

Соотношения (16) и (17) для приращения риска позволяют на каждом шаге процедуры исключения следить за тем, чтобы общий проигрыш по риску не превосходил некоторой наперед заданной величины, а полученные ранее выражения (10) и (11) позволяют контролировать локальный проигрыш по риску на конкретном шаге для одного признака.

1. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М., 1989.

2. Методы, критерии и алгоритмы, используемые при преобразовании, выделении и выборе признаков в анализе данных. Вильнюс, 1988.

3. Миленький А.В. Классификация сигналов в условиях неопределенности. М., 1975.

4. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М., 1979.

5. Жук Е.Е., Харци Ю.С. Устойчивость в кластер-анализе многомерных наблюдений. Мн., 1998.

6. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963.

Поступила в редакцию 27.03.2002.

Евгений Евгеньевич Жук – доктор физико-математических наук, доцент кафедры ММАД.
Екатерина Викторовна Серикова – студентка 5-го курса ФПИИ.

УДК 519.24

Н.Н. ДЕМЕШ, Т.В. СОБОЛЕВА

ПОСТРОЕНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО УСТОЙЧИВОГО ПРОЦЕССА

The consistent estimate of a spectral density of a discrete real stationary random process by 2π -periodical spectral windows has been constructed.

Будем рассматривать действительный дискретный симметричный α -устойчивый стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in Z = \{0, \pm 1, \dots\}$, $0 < \alpha < 2$ (см. [1, 2, 6]), имеющий спектральное представление

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t) d\xi(\lambda), \quad (1)$$

где $\xi(\lambda)$ – действительный α -устойчивый с независимыми приращениями процесс такой, что

$$\left\{ E |d\xi(\lambda)|^p \right\}^{\alpha/p} = C(p, \alpha) \varphi(\lambda) d\lambda$$

для всех $0 < p < \alpha$, где $C(p, \alpha)$ зависит от α , p и не зависит от $\xi(\lambda)$, а $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, – неотрицательная, интегрируемая, 2π -периодическая функция, которую будем называть спектральной плотностью дискретного устойчивого стационарного случайного процесса (1). При $\alpha=2$ процесс $X(t)$, $t \in Z$, является гауссовским, а функция $\varphi(\lambda)$ – обычная спектральная плотность и, следовательно, в этом случае для исследования $X(t)$, $t \in Z$, применим традиционный спектральный анализ. При $0 < \alpha < 2$ функция $\varphi(\lambda)$ не является спектральной плотностью в обычном смысле, но при решении задач линейного предсказания и фильтрации играет ту же роль, что и спектральная плотность процессов второго порядка.

В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим следующую статистику

$$\tilde{\Phi}_T(\lambda) = [\tilde{f}_T(\lambda)]^{\alpha/p}, \quad (2)$$

где $\tilde{f}_T(\lambda)$ имеет представление

$$\tilde{f}_T(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_T(\lambda - \nu) I_T(\nu) d\nu, \quad (3)$$

а $I_T(\nu) = k(p, \alpha) |d_T(\nu)|^p$, $0 < p < \alpha < 2$, $\nu \in \Pi$, – модифицированная периодограмма, $k(p, \alpha)$ – константа, определенная в [5], $d_T(\nu)$ – сглаженное окном просмотра данных $h\left(\frac{t}{T}\right)$ преобразование Фурье, построенное по $2T+1$ наблюдениям за рассматриваемым процессом, определенное в [5], а спектральное окно $W_T(\lambda)$ представимо в виде

$$W_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-M_T}^{M_T} k_T(l) \cos\{\lambda l\},$$

где $k_T(l)$ – корреляционное окно, удовлетворяющее следующим условиям:

$k_T(l) = k\left(\frac{l}{M_T}\right)$, $M_T \in N$, $M_T \rightarrow \infty$, $\frac{M_T}{T} \rightarrow 0$, а $k(x)$ – ограниченная

четная функция, для которой справедливы свойства

$$1) k(0)=1,$$

$$2) |k(x)| < 1 \text{ при } x \neq 0, x \in R,$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} k^2(x) dx < \infty.$$

Теорема 1. Если спектральная плотность $\varphi(\lambda)$ дискретного действительного α -устойчивого стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in Z$, $0 < \alpha < 2$, непрерывна в точке $\lambda_0 \in \Pi$ и ограничена на Π , а $|H_T(\lambda)|^\alpha$ – ядро на множестве Π , где $H_T(\lambda)$ – нормированное преобразование Фурье окна просмотра данных $h(t/T)$, то для математического ожидания статистики $\tilde{f}_T(\lambda)$, определенной формулой (3), справедливо следующее предельное соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \tilde{f}_T(\lambda_0) = [\varphi(\lambda_0)]^{p/\alpha}, \quad 0 < p < \alpha.$$

Доказательство. Из [5] известно, что $E I_T(\lambda) = [\gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha}$, где

$$\gamma_T(\lambda) = \left(\frac{1}{2} Q(\lambda) \right)^\alpha \int_{\Pi} |H_T(\lambda - u) + H_T(\lambda + u)|^\alpha \varphi(u) du, \quad (4)$$

$$\text{а } Q(\lambda) = \begin{cases} 2^{1-1/\alpha}, & \lambda \neq 0 \\ 1, & \lambda = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Следовательно, } E \tilde{f}_T(\lambda_0) = \int_{-\pi}^{\pi} W_T(\lambda_0 - \nu) [\gamma_T(\nu)]^{p/\alpha} d\nu.$$

Воспользовавшись соотношением $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T(\nu) = \varphi(\nu)$, приведенным в [3],

а также учитывая свойства спектрального окна $W_T(\lambda)$, получим далее

$$E \tilde{f}_T(\lambda_0) = \int_{-\pi}^{\pi} W_T(\lambda_0 - \nu) [\varphi(\nu)]^{p/\alpha} d\nu = \int_{-\pi}^{\pi} W_T(\nu) [\varphi(\lambda_0 + \nu)]^{p/\alpha} d\nu \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (\varphi(\lambda_0))^{p/\alpha}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, спектральная плотность дискретного действительного α -устойчивого стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < \alpha < 2$, непрерывна в точке $\lambda_0 \in \Pi$ и ограничена на Π , выражение $|H_T(\lambda)|^\alpha$ является ядром на множестве Π , причем

$$\int_{\Pi} |H_T(x - \lambda_1) H_T(x - \lambda_2)|^{\alpha/2} dx \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \lambda_1, \lambda_2 \in \Pi, \lambda_1 \neq \lambda_2 \pmod{2\pi},$$

тогда для дисперсии статистики $\tilde{f}_T(\lambda)$, определенной формулой (3), выполняется соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\tilde{f}_T(\lambda_0) = 0, \quad 0 < p < \frac{\alpha}{2}.$$

Доказательство. Пусть L_T – числовая последовательность такая, что $L_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$, но

$$\frac{M_T}{L_T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ и } \frac{L_T}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ и } v_j = \frac{\pi j}{L_T}, \quad j = -\left[\frac{L_T}{2}\right] + 1, \dots, \left[\frac{L_T}{2}\right].$$

Заменяя интеграл в (3) интегральной суммой, получим:

$$D\tilde{f}_T(\lambda_0) = D \left(\int_{\Pi} W_T(v) I_T(\lambda_0 + v) dv \right) \approx D \left(\frac{2\pi}{L_T} \sum_{j=-\left[\frac{L_T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(v_j) I_T(\lambda_0 + v_j) \right),$$

где запись " $x_T \approx y_T$ " означает, что $x_T - y_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Из [5] известно, что $D I_T(\lambda) = V_{p,\alpha} [\gamma_T(\lambda)]^{2p/\alpha}$, где $\gamma_T(\lambda)$ задано соотношением (4), а $V_{p,\alpha}$ – константа, зависящая от p и α , определенная в [5]. Тогда

$$\begin{aligned} D\tilde{f}_T(\lambda_0) &= \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \sum_{j=-\left[\frac{L_T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T^2(v_j) V_{p,\alpha} [\gamma_T(\lambda_0 + v_j)]^{2p/\alpha} + \\ &+ \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \sum_{j_1=-\left[\frac{L_T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} \sum_{\substack{j_2=-\left[\frac{L_T}{2}\right]+1 \\ j_1 \neq j_2}}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(v_{j_1}) W_T(v_{j_2}) \operatorname{cov} \{ I_T(\lambda_0 + v_{j_1}); I_T(\lambda_0 + v_{j_2}) \} \approx \\ &\approx \left(\frac{2\pi}{L_T} \right) \int_{\Pi} W_T^2(v) V_{p,\alpha} [\gamma_T(\lambda_0 + v)]^{2p/\alpha} + \\ &+ \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \sum_{j_1=-\left[\frac{L_T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} \sum_{\substack{j_2=-\left[\frac{L_T}{2}\right]+1 \\ j_1 \neq j_2}}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(v_{j_1}) W_T(v_{j_2}) \operatorname{cov} \{ I_T(\lambda_0 + v_{j_1}); I_T(\lambda_0 + v_{j_2}) \} \leq \\ &\leq V_{p,\alpha} \max_{\Pi} [\gamma_T(\lambda_0 + v)]^{2p/\alpha} \left(\frac{2\pi}{L_T} \right) \int_{\Pi} W_T^2(v) dv + \end{aligned}$$

$$+ \max_{\substack{j_1, j_2 \\ j_1 \neq j_2}} \text{cov} \left\{ I_T(\lambda_0 + v_{j_1}); I_T(\lambda_0 + v_{j_2}) \right\} \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \sum_{j_1 = -\left[\frac{L_T}{2}\right] + 1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} \sum_{\substack{j_2 = -\left[\frac{L_T}{2}\right] + 1 \\ j_1 \neq j_2}}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(v_{j_1}) W_T(v_{j_2}) = S_1 + S_2.$$

Так как $\int_{\Pi} W_T^2(v) dv = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-M_T}^{M_T} k^2 \left(\frac{l}{M_T} \right)$, то, заменяя приближенно полученную интегральную сумму интегралом, будем иметь:

$$\int_{\Pi} W_T^2(v) dv \approx \frac{2M_T + 1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(x) dx.$$

Таким образом, используя свойство 3 для $k(x)$, получим

$$S_1 = O \left(\frac{M_T}{L_T} \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \text{ так как } \frac{M_T}{L_T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Рассмотрим S_2 . Так как

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \sum_{j_1 = -\left[\frac{L_T}{2}\right] + 1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} \sum_{\substack{j_2 = -\left[\frac{L_T}{2}\right] + 1 \\ j_1 \neq j_2}}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(v_{j_1}) W_T(v_{j_2}) \leq \\ & \leq \left(\frac{2\pi}{L_T} \right)^2 \sum_{j_1 = -\left[\frac{L_T}{2}\right] + 1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(v_{j_1}) \sum_{j_2 = -\left[\frac{L_T}{2}\right] + 1}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(v_{j_2}) \approx \left(\int_{\Pi} W_T(v) dv \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

и из [1] известно, что

$$\text{cov} \{ I_T(\lambda_1), I_T(\lambda_2) \} = O \left(\int_{\Pi} |H_T(x - \lambda_1) H_T(x - \lambda_2)|^{\alpha/2} dx \right), \text{ то с учетом усло-$$

вия теоремы $\int_{\Pi} |H_T(x - \lambda_1) H_T(x - \lambda_2)|^{\alpha/2} dx \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ получим, что

$$\text{cov} \{ I_T(\lambda_1); I_T(\lambda_2) \} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \text{ и, следовательно, } S_2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \text{ Теорема}$$

доказана.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2, причем $\varphi(\lambda_0) > 0$, $\lambda_0 \in \Pi$, тогда статистика $\tilde{\varphi}_T(\lambda)$, заданная соотношением (2), является состоятельной оценкой спектральной плотности $\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 в смысле сходимости по вероятности.

Доказательство. Необходимо показать, что $\lim_{T \rightarrow \infty} P \{ |\tilde{\varphi}_T(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0)| > \varepsilon \} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Воспользуемся соотношением $|x^r - y^r| \leq \frac{r}{2} |x - y| (x^{r-1} + y^{r-1})$, справедливым для любых $x, y > 0$ и $r \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$. Тогда получим:

$$|\tilde{\varphi}_T(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0)| = \left| [\tilde{f}_T(\lambda_0)]^{\alpha/p} - [(\varphi(\lambda_0))^{p/\alpha}]^{\alpha/p} \right| \leq C(\alpha, p, \lambda_0) |\tilde{f}_T(\lambda_0) - [\varphi(\lambda_0)]^{p/\alpha}|, \text{ где}$$

$$C(\alpha, p, \lambda_0) = \frac{\alpha}{2p} \left([\tilde{f}_T(\lambda_0)]^{\alpha/p-1} + [(\varphi(\lambda_0))^{p/\alpha}]^{\alpha/p-1} \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{p} (\varphi(\lambda_0))^{1-p/\alpha} < +\infty.$$

Используя неравенство Чебышева, а также теоремы 1 и 2, получим

$$P \left\{ \left| [\tilde{f}_T(\lambda_0)] - (\varphi(\lambda_0))^{p/\alpha} \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{E \left| [\tilde{f}_T(\lambda_0)] - (\varphi(\lambda_0))^{p/\alpha} \right|^2}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{D\tilde{f}_T(\lambda_0) + \left(E\tilde{f}_T(\lambda_0) - (\varphi(\lambda_0))^{p/\alpha} \right)^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда $|\tilde{f}_T(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0)| \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, что и требовалось доказать.

1. Демеш Н.Н. Построение состоятельной оценки спектральной плотности дискретного устойчивого стационарного процесса. Мн., 1987. 30 с. Деп. в ВИНТИ 19.11.87, № 8205-В 87.

2. Masry E., Cambanis S. // J. Appl. Probab. 1984. Vol. 18. № 18.

3. Соболева Т.В. Статистические свойства преобразования Фурье наблюдений устойчивого стационарного случайного процесса. Мн., 2002. 18 с. Деп. в БЕЛИСА 21.02.2000, № Д 20009.

4. Соболева Т.В. // Проблемы актуарной и финансовой математики: II Междунар. конф., Минск, 20–22 июля 2002 г. Мн., 2002. С. 195.

5. Соболева Т.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. С. 72.

6. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.

Поступила в редакцию 24.06.2002.

Николай Николаевич Демеш – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ИПМОАП.

Татьяна Валентиновна Соболева – ассистент кафедры ИПМОАП.

УДК 519.92

А.А. АФОНЕНКО

НЕЛИНЕЙНОСТЬ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ ДЕ БРЕЙНА

In this paper we found the estimate for nonlinearity of Boolean functions with de Bruijn truth table. This estimate can be used for the construction of highly nonlinear Boolean functions.

Пусть $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов, V_n – n -мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$, A_n – множество аффинных функций от n переменных, т. е. функций вида $l(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta$, где $\alpha_i, \beta \in \mathbb{F}_2$. Через $\bar{v}$ будем обозначать бинарное дополнение вектора $v \in V_n$.

Булева функция f от n переменных задается таблицей истинности – 2^n -вектором $\mathbf{f}$, составленным из значений f на лексикографически упорядоченных векторах V_n . Напомним [1], что *нелинейностью функции f* называется величина

$$\mathcal{N}(f) = \min_{l \in A_n} d(\mathbf{f}, \mathbf{l})$$