

но $\left[\sum_{i=1}^m (y_i - \lambda_i \cdot 1) e_i \right] = \sum_{i=1}^m [y_i - \lambda_i \cdot 1][e_i] = 0 \Rightarrow [x] = \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \right]$, где по построению

$\forall k \geq 1$: только одно значение $e_i^{(k)} = 1 \neq 0$, что равносильно утверждению теоремы. ►

Следствие. Для любого $\mathbf{K}$ все идемпотенты в $\mathbf{MK}(x_\infty)$ имеют вид $[e]$, где e – последовательность нулей и единиц.

◀ $e^2 = e \Leftrightarrow e(e-1) = 0$. Так как $\mathbf{K}$ – поле разложения полинома $x(x-1)$, имеющего в нем 2 корня $x=0$ и $x=1$, то, применяя теорему 3, получаем требуемое. ►

Выражаю благодарность профессору Я.В. Радыно за обсуждение результатов.

1. Рингель Д. Е. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1. С. 71.

2. Радыно Я. В., Рингель Д. Е. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 1. С. 44.

3. Рингель Д. Е. // Там же. № 2. С. 59.

Поступила в редакцию 28.06.2002.

Дмитрий Евгеньевич Рингель – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Я.В. Радыно.

УДК 517.925

А.В. ЧИЧУРИН

К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕЖДУ КЛАССАМИ УРАВНЕНИЙ ШАЗИ И УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Chazy nonlinear differential equation of the third order with coefficients depending on six parameters is considered. Coefficient conditions of the Chazy equation which has two-parametric family of solutions are obtained.

Исследуя уравнение

$$y''' = \sum_{k=1}^6 \frac{(y' - a'_k)(y'' - a''_k) + A_k(y' - a'_k)^3 + B_k(y' - a'_k)^2 + C_k(y' - a'_k)}{y - a_k} + Dy'' + \quad (1)$$

$$+ Ey' + \prod_{i=1}^6 (y - a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{y - a_k} \left(a_i \neq a_j (i, j = \overline{1,6}; i \neq j) \right).$$

Шази показал [1], что некоторые случаи вырождения уравнения (1) являются уравнениями Пенлеве, и, следовательно, уравнение (1) может быть рассмотрено как существенно новое [2]. В [3] приведена система $(S_1) - (S_6)$, состоящая из 32 уравнений и представляющая собой необходимые и достаточные условия принадлежности уравнения (1) к P -типу. Покажем, что при некоторых коэффициентных соотношениях данное уравнение имеет двухпараметрическое семейство решений, представляющее собой решение некоторого уравнения второго порядка, при этом полагаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют системе $(S_1) - (S_6)$.

Преобразуем уравнение (1)

$$\prod_{i=1}^6 (y - a_i) (y''' - Dy'' - Ey') = (y - a_2)(y - a_3) \cdot \dots \cdot (y - a_6) h_1 + \quad (2)$$

$$+ (y - a_1)(y - a_3) \cdot \dots \cdot (y - a_6) h_2 + \dots + (y - a_1)(y - a_2) \cdot \dots \cdot (y - a_5) h_6 +$$

$$+ ((y - a_2)(y - a_3) \cdot \dots \cdot (y - a_6) F_1 + (y - a_1)(y - a_3) \cdot \dots \cdot (y - a_6) F_2 + \dots +$$

$$+(y-a_1)(y-a_2)\dots(y-a_5)F_6) \prod_{i=1}^6 (y-a_i),$$

где

$$h_i \equiv y'y'' - a_i'y'' + A_i y'^3 + (B_i - 3a_i'A_i) y'^2 + l_i y' + m_i \quad (i = \overline{1,6}), \quad (3)$$

$$l_i \equiv -a_i'' + 3A_i a_i'^2 - 2B_i a_i' + C_i \quad (i = \overline{1,6}). \quad (4)$$

$$m_i \equiv a_i' a_i'' - A_i a_i'^3 + B_i a_i'^2 - C_i a_i' \quad (i = \overline{1,6}). \quad (5)$$

Преобразуем теперь выражение $(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5)(y-a_6)$. Имеем

$$(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5)(y-a_6) = y^5 + a_1 y^4 + (\sigma_2 + a_1^2) y^3 + (\sigma_3 - a_1 \sigma_2 - a_1^3) y^2 + (\sigma_4 - a_1 \sigma_3 + a_1^2 \sigma_2 + a_1^4) y + a_1 \sigma_4 - a_1^2 \sigma_3 + a_1^3 \sigma_2 + a_1^5, \quad (6)$$

где σ_i ($i = \overline{1,6}$) – элементарные симметрические многочлены, составленные из элементов a_k ($k = \overline{1,6}$). При этом мы воспользовались результатами работы [3] $A_k = -1/a_k$ ($k = \overline{1,6}$). Из последних равенств и равенств (S_1) следует [3, 4], что

$$\sigma_1 = \sigma_5 = 0. \quad (7)$$

Учитывая соотношения (3)–(7), перепишем уравнение (2) в виде

$$p(y''' - Dy'' - Ey') = \sum_{i=1}^6 [y^5 + a_i y^4 + (\sigma_2 + a_i^2) y^3 - (\sigma_3 - a_i \sigma_2 - a_i^3) y^2 + (\sigma_4 - a_i \sigma_3 + a_i^2 \sigma_2 + a_i^4)(y - a_i)] \times [h_i + pF_i]. \quad (8)$$

Покажем, что при некоторых коэффициентных соотношениях уравнение (8) имеет двухпараметрическое семейство решений, представляющее собой, например, общее решение уравнения вида

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{y-1} + \frac{1}{y+1} \right) y'^2 + \varphi_1(x, y) y' + \varphi_0(x, y), \quad (9)$$

где функции $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$ подлежат определению.

Продифференцировав (9), найдем y''' , подставим y''' и y'' в (8). Полученное после преобразований уравнение рассмотрим как кубическое относительно y' . Приравняем к нулю коэффициенты этого уравнения. В результате получим четыре системы уравнений (обозначим их $(A)_1$ – $(A)_4$), которые требуется решить и которые из-за громоздкости мы не приводим. Для более компактного представления разделим все уравнения четырех полученных систем на $\prod_{i=1}^6 a_i$. Упростим получающиеся уравнения, используя (7) и следующие соотношения [1]:

$$2D + \sum_{k=1}^6 (B_k - 3a_k' A_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^6 F_k = \sum_{k=1}^6 a_k F_k = \sum_{k=1}^6 a_k^2 F_k = 0, \quad (S_3)$$

а также учитывая соотношения между элементарными симметрическими многочленами $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_6$ и суммами $s_i = \sum_{k=1}^6 a_k^i$ ($i = \overline{1,5}$), которые в нашем случае имеют вид

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -2\sigma_2, \quad s_3 = 3\sigma_3, \quad s_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4, \quad s_5 = 5\sigma_5 - 5\sigma_2\sigma_3. \quad (10)$$

Перейдем к исследованию системы $(A)_1$. Коэффициент при y'^3 представляет собой многочлен восьмой степени относительно y . Коэффициенты при

y^8, y^7 и y^6 равны соответственно $\sum_{i=1}^6 \frac{1}{a_i}$, $-\sum_{i=1}^6 \frac{1}{a_i}$ и $-\sigma_1 - \sum_{i=1}^6 \frac{1}{a_i}$, которые в силу (7) тождественно равны нулю. Оставшиеся уравнения системы, полученные из коэффициентов при $y^6 - y^0$, дают решение

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2, \quad \sigma_4 = 0, \quad \sigma_6 = 1. \quad (11)$$

Перейдем к решению системы $(A)_2$, образующейся после приравнивания к нулю коэффициента при y^2 . Этот коэффициент представляет собой многочлен девятой степени относительно y . Приравняв к нулю коэффициент при y^9 , получим $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$, или $\varphi_1 = \varphi_1(x)$. С учетом последнего равенства коэффициент при y^8 обращается в нуль, а из коэффициента при y^7 с учетом первого из соотношений $(S)_3$ находим

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^6 a_i B_i + D \right). \quad (12)$$

Из коэффициента при y^6 получаем условие

$$\sum_{i=1}^6 a_i^2 B_i = 2 \sum_{i=1}^6 a_i B_i + 5 \sum_{i=1}^6 a_i a'_i. \quad (13)$$

С учетом (7), (10), (11) получим следующие соотношения:

$$\sigma'_i = 0 \quad (i = \overline{1,6}), \quad \sum_{i=1}^6 a'_i = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i a'_i = \frac{1}{2} s'_2 = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^2 a'_i = \frac{1}{3} s'_3 = 0, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^6 a_i^3 a'_i = \frac{1}{4} s'_4 = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^4 a'_i = \frac{1}{5} s'_5 = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^5 a'_i = \frac{1}{6} s'_6 = 0.$$

Тогда оставшиеся шесть уравнений, полученные из коэффициентов при $y^5 - y^0$ степенях, после преобразований составят систему

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 a_i^2 B_i &= \sum_{i=1}^6 a_i^3 B_i + 3 \sum_{i=1}^6 a_i B_i + 2D, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^4 B_i = \sum_{i=1}^6 a_i B_i + \sum_{i=1}^6 a_i^2 B_i + \sum_{i=1}^6 a_i^3 B_i + 2D, \\ 2 \sum_{i=1}^6 a_i B_i + 3 \sum_{i=1}^6 a_i^2 B_i &= \sum_{i=1}^6 a_i^3 B_i + \sum_{i=1}^6 a_i^4 B_i + \sum_{i=1}^6 a_i^5 B_i + 2D, \\ 2 \sum_{i=1}^6 a_i B_i + 2 \sum_{i=1}^6 a_i^2 B_i + \sum_{i=1}^6 a_i^4 B_i &= \sum_{i=1}^6 a_i^3 B_i + \sum_{i=1}^6 a_i^5 B_i + 2D, \\ \sum_{i=1}^6 a_i B_i + 2 \sum_{i=1}^6 a_i^2 B_i &= \sum_{i=1}^6 a_i^4 B_i + \sum_{i=1}^6 a_i^5 B_i, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^5 B_i = \sum_{i=1}^6 a_i B_i + 2 \sum_{i=1}^6 a_i^2 B_i + 2D. \end{aligned} \quad (15)$$

Система $\sum_{i=1}^6 B_i = -2D$ – (13)–(15) является линейной с неизвестными B_i

$(i = \overline{1,6})$. Определитель этой системы есть определитель Вандермонда $\prod_{i < j} (a_i - a_j)$ $(i = \overline{1,5}; j = \overline{2,6})$. Поскольку уравнение (2)–(5) включает в себя

функции a_k $(k = \overline{1,6})$, которые не равны нулю и среди которых нет двух равных, то заключаем, что значение рассматриваемого определителя не обра-

щается в нуль. Решение системы $\sum_{i=1}^6 B_i = -2D$ – (13)–(14) есть

$$B_i = 0 \quad (i = \overline{1,6}), \quad D = 0. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (12), получим $\varphi_1(x) = 0$.

Перейдем к решению системы $(A)_3$. Коэффициент при y' представляет собой многочлен девятой степени по y . Рассмотрим коэффициент при y^9 . Из соответствующего уравнения получим условие на функцию φ_0

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = E. \quad (17)$$

Из коэффициента при y^8 получим

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 l_i, \quad (18)$$

где l_i ($i=\overline{1,6}$) определяются соотношениями (4). Система уравнений, полученная из коэффициентов при $y^7 - y^0$, после преобразований с учетом соотношений (11), (16), (18), $\varphi_1=0$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^6 l_i = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^m l_i = 0 \quad (m=\overline{1,5}), \quad (19)$$

где l_i ($i=\overline{1,6}$) определяются согласно (4). Система (19) есть линейная однородная система с неизвестными l_i ($i=\overline{1,6}$), главный определитель которой является определителем Вандермонда. Ее решение имеет вид

$$C_i = a_i'' + 3 \frac{a_i'^2}{a_i} \quad (i=\overline{1,6}). \quad (20)$$

С учетом (20) из соотношений (17), (18) находим

$$\varphi_0(x) = 0, \quad E = 0. \quad (21)$$

Перейдем к решению системы $(A)_4$, образующейся при рассмотрении свободного члена, который представляет собой многочлен четырнадцатой степени по y . Коэффициенты этого многочлена при $y^{14} - y^{12}$ обращаются в тождественные нули, поскольку имеют место последние три соотношения системы (S_3)

$$\sum_{k=1}^6 F_k = \sum_{k=1}^6 a_k F_k = \sum_{k=1}^6 a_k^2 F_k = 0. \quad (22)$$

Рассмотрим коэффициенты при $y^{11} - y^9$. С учетом равенств (22) из вида этих коэффициентов вытекают соотношения

$$\sum_{k=1}^6 a_k^3 F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^6 a_k^4 F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^6 a_k^5 F_k = 0. \quad (23)$$

Приравняем к нулю коэффициенты при $y^8 - y^3$. Соответствующие уравнения после преобразований примут вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 m_i = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i m_i = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^2 m_i = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^3 m_i = 0, \\ \sum_{i=1}^6 a_i^4 m_i = 0, \quad \sum_{i=1}^6 a_i^5 m_i = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где m_i ($i=\overline{1,6}$) определяются согласно (5). Система (24) является линейной однородной относительно неизвестных m_i ($i=\overline{1,6}$). Главный ее определитель также является определителем Вандермонда. Поэтому решение системы (24) сводится к следующим равенствам:

$$a_i' a_i'' + \frac{1}{a_i} a_i'^3 - C_i a_i = 0 \quad (i=\overline{1,6}). \quad (25)$$

Применим подобные рассуждения к однородной линейной системе (22), (23), содержащей в качестве неизвестных функции F_i ($i=\overline{1,6}$). В результате получаем равенства

$$F_i=0 \quad (i=\overline{1,6}). \quad (26)$$

Коэффициенты при y^2-y^0 обращаются в нуль, если выполняются равенства (25), (26). Из соотношений (20), (25) следует, что a_i ($i=\overline{1,6}$) – постоянные, и, следовательно, $C_i=0$ ($i=\overline{1,6}$).

Учитывая, что $\varphi_1=\varphi_2=0$, перепишем уравнение (9) в виде

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{y-1} + \frac{1}{y+1} \right) y'^2.$$

Последнее уравнение автономно и легко интегрируется. Его общее решение есть дробно-рациональная функция вида

$$y = 1 + \frac{1}{C_1(x-C_2)-1} + \frac{1}{C_1(C_2-x)-1}, \quad (27)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Сформулируем приведенные рассуждения в виде следующей теоремы.

Теорема. Уравнение Шази $y'' = \sum_{k=1}^n \frac{y'y'' - y'^3/a_k}{y - a_k}$ имеет двухпараметрическое семейство решений вида (27), если a_k ($k=\overline{1,6}$) удовлетворяют условиям $\sigma_2=0, \sigma_3=2, \sigma_4=0, \sigma_6=1$.

1. Chazy J. // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 317.
2. Добровольский В.А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Киев, 1974.
3. Лукашевич Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 353.
4. Чичурин А.В. // Весн. Брэсц. ун-та. 2001. № 2. С. 55.

Поступила в редакцию 25.09.2002.

Александр Вячеславович Чичурин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина.

УДК 517.925.42

И.Л. ШЕВЦОВ

КВАДРАТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ С РАЗЛИЧНЫМИ КОНФИГУРАЦИЯМИ ОСОБЫХ ТОЧЕК И МАКСИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ВОКРУГ НЕГРУБОГО ФОКУСА

A series of parametric sets of quadratic systems with different configurations of singular points and with maximum numbers of limit cycles around of weak focus is constructed.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

где $P(x, y), Q(x, y)$ – полиномы относительно x, y степени не выше m , причем один из них имеет степень m . Как известно [1], квадратичная система ($m=2$) может иметь предельные циклы, окружающие лишь одну особую точку, которая является фокусом. Так как квадратичная система может иметь не более двух фокусов [1], то у системы (1) будет распределение $m, m \in N_0$, если