7. Stout Q.F. // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88. № 3. P. 495.
8. Еровенко В.А. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 9. С. 784.
9. Еровенко В.А., Иванов Ю.Г. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 4. С. 9.

Поступила в редакцию 20.02.2002.

Марина Владимировна Мартон – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа В.А. Еровенко.

УДК 517.965+517.96

Ю.Г. РУЛИНСКИЙ

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

The article deals with some type of pair integral equations given on the finite segments. Using the Wiener – Paley theorem, the equations are reduced to functional relations in the classes of entire functions of exponential type.

Пусть $z=x+iy$. Через E_a обозначим класс всех целых функций $F(z)$ таких, что

$$|F(z)|\le Ce^{a|z|},\ F(x)\in L_2(-\infty,+\infty).$$

По теореме Винера – Пэли [1] класс E_a совпадает с классом всех целых функций вида:

$$F(z)=\int_{-a}^{a} f(t)\, e^{izt}dt,\ \text{где}\ f(t)\in L_2[-a,a].$$

По аналогии с E_a введем два класса целых функций экспоненциального типа:

E_a^+, состоящий из всех целых функций $\Phi^+(z)$, таких, что

$$\Phi^+(x)\in L_2(-\infty,+\infty),\ |\Phi^+(x+iy)|\le M,\ y>0;\quad |\Phi^+(x+iy)|\le Me^{-ay},\ y\le 0.$$

E_a^-, состоящий из всех целых функций $\Phi^-(z)$, таких, что

$$\Phi^-(x)\in L_2(-\infty,+\infty),\ |\Phi^-(x+iy)|\le N,\ y<0;\quad |\Phi^-(x+iy)|\le Ne^{ay},\ y\ge 0.$$

Лемма 1. *Не существует целой функции, отличной от нуля, которая одновременно принадлежит обоим классам* E_a^+ *и* E_a^-.

Доказательство леммы 1 основывается на теореме Лиувилля.

С помощью теоремы Винера – Пэли и леммы 1 можно показать, что верны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Класс* E_a^+ *совпадает с классом всех целых функций вида:*

$$\Phi^+(z)=\int_0^a f(t)e^{izt}dt,\ \text{где}\ f(t)\in L_2[0,\ a].$$

Теорема 2. *Класс* E_a^- *совпадает с классом всех целых функций вида:*

$$\Phi^-(z)=\int_{-a}^{0} f(t)e^{izt}dt,\ \text{где}\ f(t)\in L_2[-a,\ 0].$$

Рассмотрим парные однородные интегральные уравнения первого рода

$$\int_{-a}^{a} e^{-\alpha|x-t|}p(t)dt=0,\quad 0\le x\le a, \tag{1}$$

$$\int_{-a}^{a} e^{-\beta|x-t|}p(t)dt=0,\quad -a\le x\le 0, \tag{2}$$

где $p(t)$ ищем в $L_2[-a, a]$, α, β – const, причем $\alpha, \beta>0$.

Замечание. Интеграл $\int\limits_{-a}^{a} e^{-|x-t|}p(t)dt$, где $p(t)\in L_2[-a, a]$, $x\in[-a, a]$, может быть продолжен естественным образом по переменной x до функции, непрерывной на всей действительной оси.

Продолжим интегралы, стоящие в левой части (1) и (2), по переменной x на всю действительную ось. Имеем

$$\int\limits_{-a}^{a} e^{-\alpha|x-t|}p(t)dt = g(x), \tag{3}$$

$$\int\limits_{-a}^{a} e^{-\beta|x-t|}p(t)dt = f(x), \tag{4}$$

где $g(x)=\begin{cases} k_1^+(x), & x>a \\ 0, & 0\le x\le a \\ \phi^-(x), & -a\le x<0 \\ k_1^-(x), & x<-a \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} k_2^+(x), & x>a \\ \phi^+(x), & 0<x\le a \\ 0, & -a\le x\le 0 \\ k_2^-(x), & x<-a \end{cases}$.

Здесь $\phi^-(x)$ – неизвестная функция из $L_2[-a, 0)$, $\phi^+(x)$ – неизвестная функция из $L_2(0, a]$. $k_1^+(x)$ определяется при $x>0$ левой частью (3) следующим образом:

$$k_1^+(x) = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\alpha(x-t)}p(t)dt = e^{-\alpha x}\int\limits_{-a}^{a} e^{\alpha t}p(t)dt = Ae^{-\alpha x};$$

$k_1^-(x)$ определяется при $x<-a$ левой частью (3) следующим образом:

$$k_1^-(x) = \int\limits_{-a}^{a} e^{\alpha(x-t)}p(t)dt = e^{\alpha x}\int\limits_{-a}^{a} e^{-\alpha t}p(t)dt = Be^{\alpha x},$$

$k_2^+(x)$ определяется при $x>a$ левой частью (4) следующим образом:

$$k_2^+(x) = \int\limits_{-a}^{a} e^{-\beta(x-t)}p(t)dt = e^{-\beta x}\int\limits_{-a}^{a} e^{\beta t}p(t)dt = Ce^{-\beta x};$$

$k_2^-(x)$ определяется при $x<-a$ левой частью (4) следующим образом:

$$k_2^-(x) = \int\limits_{-a}^{a} e^{\beta(x-t)}p(t)dt = e^{\beta x}\int\limits_{-a}^{a} e^{-\alpha t}p(t)dt = De^{\beta x},$$

где A, B, C, D – неизвестные константы.

Так как функции $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны на всей действительной оси, то $\lim\limits_{x\to a+0} k_1^+(x)=0$; $\lim\limits_{x\to -a-0} k_2^-(x)=0$, откуда

$$\begin{cases} Ae^{-\alpha a}=0 \\ De^{-\beta a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ D=0 \end{cases} \Rightarrow k_1^+(x)=0,\ k_2^-(x)=0.$$

Введем функцию $\varphi_1(t)=\begin{cases} p(t), & t\in[-a, a] \\ 0, & t\notin[-a, a] \end{cases}$. Тогда (3) и (4) эквивалентны соответственно следующим интегральным уравнениям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x-t|}\varphi_1(t)dt = g(x), \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|x-t|}\varphi_1(t)dt = f(x). \tag{6}$$

Преобразовав по Фурье левую и правую части (5) и (6), получим соответственно следующие два функциональных уравнения

$$\frac{2\alpha}{z^2+\alpha^2}P(z) = \Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}, \tag{7}$$

$$\frac{2\beta}{z^2+\beta^2}P(z) = \Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz-\beta}, \tag{8}$$

где

$$P(z) = \int_{-a}^{a} p(t)e^{izt}dt\ ,\ \Phi^-(z) = \int_{-a}^{0}\varphi^-(x)e^{izx}dx\ ,\ \Phi^+(z) = \int_{0}^{a}\varphi^+(x)e^{izx}dx.$$

Исключив $P(z)$ из уравнений (7) и (8), имеем

$$\frac{2\beta}{z^2+\beta^2}\left[\Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}\right] = \frac{2\alpha}{z^2+\alpha^2}\left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)}}{iz-\beta}\right]. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует выполнение условия

$$\Phi^-(i\beta) + \frac{Be^{(\beta-\alpha)a}}{\alpha-\beta} = 0 \Rightarrow \Phi^-(i\beta) = \frac{Be^{(\beta-\alpha)a}}{\beta-\alpha}. \tag{10}$$

Преобразуем (9) к виду

$$\Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}-B}{iz+\alpha} = \frac{\alpha(z^2+\beta^2)}{\beta(z^2+\alpha^2)}\left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)}}{iz-\beta}\right] - \frac{B}{iz+\alpha}. \tag{11}$$

Левая часть (11) есть целая функция из класса E_a^-, а правая часть (11) – целая функция из класса E_a^+. По лемме 1 имеем

$$\Phi^-(z) + \frac{Be^{-(iz+\alpha)a}-B}{iz+\alpha} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\alpha(z^2+\beta^2)}{\beta(z^2+\alpha^2)}\left[\Phi^+(z) - \frac{Ce^{(iz-\beta)}}{iz-\beta}\right] - \frac{B}{iz+\alpha} = 0. \tag{13}$$

Из (12) следует $\Phi^-(z) = \dfrac{B-Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}$, и с учетом условия (10) получим $\dfrac{Be^{(\beta-\alpha)a}}{\beta-\alpha} = \dfrac{B-Be^{(\beta-\alpha)a}}{\alpha-\beta}$, откуда вытекает, что B=0 и $\Phi^-(z)$=0. Тогда (13) примет вид $\dfrac{\alpha(z^2+\beta^2)}{\beta(z^2+\alpha^2)}\left[\Phi^+(z) - \dfrac{Ce^{(iz-\beta)}}{iz-\beta}\right] = 0$, откуда $\Phi^+(z) = \dfrac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz-\beta}$, но в данной формуле равенство может выполняться только при условии, что C=0 и $\Phi^+(z)$=0. Из сказанного ранее вытекает, что $P(z)$=0, и в силу взаимно однозначного соответствия между образами и прообразами Фурье парные уравнения (1) и (2) имеют только нулевое решение.

Рассмотрим неоднородные парные интегральные уравнения первого рода

$$\int_{-a}^{a} e^{-\alpha|x-t|}p(t)dt = g_0(x),\ \ 0 \le x \le a, \tag{14}$$

$$\int_{-a}^{a} e^{-\beta|x-t|}p(t)dt = f_0(x), \quad -a \le x \le 0, \qquad (15)$$

где $g_0(x)\in L_2[0, a]$, $f_0(x)\in L_2[-a, 0]$, $p(t)$ ищем в $L_2[-a, a]$, α, β – const, причем $\alpha, \beta>0$.

Продолжим интегралы, стоящие в левой части (14) и (15), по переменной x на всю действительную ось. Имеем

$$\int_{-a}^{a} e^{-\alpha|x-t|}p(t)dt = g(x), \qquad (16)$$

$$\int_{-a}^{a} e^{-\beta|x-t|}p(t)dt = f(x), \qquad (17)$$

где $g(x) = \begin{cases} k_1^+(x), & x>a \\ g_0(x), & 0\le x\le a \\ \phi^-(x), & -a\le x<0 \\ k_1^-(x), & x<-a \end{cases}$; $\quad f(x) = \begin{cases} k_2^+(x), & x>a \\ \phi^+(x), & 0<x\le a \\ f_0(x), & -a\le x\le 0 \\ k_2^-(x), & x<-a \end{cases}$,

где $\phi^-(x)$ – неизвестная функция из $L_2[-a, 0)$, $\phi^+(x)$ – неизвестная функция из $L_2(0, a]$,

$$k_1^+(x) = \int_{-a}^{a} e^{-\alpha(x-t)}p(t)dt = e^{-\alpha x}\int_{-a}^{a} e^{\alpha t}p(t)dt = Ae^{-\alpha x};$$

$$k_1^-(x) = \int_{-a}^{a} e^{\alpha(x-t)}p(t)dt = e^{\alpha x}\int_{-a}^{a} e^{-\alpha t}p(t)dt = Be^{\alpha x};$$

$$k_2^+(x) = \int_{-a}^{a} e^{-\beta(x-t)}p(t)dt = e^{-\beta x}\int_{-a}^{a} e^{\beta t}p(t)dt = Ce^{-\beta x};$$

$$k_2^-(x) = \int_{-a}^{a} e^{\beta(x-t)}p(t)dt = e^{\beta x}\int_{-a}^{a} e^{-\alpha t}p(t)dt = De^{\beta x},$$

где A, B, C, D – неизвестные константы.

Так как функции $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны на всей действительной оси, то $\lim\limits_{x\to a+0} k_1^+(x) = g_0(a)$; $\lim\limits_{x\to -a-0} k_2^-(x) = f_0(-a)$, откуда

$$\begin{cases} Ae^{-\alpha a} = g_0(a) \\ De^{-\beta a} = f_0(-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = g_0(a)e^{\alpha a} \\ D = f_0(-a)e^{\beta a} \end{cases}.$$

Введем функцию $\varphi_1(t) = \begin{cases} p(t), & t\in[-a,a] \\ 0, & t\notin[-a,a] \end{cases}$. Тогда (16) и (17) эквивалентны соответственно следующим интегральным уравнениям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x-t|}\varphi_1(t)dt = g(x), \qquad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|x-t|}\varphi_1(t)dt = f(x). \qquad (19)$$

Преобразовав по Фурье левую и правую части (18) и (19), получим соответственно следующие два функциональных уравнения:

$$\frac{2\alpha}{z^2+\alpha^2}P(z)=G^+(z)+\Phi^-(z)-\frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz-\alpha}+\frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}, \tag{20}$$

$$\frac{2\beta}{z^2+\beta^2}P(z)=\Phi^+(z)+F^-(z)-\frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz-\beta}+\frac{De^{-(iz+\beta)a}}{iz+\beta}, \tag{21}$$

где

$$P(z)=\int_{-a}^{a}p(t)e^{izt}dt\ ,\quad \Phi^-(z)=\int_{-a}^{0}\varphi^-(x)e^{izx}dx\ ,\quad \Phi^+(z)=\int_{0}^{a}\varphi^+(x)e^{izx}dx,$$

$G^+(z)=\int_0^a g_0(x)e^{izx}dx$, $F^-(z)=\int_{-a}^{0} f_0(x)e^{izx}dx$. Исключив $P(z)$ из уравнений (20) и (21), получим

$$\frac{2\beta}{z^2+\beta^2}\left[G^+(z)+\Phi^-(z)-\frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz-\alpha}+\frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}\right]=$$
$$=\frac{2\alpha}{z^2+\alpha^2}\left[\Phi^+(z)+F^-(z)-\frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz-\beta}+\frac{De^{-(iz+\beta)a}}{iz+\beta}\right]. \tag{22}$$

Преобразуем (22) к виду

$$\Phi^-(z)+\frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}-\frac{\alpha(z^2+\beta^2)F^-(z)}{\beta(z^2+\alpha^2)}+\frac{\alpha D(iz-\beta)e^{-(iz+\beta)a}}{\beta(z^2+\alpha^2)}=$$
$$=\frac{\alpha(z^2+\beta^2)}{\beta(z^2+\alpha^2)}\left[\Phi^+(z)-\frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz-\beta}\right]-G^+(z)+\frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz-\alpha}. \tag{23}$$

Левая часть (23) есть мероморфная функция с полюсами в точках $z_1=i\alpha$ и $z_2=-i\alpha$, которая исчезает на бесконечности в нижней замкнутой полуплоскости и принадлежит пространству L_2 на вещественной оси. В свою очередь правая часть (23) есть мероморфная функция с полюсами в тех же точках, которая исчезает на бесконечности в верхней замкнутой полуплоскости и также принадлежит пространству L_2 на вещественной оси. Следовательно, уравнение (23) можно свести к следующим двум уравнениям:

$$\Phi^-(z)+\frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}-\frac{\alpha(z^2+\beta^2)F^-(z)}{\beta(z^2+\alpha^2)}+\frac{\alpha D(iz-\beta)e^{-(iz+\beta)a}}{\beta(z^2+\alpha^2)}=\frac{B_1z+C_1}{z^2+\alpha^2}, \tag{24}$$

$$\frac{\alpha(z^2+\beta^2)}{\beta(z^2+\alpha^2)}\left[\Phi^+(z)-\frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz-\beta}\right]-G^+(z)+\frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz-\alpha}=\frac{B_1z+C_1}{z^2+\alpha^2}, \tag{25}$$

где B_1, C_1 – неизвестные константы. Из (24) и (25) выражаем $\Phi^-(z)$ и $\Phi^+(z)$:

$$\Phi^-(z)=-\frac{Be^{-(iz+\alpha)a}}{iz+\alpha}+\frac{\alpha(z^2+\beta^2)F^-(z)}{\beta(z^2+\alpha^2)}-\frac{\alpha D(iz-\beta)e^{-(iz+\beta)a}}{\beta(z^2+\alpha^2)}+\frac{B_1z+C_1}{z^2+\alpha^2}, \tag{26}$$

$$\Phi^+(z)=\frac{\beta(z^2+\alpha^2)}{\alpha(z^2+\beta^2)}\left[G^+(z)-\frac{Ae^{(iz-\alpha)a}}{iz-\alpha}+\frac{B_1z+C_1}{z^2+\alpha^2}\right]+\frac{Ce^{(iz-\beta)a}}{iz-\beta}. \tag{27}$$

Левая часть (26) есть целая функция, следовательно, правая часть (26) не должна иметь особенности в точках $z_1=i\alpha$, $z_2=-i\alpha$, из тех же соображений правая часть (27) не должна иметь особенности в точках $z_3=i\beta$, $z_4=-i\beta$, т. е. относительно неизвестных констант B, C, B_1, C_1 должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} -2\alpha\beta B + a(\beta^2-\alpha^2)F^-(i\alpha) + \alpha D(\alpha+\beta)e^{(\alpha-\beta)a} + i\alpha\beta B_1 + \beta C_1 = 0 \\ a(\beta^2-\alpha^2)F^-(-i\alpha) - \alpha D(\alpha-\beta)e^{-(\alpha+\beta)a} - i\alpha\beta B_1 + \beta C_1 = 0 \\ \beta(\alpha^2-\beta^2)G^+(i\beta) + \beta(\alpha-\beta)Ae^{-(\beta+\alpha)a} + i\beta^2 B_1 + \beta C_1 = 0 \\ \beta(\alpha^2-\beta^2)G^+(-i\beta) + \beta(\alpha+\beta)Ae^{(\beta-\alpha)a} - i\beta^2 B_1 + \beta C_1 - 2\alpha\beta C = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Подставляем $\Phi^-(z)$ в (20) либо $\Phi^+(z)$ в (21). Имеем

$$P(z) = \frac{z^2+\alpha^2}{2\alpha}G^+(z) + \frac{z^2+\beta^2}{2\beta}F^-(z) + \frac{A(iz+\alpha)}{2\alpha}e^{(iz-\alpha)a} - \\ - \frac{D(iz-\beta)}{2\beta}e^{-(iz+\beta)a} + \frac{B_1 z + C_1}{2\alpha}. \tag{29}$$

В силу того что однородная задача (1) и (2) имеет нулевое решение, возможны два случая:

1. Из условий (28), а также из условия принадлежности правой части (29) классу E_a значения констант B, C, B_1, C_1 определяются однозначно. Тогда исходная задача (14) и (15) разрешима и имеет единственное решение, которое находится по функции $P(z)$ с помощью обратного преобразования Фурье.

2. Не существует таких значений констант B, C, B_1, C_1, при которых выполняются условия (28) и условие принадлежности правой части (29) классу E_a. Тогда исходная задача (14) и (15) не имеет решения.

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., 1964. С. 25.

Поступила в редакцию 27.02.2002.

Юрий Григорьевич Рулинский – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций И.Л. Васильев.

УДК 517.9

Д.Е. РИНГЕЛЬ

МНЕМОЧИСЛА И МНЕМОВЕКТОРЫ. I

To study the rings of mnemonumbers we introduce the mnemofication functor from the category of normed spaces over non-trivially normed field into the category of ultra-metric Banach modules over ring of mnemonumbers. We found a complete non-trivially normed subfield in the ring of mnemonumbers isomorphic to the field of formal power series with coefficient in the basic field, so the ring of mnemonumbers is Banach algebra over it and corresponding modules are Banach spaces.

Нелинейные обобщенные функции впервые возникли в работах Ж.Ф. Коломбо [1] в связи с проблемой умножения распределений. Затем Ю.В. Егоров [2] ввел свое пространство "новых обобщенных функций". А.Б. Антоневичем и Я.В. Радыно [3–4] был предложен общий метод (с помощью регуляризаций) построения алгебр, содержащих заданные векторные пространства, и были введены термины "мнемофункции" и "мнемочисла" (константные мнемофункции). Дальнейшая история вопроса изложена в работе [5]. Мы изучаем мнемочисла, обобщающие алгебру мнемочисел Радыно.

Ультранормированное кольцо мнемочисел, ультранормированный модуль мнемовекторов

Пусть $X=s(\mathbf{K})$ – алгебра последовательностей элементов из нетривиально нормированного поля $(\mathbf{K},|\cdot|)$ с покомпонентными операциями, $X_0=l_\infty(\mathbf{K})$ – подалгебра ограниченных последовательностей. Зафиксируем "бесконечно