x}, C^*)$  положительна на отрезке  $[0,1; 1,17]$ , который содержит интервал  $(0,65; 1,15)$ , где локализованы предельные циклы. Уравнение  $\Psi(\bar{x}, y, C^*)=0$  в интервале  $(0,65; 1,15)$  имеет два вложенных друг в друга овала. Далее, как и выше, применяем теорему 1.

Таким образом, теорема 2 доказана.

1. Yanqian Ye. Theory of Limit Cycles. Providence. RhodeIsland. 1986. Vol. 66.

2. Гринь А. А., Черкас Л. А. // Тр. ИМ НАН Беларуси. Мн., 2000. Т. 4. С. 29.

3. Шевцов И. Л. // Третьи научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 80-летию со дня рождения Ю.С. Богданова: Тез. докл. Мн., 2001. С. 64.

Поступила в редакцию 29.06.2002.

*Игорь Леонидович Шевцов* – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Л.А. Черкас.

УДК 517.925

А.С. ЗЕНЧЕНКО

## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПЕРВОМУ УРАВНЕНИЮ ПЕНЛЕВЕ

The problem of studying the set of differential systems equivalent to the first Painleve equation is considered. Some conditions of existence of certain classes of equivalent systems with rational right-hand sides are given.

Эквивалентные уравнениям Пенлеве нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений играют особую роль в их теории. Эти системы дают простой метод построения преобразований Беклунда, которые являются одним из основных инструментов исследования различных свойств решений уравнений Пенлеве [1]. Эквивалентные системы для этих уравнений также представляют собой сцепленные уравнения Риккати, которые стандартным образом могут быть линеаризованы, т. е. в этом смысле они являются линеаризацией уравнений Пенлеве.

В настоящей работе мы изучаем множество нормальных систем

$$w' = f(z, w, u), \quad u' = g(z, w, u), \quad (1)$$

где  $f(z, w, u)$ ,  $g(z, w, u)$  – рациональные функции переменных  $w, u$  с аналитическими по  $z$  в некоторой области  $D \subset \mathbb{C}$  коэффициентами, эквивалентных первому уравнению Пенлеве

$$w'' = 6w^2 + z. \quad (P_1)$$

Пусть система (1) эквивалентна уравнению

$$w'' = R(w', w, z), \quad (2)$$

где  $R$  – рациональная функция переменных  $w', w$ , т. е. исключение  $u$  из (1) дает (2). При этом, очевидно, условием эквивалентности системы (1) уравнению (2) является условие