УДК 517.925.42

В.К. АХРАМЕНКА

НЕАБХОДНАЯ ЎМОВА ЦЭНТРА ДЛЯ АДНОЙ A_3-СІСТЭМЫ Ў ВЫПАДКУ СКЛАДАНАГА АСАБЛІВАГА ПУНКТА

A system of two differential equations for which the origin of coordinates is a special monodromy point is considered. Necessary condition for the centre is abtained.

Будзем разглядаць сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\frac{dx}{dt} = x^2y + bxy^3 + (2a+1)y^5 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k xy^{k+3} + a_i y^{i+5}\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = -(a+1)x^3 - axy^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k yx^{k+2}, \tag{1}$$

для якой пры $a>0$ пачатак каардынатаў ёсць манадромны асаблівы пункт. Сістэма (1) – гэта нармальная форма (24) з [1] для A_3-сістэмы. Неабходную ўмову цэнтра атрымаем, выкарыстоўваючы метад А. Садоўскага [2].

Пераходзім у (1) да палярных каардынатаў $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, а пасля замены $r=r_1\cos\varphi$ прыходзім да дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{dr_1}{d\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\varphi) r_1^k, \tag{2}$$

$$f_1(\varphi) = \frac{2a+1}{a+1}\operatorname{tg}\varphi,\quad f_2(\varphi) = \frac{\sin^2\varphi}{(a+1)^2\cos\varphi}(c_1\cos^3\varphi - b(a+1)\cos^2\varphi\sin\varphi - ab\sin^3\varphi),$$

$$\begin{aligned} f_3(\varphi) = {} & (a+1)^{-3}\cos^{-1}\varphi\sin^2\varphi(-a(a+1)(2a+1)\sin^5\varphi - b_1a(a+1)\cos\varphi\sin^4\varphi - \\ & -(a+1)^2(2a+1)\cos^2\varphi\sin^3\varphi - (a+1)^2 b_1\cos^3\varphi\sin^2\varphi + (a+1)c_2\cos^5\varphi + \\ & +ab^2\sin^7\varphi + (a+1)b^2\cos^2\varphi\sin^5\varphi + (a-1)bc_1\cos^3\varphi\sin^4\varphi + \\ & +(a+1)bc_1\cos^5\varphi\sin^2\varphi - c_1^2\cos^6\varphi\sin\varphi + (a+1)c_2\cos^7\varphi). \end{aligned}$$

Будзем разглядаць развязак раўнання (2) пры ўмове $r_1(0)=c$, дзе c – адвольны дастаткова малы дадатны лік, прычым $r(0)=c$. Гэты развязак знаходзім, зыходзячы з інтэграла Дзюлака [3, с. 48]

$$\cos^{\gamma}\varphi\left[r_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\varphi) r_1^{k+1}\right] = c,\ g_k(0)=0, \tag{3}$$

дзе $\gamma=(2a+1)/(a+1)$, $1<\gamma<2$. Для атрымання першай умовы цэнтра дастаткова абмежавацца дзвюма функцыямі $g_1(\varphi)$, $g_2(\varphi)$, якія знаходзяцца з сістэмы

$$g_1(\varphi) = -\cos^{\gamma}\varphi\int_0^{\varphi} f_2(\tau)\cos^{-\gamma}\tau d\tau,\ g_2(\varphi) = g_1^{\,2}(\varphi) - \cos^{2\gamma}\varphi\int_0^{\varphi} f_3(\tau)\cos^{-2\gamma}\tau d\tau. \tag{4}$$

Пасля вылічэння інтэгралаў з (4) і замены $\cos\varphi=c^{1/2\gamma}$ атрымаем

$$g_1(\arccos c^{1/2\gamma}) = \frac{ab}{(a+1)(2a+1)} - \frac{2b(a+1)(2a-1)}{(2a+1)(2a+3)}c^{1/2} + \frac{b(a-1)}{a+1}c^{1/\gamma} + \ldots,$$
$$g_2(\arccos c^{1/2\gamma}) = \frac{a(a+1)(2a+1)^2 - ab^2}{2(a+1)^2(2a+1)^2} - \frac{4ab^2(2a-1)}{(2a+1)^2(2a+3)}c^{1/2} + \ldots. \tag{5}$$

З (3) на падставе тэарэмы пра няяўную функцыю і з улікам замены $r=r_1\cos\varphi$ маем

$$r = c^{(\gamma+1)/2\gamma}[1 - \frac{ab}{(a+1)(2a+1)}c^{1/2} + (\frac{2b(a+1)(2a-1)}{(2a+1)(2a+3)} + \\ + \frac{(4a^2+a)b^2 - (a^2+a)(2a+1)^2}{2(a+1)^2(2a+1)^2})c + \ldots]. \quad (6)$$

Пры даследаванні акругі $r=0$, $\varphi=\pi/2$ пасля пераходу да палярных каардынатаў у сістэме (1) зробім замену

$$\cos\varphi = \rho\cos\theta,\ r = \rho\sin\theta,\ \theta\in(0;\pi/2], \quad (7)$$

адкуль прыходзім да дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\theta)\rho^k,\ \rho(\pi/2) = s, \quad (8)$$

дзе s – адвольны дадатны лік, прычым $r(\pi/2)=s$,

$$h_1(\theta) = -\frac{(a+1)\cos\theta + b\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta(2a+1+b\cos\theta\sin\theta)},\ h_2(\theta) = -\frac{\sin\theta\cos\theta(ab_1\cos\theta + aa_1\sin\theta)}{(2a+1+b\cos\theta\sin\theta)^2},$$

$$h_3(\theta) = (2a+1+b\cos\theta\sin\theta)^{-3}[b(a-1)(2a+1)\cos^8\theta + (8a^3+4a^2-2b^2-ab^2+$$

$$+2a-1)\cos^7\theta\sin\theta + b(4a^2-b^2-(2a+1)(3+ab+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}ab_2)-1)\cos^6\theta\sin^2\theta+$$

$$+(ab_1^2+(2a+1)(4a^2-2b^2-aa_2-4a-3)-b^2(ab+\frac{1}{2}ab_2+a+\frac{1}{2}b-2))\cos^5\theta\sin^3\theta+$$

$$+(2aa_1b_1-(5ab+4b+ab^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}abb_2+ab_2)(2a+1)-b(2+4a+aa_2+$$

$$+b^2))\cos^4\theta\sin^4\theta + (a(a_1^2+b_1^2)-(2a+1)(3+4a^2+b^2+2aa_2+8a)-$$

$$-b(4ab+2b+ab_2))\cos^3\theta\sin^5\theta + (2aa_1b_1-(ab_2+4ab+2b)(2a+1)-$$

$$-b(aa_2+(2a+1)^2))\cos^2\theta\sin^6\theta + (aa_1^2-(2a+1)(aa_2+(2a+1)^2))\cos\theta\sin^7\theta].$$

Заменаю

$$\rho = \rho_1\sin^{-1/\gamma}\theta\exp[\int_{\pi/2}^{\theta} h(\tau)d\tau],\ h(\tau) = -\frac{ab\cos^2\tau}{(2a+1)(2a+1+b\cos\tau\sin\tau)}$$

атрымаем развязак раўнання (8)

$$\rho = \sin^{-1/\gamma}\theta\exp[\int_{\pi/2}^{\theta} h(\tau)d\tau]\left[s + v_2(\theta)s^2 + v_3(\theta)s^3 + \ldots\right],$$

$$v_k(\pi/2) = 0,\ \theta\in[\theta_0,\pi/2],\ 0<\theta_0<\pi/2,\ \rho(\pi/2)=s, \quad (9)$$

$$v_2(\theta) = \int_{\pi/2}^{\theta}\sin^{-1/\gamma}\tau h_2(\tau)\exp[\int_{\pi/2}^{\tau} h(t)dt]d\tau,$$

$$v_3(\theta) = v_2^2(\theta) + \int_{\pi/2}^{\theta}\sin^{-2/\gamma}\tau h_3(\tau)\exp[2\int_{\pi/2}^{\tau} h(t)dt]d\tau.$$

Калі $\theta\in(0,\theta_0]$ $0<\theta_0<\pi/2$, то ў (8) робім замену

$$\rho = w\exp[\int_{\theta_0}^{\theta} h(\tau)d\tau],\ v = \sin\theta, \quad (10)$$

якая прыводзіць да раўнання

$$v\frac{dw}{dv} = -\frac{1}{\gamma}w - H_2(v)w^2 - H_3(v)w^3 - \ldots, \quad (11)$$

$$H_2(v)=-\frac{vh_2(\arcsin v)}{\sqrt{1-v^2}}\exp[\int\limits_{\theta_0}^{\arcsin v}h(\tau)d\tau],\ H_3(v)=-\frac{vh_3(\arcsin v)}{\sqrt{1-v^2}}\exp[2\int\limits_{\theta_0}^{\arcsin v}h(\tau)d\tau].$$

Развязак раўнання (11) пры ўмове $w(\sin\theta_0)=s_1$, дзе $s_1=\rho(\theta_0)$ з (9), знойдзем з інтэграла Дзюлака

$$wv^{1/\gamma}[1+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(v)w^k]=\exp[\int\limits_{\pi/2}^{\theta_0}h(\tau)d\tau]\left[s+v_2(\theta_0)s^2+v_3(\theta_0)s^3+...\right],\quad (12)$$

$$\eta_1(v)=v^{1/\gamma}\int\limits_{\sin\theta_0}^{v}\tau^{-(1+1/\gamma)}H_2(\tau)d\tau,\ \eta_2(v)=\eta_1^{\ 2}(v)+v^{2/\gamma}\int\limits_{\sin\theta_0}^{v}\tau^{-(1+2/\gamma)}H_3(\tau)d\tau.$$

Улічваючы, што пасля пераходу да палярных каардынатаў раўнанні (3), дзе $r=r_1\cos\varphi$, і (12) вызначаюць кавалкі адной і той самай траекторыі сістэмы (1), знойдзем сувязь паміж c і s. Са стасункаў (7), (10) пры $\cos\varphi=c^{1/2\gamma}$ маем

$$\rho=(c^{1/\gamma}+r^2)^{1/2},\ v=\sin\theta=r/\rho,\ w=\rho\exp[\int\limits_{\theta_0}^{0}-h(\tau)d\tau].\quad (13)$$

З (6) і (13) вынікае

$$\rho=c^{1/2\gamma}(1+\frac{1}{2}c-\frac{ab}{(a+1)(2a+1)}c^{3/2}+...),\ v=c^{1/2}(1-\frac{ab}{(a+1)(2a+1)}c^{1/2}+$$

$$+\frac{4a^3(2b^2+11b-24)+2a^2(7b^2+2b-34)+a(3b^2-12b-23)}{2(1+a)^2(1+2a)^2(3+2a)}c+...),$$

$$w=\exp[\int\limits_{0}^{\theta_0}h(\tau)d\tau]c^{1/2\gamma}[1+\frac{ab}{(2a+1)^2}c^{1/2}+\frac{1}{2}(1-\frac{ab^2(5a^2+4a+1)}{(a+1)(2a+1)^4})c+...].$$

Знаходзячы расклады $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$, карыстаемся формулаю Тэйлара. Маем

$$\eta_1(v)=v^{1/\gamma}[G_2(v)-G_2(\sin\theta_0)],$$

$$G_2(v)=\frac{a(2a+1)b_1}{(2a+1)^2(3a+1)}\exp[\int\limits_{\theta_0}^{0}h(\tau)d\tau]v^{(2-1/\gamma)}+\int\limits_{0}^{v}\tau^{-(1+1/\gamma)}R_2(H_2(\tau))d\tau.$$

Пасля падстаўлення раскладаў v, w, $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$ у (12) з атрыманай роўнасці на падставе тэарэмы пра няяўную функцыю метадам нявызначаных каэфіцыентаў прыходзім да стасунку

$$s=\mu_1c^{1/\gamma}+\mu_2c^{2/\gamma}+\mu_3c^{(\gamma+1)/\gamma}+...,\quad (14)$$

$$\mu_1=\exp[\int\limits_{0}^{\pi/2}h(\tau)d\tau],\ \mu_2=G_2(1)\exp[\int\limits_{0}^{\pi/2}h(\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{\theta_0}h(\tau)d\tau],\ \mu_3=G\exp[\int\limits_{0}^{\pi/2}h(\tau)d\tau],$$

$$G=\frac{3+6a^4+16a^5-4b(3a-a^2-11a^3)}{2(1+a)(1+2a)^3(3+2a)}.$$

Вывучэнне траекторыі $r(\varphi)$ у другім квадранце пры ўмовах $r(\pi/2)=s$, $r(\pi)=\overline{c}$ зводзім да першага квадранта заменаю $\varphi\to\pi-\varphi$, што раўназначна замене каэфіцыентаў $b\to-b$, $b_k\to-b_k$, $c_k\to(-1)^{k+1}c_k$ у сістэме (1). Выкарыстоўваючы вынікі з першага квадранта, з (14) атрымаем

$$s=\overline{\mu}_1\overline{c}^{1/\gamma}+\overline{\mu}_2\overline{c}^{2/\gamma}+\overline{\mu}_3\overline{c}^{(\gamma+1)/\gamma}+...,\quad (15)$$

дзе $\overline{\mu}_1$, $\overline{\mu}_2$, $\overline{\mu}_3$ ёсць вынік адпаведных заменаў каэфіцыентаў у μ_1, μ_2, μ_3. Прыраўноўваючы правыя часткі з (14) і (15), атрымаем раўнанне, з якога знаходзім

$$\bar{c} = \bar{\lambda}_1 c + \bar{\lambda}_2 c^{(1+1/\gamma)} + \bar{\lambda}_3 c^2 + \ldots, \tag{16}$$

$$\bar{\lambda}_1 = \exp[\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau], \quad \bar{\lambda}_2 = \gamma\exp[\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau\ ][\bar{G}_2(1)\exp[\int_0^{\theta_0} \bar{h}(\tau)d\tau + \int_0^{\pi} h(\tau)d\tau] -$$

$$-G_2(1)\exp[\int_0^{\theta_0} h(\tau)d\tau]], \quad \bar{\lambda}_3 = \gamma\exp[\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau\ ][G - \bar{G}\exp[\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau\ ]].$$

Разглядаючы $r(\varphi)$ у трэцім квадранце пры $r(3\pi/2)=\bar{s}$, $r(\pi)=\bar{c}$, зробім замену $\varphi\to\pi+\varphi$, што адпавядае замене ў (1) каэфіцыентаў $a_k\to(-1)^k a_k$, $b_k\to(1)^{k+1}b_k$, $b\to-b$, $c_k\to(-1)^k c_k$. У такім разе маем

$$\bar{s} = \bar{\bar{\mu}}_1\bar{c}^{1/\gamma} + \bar{\bar{\mu}}_2\bar{c}^{2/\gamma} + \bar{\bar{\mu}}_3\bar{c}^{(\gamma+1)/\gamma} + \ldots, \tag{17}$$

дзе $\bar{\bar{\mu}}_1$, $\bar{\bar{\mu}}_2$, $\bar{\bar{\mu}}_3$ ёсць вынік адпаведных заменаў каэфіцыентаў у μ_1, μ_2, μ_3.

Разглядаючы $r(\varphi)$ у чацвёртым квадранце пры $r(2\pi)=\bar{\bar{c}}$, зробім замену $\varphi\to2\pi-\varphi$, што раўназначна замене ў (1) $a_k\to(-1)^k a_k$, $b_k\to(1)^k b_k$, $c_k\to-c_k$. У гэтым выпадку

$$\bar{s} = \bar{\bar{\bar{\mu}}}_1\bar{\bar{c}}^{1/\gamma} + \bar{\bar{\bar{\mu}}}_2\bar{\bar{c}}^{2/\gamma} + \bar{\bar{\bar{\mu}}}_3\bar{\bar{c}}^{(\gamma+1)/\gamma} + \ldots, \tag{18}$$

дзе $\bar{\bar{\bar{\mu}}}_1$, $\bar{\bar{\bar{\mu}}}_2$, $\bar{\bar{\bar{\mu}}}_3$ ёсць вынік адпаведных заменаў каэфіцыентаў у μ_1, μ_2, μ_3. Прыраўноўваючы правыя часткі з (17) і (18), атрымаем

$$\bar{\bar{c}} = \bar{\bar{\lambda}}_1\bar{c} + \bar{\bar{\lambda}}_2\bar{c}^{(1+1/\gamma)} + \bar{\bar{\lambda}}_3\bar{c}^2 + \ldots, \tag{19}$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_1 = \exp[-\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau], \quad \bar{\bar{\lambda}}_2 = \gamma\exp[-\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau\ ][\bar{\bar{G}}_2(1)\exp[\int_{\pi}^{\theta_0} h(\tau)d\tau] -$$

$$-\bar{G}_2(1)\exp[\int_0^{\theta_0} \bar{h}(\tau)d\tau]], \quad \bar{\bar{\lambda}}_3 = \gamma\exp[-\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau\ ]\left[\bar{G} - G\exp\left[-\gamma\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau\right]\right].$$

Падстаўляючы $\bar{c}$ з (16) у (19), выразім $\bar{\bar{c}}$ праз c.

$$\bar{\bar{c}} = c - c^{\frac{3a+2}{2a+1}}\exp[\int_0^{\pi} h(\tau)d\tau]\frac{2(2a+1)}{a+1}$$

$$\left[\int_0^{\pi}\frac{a(a_1\sin\theta + b_1\cos\theta)\cos\theta}{(2a+1+b\cos\theta\sin\theta)^2}\sin^{\frac{a}{2a+1}}\theta\exp[-\frac{ab}{2a+1}\int_0^{\theta}\frac{\cos^2\tau d\tau}{2a+1+b\cos\tau\sin\tau}]d\theta\right] + \ldots.$$

З апошняй роўнасці вынікае

Тэарэма. Калі для сістэмы (1) пачатак каардынатаў ёсць цэнтр, то

$$\int_0^{\pi}\frac{(a_1\sin\theta + b_1\cos\theta)\cos\theta}{(2a+1+b\cos\theta\sin\theta)^2}\sin^{\frac{a}{2a+1}}\theta\exp[-\frac{ab}{2a+1}\int_0^{\theta}\frac{\cos^2\tau d\tau}{2a+1+b\cos\tau\sin\tau}]d\theta = 0.$$

1. Садовский А. П. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1743.
2. Там же. 1989. Т. 25. № 5. С. 790.
3. Дюлак Г. О предельных циклах. М., 1980.

Паступіў у рэдакцыю 26.02.2001.

Віктар Карнеевіч Ахрамéнка – дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі і матэматычнай фізікі.