

1. Мирошниченко И. С. Закалка из жидкого состояния. М., 1982.
2. Гицу Д. В., Голбан И. М., Канцер В. Г. и др. Явления переноса в висмуте и его сплавах. Кишинев, 1983.
3. Шепелевич В. Г. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1991. № 1. С. 22.
4. Там же. 1996. № 3. С. 37.

Поступила в редакцию 03.09.2002.

Василий Григорьевич Шепелевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела.

Александр Владимирович Демидчик – аспирант кафедры физики твердого тела. Научный руководитель – В. Г. Шепелевич.

УДК 517.977

И. И. КОВАЛЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ РЕЛЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

An optimal control problem with bang-bang controller is under consideration. We obtain the optimality condition and optimization algorithm based on taking into account specific features of the controller.

В приложениях управляющие воздействия создаются специальными техническими устройствами (регуляторами), обладающими теми или иными особенностями. В общей теории оптимального управления учесть все специфические свойства регуляторов не всегда удается, поэтому нужны специальные методы, адаптированные к их особенностям. Простейшими, но широко распространенными на практике являются релейные регуляторы. Их управляющие воздействия могут принимать только конечное множество значений (как правило, два). Формально теория оптимального управления в классе релейных регуляторов включается в общую теорию оптимального управления, опирающуюся на принцип максимума Понтрягина [1]. В данной работе релейные регуляторы выбраны в качестве первого примера, на котором демонстрируется новый метод, учитывающий их специфику. В дальнейшем предлагаемый метод будет обобщен на другие типы регуляторов, которые уже не укладываются в рамки общих теорий.

Принцип работы регулятора состоит в следующем: на его вход подается сигнал $f(t)$, $t \geq 0$, – функция переключения, на выходе получается управляющее воздействие $u(t)$, $t \geq 0$, вида $u(t) = L \operatorname{sign} f(t)$, $t \geq 0$. Далее считаем $L = 1$.

Понятно, что релейное управление $u(t)$, $t \geq 0$, однозначно задается значением $u(0) = \lim_{t \downarrow 0} u(t)$, и моментами переключения $t_1, t_2, \dots (u(t_i) = 0)$. Если значение $u(0)$ зафиксировать, то управление будет определяться вектором управляющих параметров $\tau = (t_1, t_2, \dots)$. Далее будем рассматривать конечный промежуток управления $T = [0, t^*]$, разбитый на части точками $t_1, t_2, \dots, t_p$ и управление с конечномерным вектором $\tau = (t_1, \dots, t_p) \in \Omega_p$, где $\Omega_p = \{\tau: 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < t_{p+1} = t^*\}$. Множество релейных управлений, соответствующих векторам $\tau \in \Omega_p$, обозначим через U_p . Управление $u(\cdot) = (u(t), t \in T) \in U_p$ и порождающий его вектор $\tau \in \Omega_p$ назовем доступными.

1. В классе U_p релейных управлений рассмотрим терминальную задачу оптимального управления:

$$c'x(t^*) \rightarrow \max_{u, p}, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Gx(t^*) = g, \quad u(\cdot) \in U_p, \quad p \in N. \quad (1)$$

Используя формулу Коши [2] и релейность управления, запишем задачу (1) в параметрической форме:

$$f_0(\tau, u_0) = u_0 \sum_{k=0}^p \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-1)^k c(t) dt \rightarrow \max_{u_0, \Omega_p, p}, \quad u_0 \in \{-1, 1\}, \quad \tau \in \Omega_p, \quad p \in N, \quad (2)$$

$$f(\tau, u_0) = u_0 \sum_{k=0}^p \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-1)^k z(t) dt = g - GF(t^*)x_0,$$

где $c(t) = c' F(t^*) F^{-1}(t) b$, $z(t) = GF(t^*) F^{-1}(t) b$, $F: \dot{F} = AF$, $F(0) = E$.

2. Пусть $u(\cdot)$ – доступное управление с вектором τ . На одном из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, p}$, выберем произвольный момент $\zeta_i \in]t_i, t_{i+1}[$ и построим доступное управление $\bar{u}(\cdot)$ с вектором

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(\zeta_i) = (t_0 + \Delta t_0, \dots, t_i + \Delta t_i, \zeta_i - \Delta \zeta_i, \zeta_i + \Delta \zeta_i, t_{i+1} + \Delta t_{i+1}, \dots, t_{p+1} + \Delta t_{p+1}),$$

где $\Delta t_0 \geq 0$; $\Delta \zeta_i \geq 0$, Δt_k , $k = \overline{1, p}$; $\Delta t_{p+1} \leq 0$ – произвольные достаточно малые по модулю величины. Подсчитаем значения критерия качества и функции основных ограничений задачи (2) на векторе $\bar{\tau}$ и оставим только члены, линейные относительно приращений. Введем обозначения: w – невязка,

$$\Delta \tau = \Delta \tau(\zeta_i) = (\Delta t_0; \Delta t_k, k = \overline{1, p}; \Delta t_{p+1}; \Delta \zeta_i),$$

$$l = (-c(t_0); 2(-1)^{k+1} c(t_k), k = \overline{1, p}; (-1)^p c(t_{p+1}); 4(-1)^{i+1} c(\zeta_i)) u_0,$$

$$D = (-z(t_0); 2(-1)^{k+1} z(t_k), k = \overline{1, p}; (-1)^p z(t_{p+1}); 4(-1)^{i+1} z(\zeta_i)) u_0.$$

В результате получим линеаризацию задачи (2):

$$l' \Delta \tau \rightarrow \max_{\Delta \tau}, \quad D \Delta \tau = w, \quad 0 \leq \Delta t_0 \leq t_1 - t_0, \quad t_p - t_{p+1} \leq \Delta t_{p+1} \leq 0, \quad (3)$$

$$0 \leq \Delta \zeta_i \leq \zeta_i^*, \quad t_{k-1} - t_k \leq \Delta t_k \leq t_{k+1} - t_k, \quad k = \overline{1, p}; \quad u_0 \in \{-1, 1\}, \quad \bar{\tau} \in \Omega_{p+2}.$$

3. **Лемма.** Если $u^0(\cdot)$ – оптимальное управление задачи (1), то при любом $\zeta_i \in T$ вектор $\Delta \tau^0 = 0$ – оптимальный план задачи (3).

Введем функцию $\psi'(t) = (c' - v' G) F(t^*) F^{-1}(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A' \psi$, $\psi(t^*) = c - G' v$, где $F(t)$ – матрица решений системы $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$; v – оптимальный вектор потенциалов задачи (2). Назовем функцию $\Delta(t) = \psi'(t) b$, $t \in T$, коуправлением. Используя лемму и критерий оптимальности [3], можем доказать

Принцип максимума. Допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, задачи (1) оптимально тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$u(t) = \text{sign} \Delta(t), \quad t \in T.$$

4. **Алгоритм.** А). Выберем натуральное $N \geq m$ и решим методом [3]

$$J(u) = c' x(t^*) \rightarrow \max_u, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Gx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \quad (4)$$

в классе дискретных управлений [4]. Если решение (4) идентифицировало структуру оптимального управления (1), т. е. количество нулей функций

$$\Delta^0(t), \quad t \in T, \quad \text{и} \quad \Delta_h^0(kh) = \int_{kh}^{(k+1)h} \Delta^*(t) dt / h, \quad k = \overline{1, N-1}; \quad \Delta^*(t) = \psi'(t) b \quad \text{одинаково,}$$

и $\text{sign} \Delta_h^0(t_0) = \text{sign} \Delta^0(t_0)$ (исключим случай, когда $\Delta_h^0(t_0) \approx 0$, $\Delta^0(t_0) \approx 0$), то переходим к процедуре доводки (Б). В противном случае, увеличив N , решим задачу (4).

Определение. Точку $t_k^h = kh$ назовем нулем коуправления $\Delta_h^0(t)$, $t \in T_h = \{0, h, \dots, (N-1)h\}$, если $\Delta_h^0(t_k^h - h)\Delta_h^0(t_k^h) \leq 0$, $\Delta_h^0(t_k^h) \neq 0$.

Б). По оптимальному дискретному управлению $u_h^0(t)$, $t \in T_h$, построим релейное управление $u^1(t)$, $t \in T$. Для этого каждый нуль t_k^h коуправления $\Delta_h^0(t)$, $t \in T_h$, с $|u_h^0(t - h)| \neq 1$ заменим на точку $t_k = t_k^h + (u_h^0(t_k^h - h) - 1)h/2$. Новые точки вместе с оставшимися нулями коуправления $\Delta_h^0(t)$, $t \in T_h$, возьмем в качестве начального приближения τ^1 – вектора управляющих параметров для процедуры доводки [3]. Другой способ построения начального приближения – составить вектор τ^1 из нулей $\Delta^*(t)$, $t \in T$.

Процедура доводки состоит в решении методом Ньютона системы $\Delta(t_k) = 0$, $k = \overline{1, p}$; $f(\tau, u_0) = \bar{g}$ относительно τ , t_k , $k = \overline{1, p}$. При $\Delta(t_k) \neq 0$, $k = \overline{1, p}$, матрица Якоби системы неособая. Начиная с приближения τ^1 , построим 3–5 итераций. Если при этом не обнаруживается сходимость метода или происходит слипание* точек t_k , $k = \overline{1, p}$, то перейдем или к А), увеличив N , или к В). В противном случае построим решение τ^0 задачи (1) с требуемой точностью.

В). Решим задачу (3) на доступном управлении $u^1(\cdot)$ с вектором τ^1 и невязкой w^1 . По полученному решению $\Delta\tau^1$ построим новое приближение $\tau^2 = \tau^1 + \theta\Delta\tau^1$, $\theta > 0$. Если на нем и векторе v^1 выполнено неравенство $f_0(\tau^2, u_0) - (v^1)' \times f(\tau^2, u_0) < f_0(\tau^1, u_0) - (v^1)' f(\tau^1, u_0)$ [5], то решим (3) с вектором τ^2 и невязкой w^2 . Построив 3–5 приближений, перейдем к процедуре доводки Б) с начальным приближением τ^{3-5} . В противном случае возвращаемся к А), увеличив N .

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. М., 1975.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1961.

3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации: В 2 ч. Мн., 1984. Ч. 2.

4. Parametric Optimization and Related Topics / Ed. by J. Gubbot u. a. Berlin, 1987.

5. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.

Поступила в редакцию 10.06.2002.

Наталья Николаевна Коваленок – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 517.977

С.Б. КАЛИТИН, Б.С. КАЛИТИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОМЕХОЙ В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

The problem is considered in the class of bounded inertial controls. The example is the problem with fifth-order dynamic system.

Рассмотрим на плоскости задачу самонаведения объекта О на цель Ц (О и Ц – материальные точки) методом пропорционального наведения, при котором угловая скорость вращения вектора линейной скорости объекта пропорциональна угловой скорости вращения вектора дальности О – Ц. Сделаем следующие допущения: Ц движется прямолинейно и равномерно и

* Две точки t_i , t_{i+1} считаются слипшимися, если целая часть $[t_i/\varepsilon]$ равна целой части $[t_{i+1}/\varepsilon]$.