Замечание. Если $\delta=(2\eta-1)/4$, $\alpha=1/2$, $\mu=2$, то теоремы 1–3 приводят к соответствующим результатам для классического преобразования Ханкеля $\mathbf{H}_\eta$.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974. С. 12.
2. Sneddon I.N. Fractional Integrals and Derivatives and Dual Integral Equations. Raleigh, 1962.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
4. Glaeske H.-J., Kilbas A.A., Saigo M., Shlapakov S.A. // Appl. Anal. 2001. Vol. 79. P. 443.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 2 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция Гаусса. Функции Лежандра. М., 1966. С. 64.
6. Килбас А.А., Сайго М., Боровко А.Н. // Докл. АН (Россия). 2000. Т. 372. № 4. С. 451.

Поступила в редакцию 09.09.2002.

Елена Казимировна Щетникович – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.А. Килбас.

УДК 517.9

Д.Е. РИНГЕЛЬ

МНЕМОЧИСЛА И МНЕМОВЕКТОРЫ. II

We have established some algebraical properties of mnemonumbers, such as absense of nilpotent and generalized nilpotent elements, the description of mnemonumeric roots of polynomial with coefficient in the basic field and the fact, that mnemonumbers are classical quotient ring.

Данная статья является непосредственным продолжением статьи [1]. В ней рассматриваются алгебраические свойства пространства мнемочисел. Определение и основные свойства мнемочисел можно найти в работах [1–3].

Напомним, что идемпотентом в кольце X называется элемент $e\in X$ такой, что $e^2=e$.

Теорема 1 (критерий обратимости). *Элемент* $[a]\in \mathbf{MK}(x_\infty)$ *необратим в* $\mathbf{MK}(x_\infty)\Leftrightarrow\exists$ *ненулевой идемпотент* $[e]\in\mathbf{MK}(x_\infty)$ *такой, что* $[a][e]=0$, *в частности, элемент* $[a]$ *является делителем нуля. Таким образом,* $\mathbf{MK}(x_\infty)$ *является классическим кольцом частных.*

◄ Достаточность очевидна, так как если $\exists[a]^{-1}$, то из $[a][e]=0$ следует $[e]=[a]^{-1}[a][e]=[a]^{-1}0=0$.

Необходимость. Пусть $[a]=[(a(k))_{k\geq 1}]$.

1) Если последовательность a имеет бесконечную подпоследовательность нулей, то утверждение очевидно, так как $\exists$ нефинитная последовательность нулей и единиц $e=e^2$, для которой $ae=0$, поэтому $[a][e]=0$.

2) Если бесконечной подпоследовательности нулей в a не существует, то, поскольку финитные последовательности лежат в $X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$, без ограничения общности считаем $a(k)\neq 0$, $\forall k\geq 1$. Поэтому $\exists b=(b(k))=(a(k)^{-1})_{k\geq 1}\in s(\mathbf{K})|ab=1$.

Но так как по предположению $[a]$ необратим в $\mathbf{MK}(x_\infty)$, то $b\notin X_{+\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$, т. е. $\mathrm{ord}(b)=+\infty$.

Иначе говоря, $\forall N\in\mathbf{Z}$: $b\notin x_\infty{}^N l_\infty(\mathbf{K})$, что равносильно $\forall N\in\mathbf{Z}$ $\forall C>0$ $\exists k=k(N, C) \mid |b(k)|>C|x_\infty(k)|^N$ (здесь мы для удобства записи пишем $x_\infty(k)$ вместо обычного $x_\infty{}^{(k)}$). Поэтому $\forall N$ $\exists$ строго возрастающая последовательность индексов $(k_N(j))_{j\geq 1} \mid |b(k_N(j)||x_\infty(k_N(j))|^{-N} \to +\infty$, $j\to\infty$, что равносильно $|a(k_N(j))||x_\infty(k_N(j))|^N \to 0, j\to\infty$, $\forall N\in \mathbf{Z}$, в частности $|a(k_N(j))|\leq|x_\infty(k_N(j))|^{-N}$, $j\geq m_N$.

Таким образом, для любого фиксированного $N\in\mathbf{Z}$ в последовательности a найдется подпоследовательность, убывающая быстрее соответствующей подпоследовательности в $x_\infty{}^N$. Диагональным процессом построим подпоследовательность в a, убывающую быстрее всех соответствующих подпоследовательностей в $x_\infty{}^N$, $\forall N\in\mathbf{Z}$. Построим последовательность $k_\infty(n)$: выберем $k_\infty(1)$ из числа $k_1(j)$, т. е. $k_\infty(1)=k_1(j_1)$, причем $j_1\geq m_1$, затем $k_\infty(2)>k_\infty(1)$ из числа $k_2(j)$, т. е. $k_\infty(2)=k_2(j_2)$, причем $j_2\geq m_2$ и т. д. Последовательности $k_N(j)\to\infty$ при $j\to\infty$ для всех N, поэтому такой выбор возможен. При этом $\forall n\geq 1$: $|a(k_\infty(n))|=|a(k_n(j_n))|\leq|x_\infty(k_n(j_n))|^{-n}=|x_\infty(k_\infty(n))|^{-n}$ и последовательность $k_\infty(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, ибо $k_\infty(n+1)\geq k_\infty(n)+1$.

Обозначим $\nu(k)=\max\{n|k_\infty(n)\leq k\}$. Этот max существует, так как $k_\infty(n)\to+\infty$ при $n\to\infty$. Утверждается, что $\nu(k)\to+\infty$, $k\to\infty$. Очевидно, последовательность $\nu(k)$ монотонно возрастает, поэтому достаточно доказать ее неограниченность. Действительно, в противном случае $\exists M \mid \forall k$: $\max\{n \mid k_\infty(n)\leq k\}\leq M$, т. е. $\forall k\ \forall n$ имеем: если $k_\infty(n)\leq k$, то $n\leq M$, но мы можем взять $n'=M+1$ и $k'=k_\infty(n')$ – противоречие. Кроме того, отображение $\nu(k)$:$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ обратно слева к отображению $k_\infty(n)$:$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, т. е. $\forall n\in\mathbf{N}$: если $k=k_\infty(n)$, то $\nu(k)=\nu(k_\infty(n))=\max\{m \mid k_\infty(m)\leq k_\infty(n)\}=n$, так как последовательность $k_\infty(n)$ строго возрастающая.

Поэтому, выбрав $e(k)=1$, если $k=k_\infty(n)$ при некотором n, и $e(k)=0$ в противном случае, имеем: e и $[e]$ – идемпотенты, последовательность e – ограничена, поэтому $\mathrm{ord}(e)\leq 0$, следовательно, $e\in X_{+\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$. Кроме того, $[e]\neq 0$, так как $k_\infty(n)\to+\infty$ при $n\to\infty$, следовательно, $e=(e(k))_{k\geq 1}$ содержит бесконечное число единиц и не стремится к нулю при $k\to\infty$, поэтому $\mathrm{ord}(e)\geq 0$. При этом $\forall k\geq 1$: $|a(k)e(k)|=|a(k)|e(k)\leq h(k)$, где $h(k)=0$, $k\neq k_\infty(n)$ и $h(k)=|x_\infty(k)|^{-n}=$ $=|x_\infty(k)|^{-\nu(k)}$, $k=k_\infty(n)$.

Таким образом, $|a(k)e(k)|\leq|x_\infty(k)|^{-\nu(k)}$, где $\nu(k)\to\infty$, $k\to\infty$. Докажем, что из этого следует $ae\in X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$. Действительно, $|x_\infty(k)|^{-1}\to 0$ при $k\to\infty$, поэтому $|x_\infty(k)|^{-1}\leq 1$, $k\geq K$, а так как $\nu(k)\to+\infty$, то $\forall N\in\mathbf{Z}$: $\exists K_{0N}\geq K$ такое, что $\nu(k)+N\geq 1$ при $k\geq K_{0N}$, поэтому для таких k имеем: $|a(k)e(k)|\leq|x_\infty(k)|^{-\nu(k)}=$ $=|x_\infty(k)|^{(-1)(\nu(k)+N)}|x_\infty(k)|^N\leq|x_\infty(k)|^N$, поэтому $\exists C_N>0$ такая, что $|a(k)e(k)|\leq C_N|x_\infty(k)|^N$, следовательно, $ae\in X_N(x_\infty, \mathbf{K})$, $\forall N\exists\mathbf{Z}$, тогда $ae\in X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$ и $[a][e]=0$. Что и требовалось доказать.▶

Теорема 2. *В* $\mathbf{MK}(x_\infty)$ *нет ненулевых нильпотентных элементов (т. е. таких, что* $a\neq 0$*, но* $a^n=0$ *при некотором* n*) и даже обобщенных нильпотентных элементов (т. е. таких, что* $a\neq 0$*, но* $\|a^n\|^{1/n}\to 0$ *при* $n\to\infty$*).*

◀ Доказательство этих фактов основывается на неравенстве: $\mathrm{ord}(a^n)\geq n\times$ $\times(\mathrm{ord}(a)-1)$. Достаточно доказать неравенство для $a\in s(\mathbf{K})$, откуда оно сразу следует для $\mathbf{MK}(x_\infty)$.

Сначала заметим, что из $b\notin l_\infty(\mathbf{K})$ следует $b^n\notin l_\infty(\mathbf{K})$, так как $b\notin l_\infty(\mathbf{K})$ означает, что b имеет подпоследовательность, стремящуюся по норме к ∞; n-я степень этой подпоследовательности – подпоследовательность b^n, тоже стремящаяся по норме к ∞.

Пусть $\mathrm{ord}(a)>j$. Это значит, что $a\notin x_\infty{}^j l_\infty(\mathbf{K})$, что равносильно $a\,x_\infty{}^{-j}\notin l_\infty(\mathbf{K})$, следовательно, по доказанному $a^n x_\infty{}^{-jn}\notin l_\infty(\mathbf{K})\Leftrightarrow a^n\notin x_\infty{}^{jn}l_\infty(\mathbf{K})=X_{nj}(x_\infty, \mathbf{K})$, т. е. $\mathrm{ord}(a^n)>nj$.

Если $\operatorname{ord}(a)$ конечен, то полагаем $j=\operatorname{ord}(a)-1$ и получаем требуемое. Если $\operatorname{ord}(a)=-\infty$, то утверждение тривиально, наконец, если $\operatorname{ord}(a)=+\infty$, то $\forall j\in\mathbf{Z}$ имеем: $j<\operatorname{ord}(a)$, следовательно, $\operatorname{ord}(a^n)>nj\to+\infty$, $j\to\infty$, поэтому $\operatorname{ord}(a^n)=+\infty$. Что и требовалось доказать.►

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{K}$ *– полное (например, локально-компактное) нетривиально нормированное поле,* $f\in\mathbf{K}[x]$, *т. е.* $f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_0$, $\alpha_i\in\mathbf{K}$, $\alpha_n\neq0$ *– полином над* $\mathbf{K}$. *Пусть* f *не имеет нулей в поле* $\mathbf{K}$. *Тогда* $\inf\limits_{x\in K}|f(x)|>0$.

◄ В случае локально-компактного поля доказательство достаточно очевидно, так как если f=const утверждение тривиально, иначе $|f(x)|\geq|\alpha_n||x|^n-(|\alpha_{n-1}||x|^{n-1}+\ldots+|\alpha_0|)\sim|\alpha_n||x|^n\to+\infty$ при $|x|\to+\infty$, а на любом конечном шаре непрерывная функция $|f(x)|$ имеет минимум в силу компактности этого шара.

Общий случай: $\mathbf{K}$ – полно. В алгебраической теории чисел известна следующая теорема о продолжении нормы: пусть поле $\mathbf{K}$ полно относительно нормирования $|\cdot|$ и пусть $\mathbf{F}\supset\mathbf{K}$ – расширение поля $\mathbf{K}$ конечной степени $[\mathbf{F}:\mathbf{K}]=\dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F}=<+\infty$, тогда существует единственное продолжение нормирования $|\cdot|$ на поле $\mathbf{F}$, т. е. такая норма $\|\cdot\|$на $\mathbf{F}$, что $\|\alpha\|=|\alpha|$, $\forall\alpha\in\mathbf{K}$.

Применим эту теорему следующим образом: пусть $\mathbf{F}$ – поле разложения полинома f. При этом степень $[\mathbf{F}:\mathbf{K}]=\dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F}$ очевидно конечна, так как $\mathbf{F}$ получается из $\mathbf{K}$ присоединением конечного числа элементов, алгебраических над $\mathbf{K}$. Продолжим норму $|\cdot|$ на $\mathbf{F}$. В нормированном поле $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$ имеем: $f(x)=\Pi(x-\beta_j)$, где все $\beta_j\in\mathbf{F}\backslash\mathbf{K}$, $1\leq j\leq n\Rightarrow\|f(x)\|=\Pi\|x-\beta_j\|\Rightarrow\inf\limits_{x\in K}|f(x)|=\inf\limits_{x\in K}\|f(x)\|=$ $=\inf\limits_{x\in K}\Pi\|x-\beta_j\|\geq\Pi(\inf\limits_{x\in K}\|x-\beta_j\|)$. Но так как $\mathbf{K}$ полно, то замкнуто в $\mathbf{F}$, что означает $\forall y\in\mathbf{F}\backslash\mathbf{K}$: $\inf\limits_{x\in K}\|x-y\|>0$. Таким образом, $\inf\limits_{x\in K}|f(x)|\geq\Pi(\inf\limits_{x\in K}\|x-\beta_j\|)>0$. Что и требовалось доказать.►

Лемма 2. *Пусть* X *– коммутативное кольцо с единицей и пусть* $f\in X[x]$, *т. е.* $f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_0$, $\alpha_i\in X$. *Тогда* $\forall x\in X$, $\forall$ *идемпотента* $e\in X$ *имеем:* $f(ex)=f(0)(1-e)+f(x)e$.

◄ Действительно, $f(ex)=\alpha_n(ex)^n+\alpha_{n-1}(ex)^{n-1}+\ldots+\alpha_0\cdot1=\alpha_n x^n e^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}e^{n-1}+$ $\ldots+\alpha_0(e+(1-e))=\alpha_n x^n e+\alpha_{n-1}x^{n-1}e+\ldots+\alpha_0 e+\alpha_0(1-e)=(\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_0)e+\alpha_0\times$ $\times(1-e)=f(x)e+\alpha_0(1-e)$. А так как $f(0)=\alpha_0$, то $\alpha_0(1-e)=f(0)(1-e)$, откуда получаем требуемое.►

Теорема 3 (о мнемочисленных корнях числового полинома). *Пусть* $f\in\mathbf{K}[x]$ *– полином над* $\mathbf{K}$, *а поле* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет одному из следующих условий:* 1) $\mathbf{K}$ *– полно;* 2) $\mathbf{K}$ *– поле разложения для* f *(например, алгебраически замкнуто).*

Тогда любой мнемочисленный корень полинома f *является классом последовательности, состоящей из корней* f *в* $\mathbf{K}$. *Если же полином* f *не имеет корней в* $\mathbf{K}$, *то он не имеет корней и в* $\mathbf{MK}(x_\infty)$.

◄ Класс любой последовательности, состоящей из корней f в $\mathbf{K}$, очевидно, является мнемочисленным корнем полинома f.

Поэтому достаточно доказать, что $\forall x=(x_k)_{k\geq0}\in X_{+\infty}(x_\infty,\mathbf{K})\,|\,f([x])=0$, найдется последовательность a, состоящая из корней λ_1, …, λ_m полинома $f\neq0$ такая, что $[x]=[a]\Leftrightarrow[x-a]=0$. Если корней в $\mathbf{K}$ нет, то мы сразу приходим к противоречию и получаем отсутствие корней в $\mathbf{MK}(x_\infty)$. Докажем сначала, что

$$\forall\varepsilon>0\exists N=N(\varepsilon)\,|\,\forall k\geq N\colon\exists j \text{ такое, что } |x^{(k)}-\lambda_j|<\varepsilon. \quad (1)$$

В частности, при $\varepsilon\le\varepsilon_0$ такое $j=j(k)$, где $k\ge N(\varepsilon)$ определяется однозначно, ибо ε-окрестности точек λ_i не пересекаются, и $j(k)$, если определено, не зависит от выбора достаточно малого ε. В отсутствии корней f в $\mathbf{K}$ условие (1) выполняться не может, а потому, как мы докажем, последовательность x такая, что $f([x])=0$, не существует.

Предположим противное, т. е. $\exists\varepsilon'>0$ и бесконечная подпоследовательность $(x^{(k(r))})_{r\ge1}$ такая, что $\forall r\ge1$, $\forall j$: $|x^{(k(r))}-\lambda_j|\ge\varepsilon'$. Тогда используем разложение $f(z)=\Pi(z-\lambda_j)^{\nu(j)}f_0(z)$, где $\nu(j)$ – кратность корня ν_j, f_0 – полином, не имеющий корней в $\mathbf{K}$. Если у полинома f нет корней в $\mathbf{K}$, то $f=f_0$. Если же $\mathbf{K}$ – поле разложения для f, то $f_0=\text{const}$.

Если $\mathbf{K}$ – поле разложения для f, то по построению, а если $\mathbf{K}$ – полно, то согласно лемме 1: $|f_0(x^{(k(r))})|\ge\inf\limits_{z\in K}|f_0(z)|=C>0$. Поэтому $|f(x^{(k(r))})|=\Pi|x^{(k(r))}-\lambda_j|^{\nu(j)}|f_0(x^{(k(r))})|\ge C\varepsilon'^{\mu}$, где $\mu=\nu_1+\ldots+\nu_m$ (если $f=f_0$, то $\mu=0$), т. е. $\inf\limits_{r\ge1}|f(x^{(k(r))})|>0$.

Однако $\text{ord}([f(x)])=\text{ord}(f([x]))=\text{ord}(0)=-\infty$, следовательно, $\text{ord}((f(x^{(k)}))_{k\ge1})=-\infty<0$. Отсюда имеем: $f(x^{(k)})\to0\Leftrightarrow|f(x^{(k)})|\to0$ при $k\to\infty$. Но это противоречит тому, что $\inf\limits_{r\ge1}|f(x^{(k(r))})|>0$, что и доказывает (1), а также отсутствие корней f в $\mathbf{MK}(x_\infty)$ в случае, если их нет в $\mathbf{K}$.

Пусть f имеет корни в $\mathbf{K}$. При $1\le i\le m$ положим $e_i^{(k)}=1$, если $j(k)=i$ и $e_i^{(k)}=0$ – в противном случае (для удобства считаем $j(k)=1$ $\forall k<N(\varepsilon_0)$). По построению $j(k)$ имеем: $e_i=(e_i^{(k)})_{k\ge1}$ определены корректно, являются идемпотентами в $s(\mathbf{K})$ и $e_1+\ldots+e_m=1$. Возможно, некоторые $[e_i]=0$. При этом $e_i^{(k)}=1$ равносильно $j(k)=i$.

Теперь $\forall i$ определим $y_i=(y_i^{(k)})_{k\ge1}$: $\forall k\ge1$ положим $y_i^{(k)}=x^{(k)}$ при $e_i^{(k)}=1$ и $y_i^{(k)}=\lambda_i$ при $e_i^{(k)}=0$. То есть $y_i=xe_i+\lambda_i(1-e_i)$. Так как последовательности $(e_i^{(k)})_{k\ge0}$ ограничены, то $\forall i$: $\text{ord}(e_i)\le0$, в частности $\text{ord}y_i<+\infty$. Следовательно, $\forall i$: $\text{ord}(f(x)e_i)=-\infty$, ибо $\text{ord}(f(x))=-\infty$ и $\text{ord}(f(x)e_i)\le\text{ord}(f(x))+\text{ord}(e_i)\le\text{ord}(f(x))$.

По построению $xe_i=y_ie_i$. Согласно лемме 2 имеем: $f(0)(1-e_i)+f(x)e_i=f(xe_i)=$ $=f(y_ie_i)=f(0)(1-e_i)+f(y_i)e_i$, следовательно, $f(x)e_i=f(y_i)e_i$, поэтому $\text{ord}(f(y_i)e_i)=-\infty$. Теперь замечаем, что если $y_i^{(k)}=\lambda_i$, то $f(y_i^{(k)})=0$, что имеет место при $e_i^{(k)}=0$, т. е. $1-e_i^{(k)}\ne0$. Поэтому $f(y_i)(1-e_i)=0$, следовательно, $f(y_i)=f(y_i)e_i+f(y_i)(1-e_i)=$ $=f(y_i)e_i$, откуда $\text{ord}(f(y_i))=-\infty$ и $[f(y_i)]=0$.

В силу (1) $\forall i$ имеем: $\forall\varepsilon\le\varepsilon_0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что если $k\ge N(\varepsilon)$ и $e_i^{(k)}=1$, то $|x^{(k)}-\lambda_i|<\varepsilon$. При этом для таких k: $x^{(k)}=y^{(k)}$, поэтому $|y_i^{(k)}-\lambda_i|=|x^{(k)}-\lambda_i|<\varepsilon$, а для других $k\ge N(\varepsilon)$: $|y_i^{(k)}-\lambda_i|=0<\varepsilon$, так что $|y_i^{(k)}-\lambda_i|<\varepsilon$, $\forall k\ge N(\varepsilon)$, поэтому $y_i^{(k)}\to\lambda_i$, $k\to\infty$.

Для любого i имеем разложение: $f(z)=(z-\lambda_i)^{\nu(i)}g_i(z)$, где $1\le i\le m$, $g_i\in\mathbf{K}[z]$, $g_i(\lambda_i)\ne0$. Тогда $f(y_i^{(k)})=(y_i^{(k)}-\lambda_i)^{\nu(i)}g_i(y_i^{(k)})$, где $g_i(y_i^{(k)})\to g_i(\lambda_i)\ne0$, $k\to\infty$, так как $y_i^{(k)}\to\lambda_i$, а полином g_i – непрерывен. Поэтому $0<C_{1,i}\le|g_i(y_i^{(k)})|\le C_{2,i}$, $k\ge k_0$, откуда $[(g_i(y_i^{(k)}))_{k\ge1}]=[(b_i^{(k)})_{k\ge1}]=[b_i]$, где $0<C_{1,i}\le|b_i^{(k)}|\le C_{2,i}$ $\forall k$ и $1/C_{2,i}\le|(b_i^{(k)})^{-1}|\le1/C_{1,i}$, поэтому $\text{ord}(b_i)=\text{ord}(b_i^{-1})=0$ и $\exists[(g_i(y_i^{(k)}))_{k\ge1}]^{-1}=[b_i^{-1}]\in\mathbf{MK}(x_\infty)$.

Отсюда $\forall i$: в силу равенств $f(y_i)=(y_i-\lambda_i\cdot1)^{\nu(i)}g_i(y_i)$ и $[f(y_i)]=0$ имеем: $0=[f(y_i)][g_i(y_i)]^{-1}=[y_i-\lambda_i\cdot1]^{\nu(i)}$, но согласно теореме 2 в $\mathbf{MK}(x_\infty)$ нет нильпотентных элементов, поэтому $[y_i-\lambda_i\cdot1]=0$. Так как $e_1+\ldots+e_m=1$ и $xe_i=y_ie_i$, имеем: $x=xe_1+\ldots+xe_m=y_1e_1+\ldots+y_me_m=\sum\limits_{i=1}^{m}(\lambda_i\cdot1+(y_i-\lambda_i\cdot1))e_i=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_ie_i+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\lambda_i\cdot1)e_i$, но $[\sum_{i=1}^{m}(y_i-\lambda_i\cdot 1)e_i]=\sum_{i=1}^{m}[y_i-\lambda_i\cdot 1][e_i]=0\Rightarrow[x]=\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e_i\right]$, где по построению $\forall k\geq 1$: только одно значение $e_i^{(k)}=1\neq 0$, что равносильно утверждению теоремы.►

Следствие. Для любого **K** *все идемпотенты в* МК(x_∞) *имеют вид* $[e]$, *где* e – *последовательность нулей и единиц.*

◄ $e^2=e\Leftrightarrow e(e-1)=0$. Так как **K** – поле разложения полинома $x(x-1)$, имеющего в нем 2 корня $x=0$ и $x=1$, то, применяя теорему 3, получаем требуемое.►

Выражаю благодарность профессору Я.В. Радыно за обсуждение результатов.

1. Рингель Д.Е. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1. С. 71.
2. Радыно Я.В., Рингель Д.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 1. С. 44.
3. Рингель Д.Е. // Там же. № 2. С. 59.

Поступила в редакцию 28.06.2002.

Дмитрий Евгеньевич Рингель – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Я.В. Радыно.

УДК 517.925

А.В. ЧИЧУРИН

К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕЖДУ КЛАССАМИ УРАВНЕНИЙ ШАЗИ И УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Chazy nonlinear differential equation of the third order with coefficients depending on six parameters is considered. Coefficient conditions of the Chazy equation witch has two-parametric family of solutions are obtained.

Исследуя уравнение

$$y'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{(y'-a_k')(y''-a_k'')+A_k(y'-a_k')^3+B_k(y'-a_k')^2+C_k(y'-a_k')}{y-a_k}+Dy''+$$
$$+Ey'+\prod_{i=1}^{6}(y-a_i)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{y-a_k}\left(a_i\neq a_j(i,\ j=\overline{1,6};\ i\neq j)\right). \quad (1)$$

Шази показал [1], что некоторые случаи вырождения уравнения (1) являются уравнениями Пенлеве, и, следовательно, уравнение (1) может быть рассмотрено как существенно новое [2]. В [3] приведена система (S_1)–(S_6), состоящая из 32 уравнений и представляющая собой необходимые и достаточные условия принадлежности уравнения (1) к P-типу. Покажем, что при некоторых коэффициентных соотношениях данное уравнение имеет двухпараметрическое семейство решений, представляющее собой решение некоторого уравнения второго порядка, при этом полагаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют системе (S_1)–(S_6).

Преобразуем уравнение (1)

$$\prod_{i=1}^{6}(y-a_i)\ (y'''-Dy''-Ey')=(y-a_2)(y-a_3)\cdot\ldots\cdot(y-a_6)h_1+$$
$$+(y-a_1)(y-a_3)\cdot\ldots\cdot(y-a_6)h_2+\ldots+(y-a_1)(y-a_2)\cdot\ldots\cdot(y-a_5)h_6+ \quad (2)$$
$$+((y-a_2)(y-a_3)\cdot\ldots\cdot(y-a_6)F_1+(y-a_1)(y-a_3)\cdot\ldots\cdot(y-a_6)F_2+\ldots+$$