УДК 512.542

И.М. БЛИЗНЕЦ

ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОТЫ 2 РЕШЕТКИ ω-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

The description of elements of the height 2 of ω-local formations of finite groups are described in this paper.

Здесь нами рассматриваются только конечные группы. Кроме стандартных, используется система определений и обозначений работы [2].

По аналогии с длиной локальной формации определяется l_ω-длина ω-локальной формации $\mathfrak{F}$: если длина решетки ω-локальных подформаций ω-локальной формации $\mathfrak{F}$-конечна и равна n, то число n называется l_ω-длиной формации $\mathfrak{F}$ [1]. Отметим, что ω-локальные формации длины 3 являются элементами высоты 2 решетки всех ω-локальных формаций.

Целью данной работы является описание ω-локальных формаций l_ω-длины 3. Отметим, что задача, когда $\omega=\{p\}$ – одноэлементное множество, была решена в работе [3].

Напомним, что ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ называется l_ω-неприводимой [1], если $\mathfrak{F}$ нельзя представить в виде $\mathfrak{F}=l_\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – объединение всех собственных ω-локальных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Проверка показывает, что справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – l_ω-неприводимая формация. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной ω-локальной формацией с единственной максимальной ω-локальной подформацией.

Лемма 2. Тогда и только тогда ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет l_ω-длину 2, когда $\mathfrak{F}=l_\omega\mathrm{form}(G)$, где G – либо неединичная p-группа для некоторого $p\in\omega$, либо некоторая простая ω'-группа.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – l_ω-неприводимая формация. В этом случае $\mathfrak{F}$ имеет l_ω-длину 3 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}=l_\omega\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом R, что выполняется одно из следующих условий:

1) $R=G^{\mathfrak{N}_r}$ – неабелева pd-группа для некоторого $p\in\omega$, причем $\pi(R)\cap\omega=\{p\}$;

2) R– ω'-группа и $R=G^{\mathfrak{N}_r}$ для некоторого числа $r\in\omega$;

3) G – неабелева группа порядка p^3 простой экспоненты $p\neq2$, $p\notin\omega$;

4) G – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $R=G'$, где G/R – элементарная абелева q-группа и $\pi(G)\cap\omega=\varnothing$.

Доказательство. *Необходимость.* Ввиду леммы 1 $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную ω-локальную подформацию $\mathfrak{M}$. Так как при этом l_ω-длина $\mathfrak{F}$ равна 3, то $\mathfrak{M}$ – ω-локальная формация l_ω-длины 2. Значит, согласно лемме 2 $\mathfrak{M}=l_\omega\mathrm{form}(A)$, где A – либо простая ω'-группа, либо неединичная p-группа для некоторого $p\in\omega$.

Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{M}$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{M}}$. Кроме того, поскольку при этом всякая собственная ω-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F}=l_\omega\mathrm{form}(G)$.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}=l_\omega\mathrm{form}(A)=\mathfrak{N}_r$ для некоторого $r\in\omega$.

Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}$. Тогда, поскольку G – монолитическая группа из $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}$, то G – q-группа для некоторого простого q. Если $q=r$, то $G\in\mathfrak{N}_r$, что противоречит выбору группы G. Значит, $q\neq r$. Но $G/R\in\mathfrak{M}$ и поэтому $R=G$ – группа простого порядка q, тогда G – простая группа. Значит, l_ω-длина формации $\mathfrak{F}$ равна 1. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{N}$.

Так как при этом всякая собственная ω-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная ω-локальная ненильпотентная формация. Значит, ввиду теоремы 1 [4] $\mathfrak{F}=l_\omega\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:

а) $G=[R]Q$ – p-замкнутая pd-группа Шмидта с $\Phi(G)=1$, где $R=O_p(R)$, $p\in\omega$ и $|Q|=q$ – простое число;

б) $R=G^{\mathfrak{N}_p}$ – неабелева pd-группа для некоторого простого числа $p\in\omega$, и если $|\pi(R)\cap\omega|>1$, то $G=R$ – простая группа;

в) R – ω'-группа.

Пусть G удовлетворяет условию а). Тогда ввиду теоремы 3 [5] формация $\mathfrak{F}=l_\omega\mathrm{form}(G)$ имеет единственную максимальную ω-локальную подформацию $\mathfrak{H}$ с таким внутренним ω-локальным спутником h, что

$$h(a)=\begin{cases}\mathrm{form}(G/R), & \text{если } a=p,\\ \mathrm{form}(G/F_q(G)), & \text{если } a=q\in\omega,\\ \varnothing, & \text{если } a\in\omega\backslash\{p,\ q\},\\ \mathrm{form}(G/G_{\omega d}), & \text{если } a=\omega'.\end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{H}\not\subseteq\mathfrak{M}$. Допустим, что $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{M}$. Тогда по лемме 7 [2], если H – канонический спутник формации $\mathfrak{H}$ и M – канонический спутник формации $\mathfrak{M}$, то $H\leq M$. Отметим, что согласно теореме 1 [2]

$$\begin{cases}M(\omega')=\mathfrak{N}_r,\\ M(r)=\mathfrak{N}_r,\\ M(q)=\varnothing \ \text{для любых } q\in\omega\setminus\{r\}\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}H(\omega')=H,\\ H(q)=\mathfrak{N}_q h(q), & \text{если } q\in\pi(H)\cap\omega,\\ H(q)=\varnothing, & \text{если } q\in\omega\backslash\pi(H).\end{cases}$$

Значит, поскольку, очевидно, $F_q(G)=G$, то

$$\begin{cases}H(\omega')=\mathfrak{H},\\ H(p)=\mathfrak{N}_p\mathrm{form}(G/R),\\ H(q)=\mathfrak{N}_q, & \text{если } q\in\omega,\\ H(r)=\varnothing, & \text{если } r\in\omega\backslash\{p,\ q\}.\end{cases}$$

Если $H\leq M$, то, в частности, $r=p$ и $H(p)\subseteq M(p)$, т. е.

$$\mathfrak{N}_p\text{form}(G/R)\subseteq\mathfrak{N}_r.$$

Но $G/R\cong H$ – неединичная q-группа, где $q\neq p$. Противоречие. Следовательно, $H\not\leq M$. Значит, $\mathfrak{H}\not\subseteq\mathfrak{M}$. Следовательно, такой случай невозможен.

Пусть G удовлетворяет условию б). Пусть $\pi=\pi(R)\cap\omega$ и $|\pi|>1$. Тогда, если $p, q\in\pi$ и $p\neq q$, то по теореме 1 [2] $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_q\subseteq\mathfrak{H}$.

Следовательно,

$$1\subset\mathfrak{N}_p\subset\mathfrak{N}_p\times\mathfrak{N}_q\subset\mathfrak{F},$$

что противоречит условию. Итак, $|\pi|=1$, т. е. G удовлетворяет условию 1) теоремы.

Рассматривая другие возможные случаи, приходим к условиям 2)–4).

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условию 1) теоремы, т. е. $R=G^{\mathfrak{N}_p}$ – неабелева pd-группа для некоторого простого числа $p\in\omega$ и $\omega\cap\pi(R)=\{p\}$. Тогда ввиду теоремы 2 [5] формация $\mathfrak{F}=l_\omega\text{form}(G)$ l_ω-неприводима и ее максимальная ω-локальная подформация $\mathfrak{H}$ имеет внутренний ω-локальный спутник h такой, что

$$h(a)=\begin{cases}\text{form}(G/R), & \text{если } \ a=p,\\ \varnothing, & \text{если } \ a=q\in\omega\backslash\{p\},\\ \varnothing, & \text{если } \ a=q\in\omega\backslash\pi(G),\\ \text{form}(G/G_{\omega d}), & \text{если } \ a=\omega'.\end{cases}$$

Покажем, что формация $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}_p$. Действительно, формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой канонический ω-локальный спутник f, что

$$f(a)=\begin{cases}\mathfrak{N}_p, & \text{если } a=p,\\ \varnothing, & \text{если } a=q\in\omega\backslash\{p\},\\ \mathfrak{N}_p, & \text{если } a=\omega'.\end{cases}$$

Тогда, поскольку по лемме 1 [2] $G_{\omega d}=G$, то

$$h(p)=\text{form}(G/R)\subseteq\mathfrak{N}_p$$

и

$$h(\omega')=\text{form}(G/G)=1\subseteq\mathfrak{N}_p.$$

К тому же $h(q)=\varnothing\not\subset f(q)=\varnothing$ для всех $q\in\omega\backslash\{p\}$. Значит, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}_p$.

В свою очередь по лемме 5 [2] минимальный ω-локальный спутник f формации $\mathfrak{N}_p$ таков, что

$$f(a)=\begin{cases}(1), & \text{если } \ a=p,\\ \varnothing, & \text{если } \ a=q\in\omega\backslash\{p\},\\ (1), & \text{если } \ a=\omega'.\end{cases}$$

Мы видим, что $f\leq h$, и поэтому $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{H}$. Итак, $\mathfrak{N}_p=\mathfrak{H}$. Но поскольку l_ω-длина формации $\mathfrak{N}_p$ равна 2, то l_ω-длина формации $\mathfrak{F}$ равна 3.

Аналогично проверяется, что l_ω-длина формации $\mathfrak{F}$ равна 3, если выполняется одно из условий 2)–4). Теорема доказана.

Для приводимого случая верна следующая

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – l_ω-приводимая формация. В этом случае $\mathfrak{F}$ имеет l_ω-длину 3 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}=l_\omega\text{form}(A\times B)$, где A и B – неизоморфные простые группы и выполняется одно из следующих условий:

1) A и B – ω'-группы;

2) $|A| = p \in \omega$, $|B| = q \in \omega$;

3) $|A| = p \in \omega$, B – ω'-группа.

1. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.
2. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. // Мат. труды. 1999. Т. 2. № 1. С. 114.
3. Джарадин Джехад // Вопр. алгебры. Гомель, 1996. Вып. 9. С. 45.
4. Джарадин Джехад // Там же. 1995. Вып. 3. С. 59.
5. Селькин В.М. Формации с единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией. Препринт / Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины. Гомель, 2001. № 107.

Поступила в редакцию 20.09.2002.

Ирина Михайловна Близнец – аспирант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины А.Н. Скиба.

УДК 681.511

Д.Н. ШЕВЧЕНКО

О СПОСОБЕ ФОРМАЛИЗАЦИИ СЖАТ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ БЕЗОПАСНОСТИ ИХ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

To propose formalism of discrete railway automatic and telemechanics systems for simulation modeling by analysis and estimation of safety their.

Системы железнодорожной автоматики и телемеханики (СЖАТ) относятся к классу электронных систем управления ответственными технологическими процессами. Поскольку отказ или сбой в их работе могут привести к большому экономическому ущербу и непосредственной угрозе жизни людей, то при разработке и сертификации СЖАТ необходима процедура доказательства безопасности их функционирования, которая согласно [1] состоит в:

– проверке выполнения условий безопасности функционирования системы, в том числе в случаях неисправностей в ее структуре и задержек;

– проверке системы на самопроверяемость и тестируемость;

– получении и сравнении с нормой оценок вероятностных показателей безопасности функционирования СЖАТ.

Одним из эффективных методов доказательства безопасности системы, позволяющим выполнять названные исследовательские процедуры с математической моделью, является имитационное моделирование (ИМ). Эффективность ИМ, связанная с адекватностью модели и ресурсоемкостью исследований, во многом зависит от выбранного способа формализации СЖАТ.

Основные положения формализации систем. СЖАТ представляет собой систему с несколькими информационными и управляющими входами, несколькими выходами и определенной внутренней структурой [2]. Состояние системы в каждый момент времени $\xi^{\Sigma}(t)$ характеризуется множеством состояний ее компонентов:

$$\xi^{\Sigma}(t)=\{\ \xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \ldots,\ \xi_n(t)\},\qquad (1)$$

где $\xi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, – вектор внутренних и выходных состояний i-го компонента системы в момент времени t, n – число компонентов. Процесс функциони-