

гов неравенств (8) и (9) для $\mathcal{M}_k(t)$ в нормах пространств $W^{2m-4-2i}(t)$ и $W^{2m-3-2i}(t)$, интерполяционных неравенств (10) и леммы Гронуолла выводятся неравенства

$$c_9 \|v\|_m^2 \leq \sum_{k=1}^m \|\bar{\mathcal{M}}_k(t)v\|_{m-1}^2 + \sum_{j=0}^{m-2} |^\ell_j v|_{(2m-4-2i)(0)}^2, \quad c_9 > 0,$$

которые означают, что $v \in E^m$, так как уже $v \in E^{m-1}$. Используя этот факт, неравенства (8) – (10) и лемму Гронуолла, аналогично можно вывести неравенства

$$c_{10} \|u\|_m^2 \leq \sum_{k=1}^m \|\bar{L}_k^{(1,m)} u\|_{0,m}^2 \quad \forall u \in E^m, \quad c_{10} > 0, \quad (13)$$

где $\|\cdot\|_{0,m}$ – эрмитовы нормы гильбертовых пространств $E^{0,m}$. Из неравенств (13) следует, что вышенайденное решение $u \in E^m$. Попутно отсюда индукцией по m находим, что

$$u = \bar{L}_m^{-1} \mathfrak{Z} = \bar{M}_1^{-1} \dots \bar{M}_m^{-1} \mathfrak{Z} \in E^m \quad \forall \mathfrak{Z} \in F^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Замечание. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшими частями

$$\mathcal{L}_m(t)u + \sum_{k=0}^{m-1} B_k(t) \frac{d^k u}{dt^k} = f, \quad t \in]0, T[, \quad m = 1, 2, \dots,$$

если $B_k(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(W^{2m-1-2k}(t), H))$, $0 \leq k \leq m-1$.

1. Ломовцев Ф. Е. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2. С. 78.
2. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132.
3. Там же. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.

Поступила в редакцию 02.05.2001.

Федор Егорович Ломовцев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики.

УДК 517.984

М.В. МАРТОН

СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ФРЕДГОЛЬМА, ВЕЙЛЯ И БРАУДЕРА ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

In this paper the essential spectra of weighted shift operators are investigated in Banach algebra $B(I_1)$. For this operator four cases are considered and, depending on cases, submissions for essential spectra are received.

В работе исследуется проблема нахождения существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера оператора взвешенного сдвига в банаховой алгебре ограниченных линейных операторов $B(I_1)$.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор взвешенного сдвига T , задаваемый следующей формулой:

$$T(x_1, x_2, \dots) := (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots), \quad x = (x_k) \in I_1, \quad (1)$$

где (a_k) – последовательность весов такая, что $a_k \in \mathbb{C}$, $\sup\{|a_k|: k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Исследования спектра, существенных спектров оператора, действующего на пространстве I_1 , отличаются от случая операторов, определенных на l_p , $1 < p < \infty$, так как банахово пространство I_1 нереплексивно.

Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определяемые полуфредгольмовыми и фредгольмовыми характеристиками оператора $T - \lambda I$: $\Phi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : R(T - \lambda I) = R(T - \lambda I), \text{ nul}(T - \lambda I) < \infty, \text{ def}(T - \lambda I) < \infty\}$, $\Phi_0(T) := \{\lambda \in \Phi(T) : \text{ind}(T - \lambda I) = 0\}$, $B(T) := \{\lambda \in \Phi_0(T) : \text{проколота́я окрестность точки } \lambda \text{ лежит в резольвентном множестве } \rho(T)\}$, где $\text{nul}(T) := \dim \text{Ker}(T)$, $\text{def}(T) := \dim I_1 / R(T)$, $\text{ind}(T) := \text{nul}(T) - \text{def}(T)$.

Существенные спектры можно определять разными способами, один из которых в определенном смысле упорядочивает изучаемые существенные спектры и связан с описанием различных фредгольмовых свойств оператора. *Существенным спектром Фредгольма* оператора T , обозначенного через $\sigma_{ef}(T)$, *существенным спектром Вейля* $\sigma_{ew}(T)$ и *существенным спектром Браудера* $\sigma_{eb}(T)$ называются подмножества, которые определяются следующим образом: $\sigma_{ef}(T) := \mathbb{C} \setminus \Phi(T)$, $\sigma_{ew}(T) := \mathbb{C} \setminus \Phi_0(T)$, $\sigma_{eb}(T) := \mathbb{C} \setminus B(T)$. Очевидно, что рассматриваемые существенные спектры удовлетворяют следующим включениям: $\sigma_{ef}(T) \subset \sigma_{ew}(T) \subset \sigma_{eb}(T) \subset \sigma(T)$. (Подробнее об этих обозначениях и различных свойствах описанных множеств и спектров смотри, например, в работе [1].)

Будем говорить, что оператор T имеет левый обратный, который обозначим через T^{-1} , если из $Tx=0$ следует $x=0$, т. е. если T – взаимно однозначное отображение I_1 на область значений $R(T)$. Будем различать следующие возможности для $R(T)$ и T^{-1} : I. $R(T)=I_1$; II. $R(T) \neq I_1$, но $\overline{R(T)} = I_1$; III. $\overline{R(T)} \neq I_1$; и соответственно 1. $\exists T^{-1}$ и ограничен; 2. $\exists T^{-1}$ и неограничен; 3. T^{-1} не существует. Таким образом, каждый оператор попадает в один из девяти непересекающихся классов, определяемых тремя возможностями для его области значений и его левого обратного. *Состоянием оператора* называются описанные классы, которые обозначаются с помощью римских и арабских цифр рассмотренной классификации. Например, если оператор $T \in I_1$, т. е. $R(T)=I_1$, и $T \in 3$, т. е. T^{-1} не существует, тогда $T \in I_3$ и т. д. В таблице состояний Тейлора – Халберга (см. подробнее работу [1]) фактически собраны теоремы, показывающие в общем случае, какие состояния для оператора и его сопряженного возможны при некоторых ограничениях на пространство, а какие – нет. Для описания тонкой структуры спектра ограниченного линейного оператора из $B(I_1)$ воспользуемся свойствами “состояния оператора $T - \lambda I$ ”. Для этого введем связанные с состояниями оператора спектральные подмножества. Например, спектральное подмножество $\Pi_3(T)$ по определению означает $\Pi_3(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \in \Pi_3\}$ и т. д. В общем случае спектр оператора, действующего в банаховом пространстве, содержит объединение следующих шести спектральных подмножеств: $\sigma(T) = I_3(T) \cup \Pi_3(T) \cup \Pi_3(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T)$. Для исследования спектра оператора взвешенного сдвига T целесообразно в зависимости от последовательности весов a_k рассмотреть следующую классификацию:

- а) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf |a_k| > 0$;
- б) $\forall k, a_k \neq 0$ и $\inf |a_k| = 0$;
- в) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k конечно;
- г) $\exists a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k бесконечно.

Отметим, что в работе [2] описана тонкая структура спектра оператора взвешенного сдвига в банаховом пространстве I_1 , когда множество $\{\inf |a_k|\}$ отделено от нуля, – это случай а), а в статье [3] вычислен аппроксимативно точечный спектр оператора взвешенного сдвига в гильбертовом простран-

в l_2 . В работе [4] доказана теорема о связи существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера с тонкой структурой спектра оператора взвешенного сдвига T из $B(l_1)$ при различных условиях на веса a_k . Для дальнейшего изучения существенных спектров нам понадобится следующая

Теорема 1 [4]. Пусть T – ограниченный оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Тогда для существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера оператора T справедливы следующие равенства в терминах спектральных подмножеств:

1. Если веса удовлетворяют условию г), то $\sigma_{ef}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$, если веса удовлетворяют вариантам а), б) и в) при $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_2(T)$, если веса удовлетворяют варианту в) при $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$, где a_k – последний нулевой вес.

2. Если веса удовлетворяют условию г), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{ew}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$, если условию б), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_2(T)$, если условию а), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T)$, если условию в), то $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$.

Известно [2], что спектр оператора взвешенного сдвига T из $B(l_1)$ есть замкнутый круг, т. е. $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где спектральный радиус r_σ , вычисляемый так же, как в случае гильбертова пространства l_2 (см. пример № 77 в [5]), равен:

$$r_\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|T^k\|)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq 1} |a_m \dots a_{m+k-1}|)^{1/k}.$$

Лемма 1. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условиям б) и г), то $\sigma_{ef}(T) = \sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}$.

Доказательство. Эти равенства следуют из теоремы 1 и из представления для спектра оператора взвешенного сдвига $\sigma(T) = \Pi_2(T) \cup \Pi_1(T) \cup \Pi_2(T) \cup \Pi_3(T)$. В случае когда веса удовлетворяют условию г), для доказательства используется лемма 3 работы [4], в которой показано, что спектральные подмножества $\Pi_1(T)$ и $\Pi_2(T)$ пустые. Если веса удовлетворяют условию б), то используются леммы 1 и 2 статьи [4], в которой показано, что спектральные подмножества $\Pi_1(T)$ и $\Pi_3(T)$ пустые.

Лемма 2. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(l_1)$, задаваемый формулой (1). Пусть веса a_k удовлетворяют условию в), тогда:

1. Для существенного спектра Фредгольма справедливы следующие равенства: если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, где a_k – последний нулевой вес, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, а если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \cup \{0\}$.

2. Для существенных спектров Вейля и Браудера справедливо равенство $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где

$$r_2 = \sup_{n \geq 1} (\inf_{m \geq j+2} |a_m \dots a_{m+n-1}|)^{1/n}, \quad (2)$$

а $j = \max\{k \geq 1: a_k = 0\}$.

Доказательство. Из теоремы 1 и представления для спектра оператора T , а также из леммы 2 работы [4] получаем, что если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \sigma(T) \setminus \{\Pi_1(T) \cup \{0\}\}$, а если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \sigma(T) \setminus \Pi_1(T)$ и, кроме того, $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T)$. Опишем спектральное подмножество $\Pi_1(T)$. Из диаграммы состояний Тейлора – Халберга для спектра ограниченного оператора на комплексном банаховом пространстве (см., например, рис. 1.2 в [1]) следует, что $\lambda \in \Pi_1(T)$ равносильно тому, что $\lambda \in I_3(T')$, где $T': l_1 \rightarrow l_1$ –

оператор, сопряженный к оператору T и задаваемый следующей формулой:
 $T'(x_1, x_2, \dots) := (a_1 x_2, a_2 x_3, \dots)$.

Рассмотрим множество состояний $\Pi(T)$. Условие $\lambda \in \Pi(T)$ равносильно тому, что $\lambda \in \mathcal{Z}(T')$. Нетрудно видеть, что $0 \in \sigma_p(T')$, т. е. $0 \in \mathcal{Z}(T')$. Рассмотрим равенство $(T' - \lambda I)x = 0$ для $\lambda \neq 0$, которое можно записать в виде: $a_1 x_2 - \lambda x_1 = 0$, $a_2 x_3 - \lambda x_2 = 0, \dots$. Из этих равенств следует, что если $a_j = 0$, где $j = \max\{k \geq 1: a_k = 0\}$, то $x_k = 0$ для $1 \leq k \leq j$. Пусть $x_{j+1} = \xi \in C$, тогда $x_{j+2} = (\lambda/a_{j+1})\xi$, $x_{j+3} = (\lambda^2/(a_{j+1}a_{j+2}))\xi, \dots$, $x_k = (\lambda^{k-j-1}/(a_{j+1} \dots a_{k-1}))\xi$, $k \geq j+2$. Таким образом, для вектора x , являющегося формальным решением уравнения $(T' - \lambda I)x = 0$, получено представление следующего вида: $x = (0, \dots, 0, \xi, (\lambda/a_{j+1})\xi, \dots, (\lambda^{k-j-1}/(a_{j+1} \dots a_{k-1}))\xi, \dots)$. Для того чтобы вектор $x \in \text{Ker}(T' - \lambda I)$, необходимо и достаточно, чтобы $x \in l_\infty$, т. е. $\sup(|\lambda|^{k-j-1}/|a_{j+1} \dots a_{k-1}|) < \infty$, а это неравенство равносильно тому, что

$$|\lambda| < \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{k \geq j+2} |a_{j+1} \dots a_{k-1}|^{1/k}.$$

Рассмотрим теперь подмножество состояний $\Pi_1(T)$. Пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \Pi(T)$. Условие $\lambda \in \Pi_1(T)$ равносильно тому, что $\lambda \in I(T')$, или, другими словами, $R(T' - \lambda I) = l_\infty$. Для вектора $x = (x_1, x_2, \dots)$ обозначим $Pr_j(x) = (x_1, \dots, x_j, 0, 0, \dots)$ – проектор на подпространство с первыми ненулевыми координатами. Так как $l_\infty = Pr_j(l_\infty) \oplus (I - Pr_j)(l_\infty)$, то условие $R(T' - \lambda I) = l_\infty$ равносильно следующим двум равенствам:

$$Pr_j(l_\infty) = Pr_j(R(T' - \lambda I)), \quad (3)$$

$$(I - Pr_j)(l_\infty) = (I - Pr_j)(R(T' - \lambda I)). \quad (4)$$

Рассмотрим равенство (3), которое представляет собой систему: $a_1 x_2 - \lambda x_1 = y_1$, $a_2 x_3 - \lambda x_2 = y_2, \dots, a_{j-1} x_j - \lambda x_{j-1} = y_{j-1}, -\lambda x_j = y_j$, так как вес $a_j = 0$. Эта система характеризуется матрицей с ненулевым определителем и, таким образом, равенство (3) справедливо. Что касается изучения соотношения (4), то для удобства сделаем переиндексацию, заменим $(1+j)$ на 1. Тогда равенство (4) запишется в виде: $R(T' - \lambda I) = l_\infty$ и будет равносильно системе вида: $a_1 x_2 - \lambda x_1 = y_1$, $a_2 x_3 - \lambda x_2 = y_2, \dots, a_{k-1} x_k - \lambda x_{k-1} = y_{k-1}, \dots$. Пусть $x_1 = \xi \in C$, тогда $x_2 = (\lambda/a_1)\xi + y_1/a_1$, $x_3 = (\lambda^2/(a_1 a_2))\xi + ((\lambda/(a_1 a_2))y_1 + (1/a_2)y_2), \dots$ и координата x_k имеет следующее представление: $x_k = (\lambda^k/(a_1 \dots a_{k-1}))\xi + \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} y_{i-1}$. Перепишем эти равен-

ства в векторном виде $x = x^0 + z(y)$, где $x_k^0 = (\lambda^k/(a_1 \dots a_{k-1}))\xi$, а $z_k(y) = \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} y_{i-1}$. Так как $\lambda \in \Pi(T)$, то $x^0 \in l_\infty$ и условие $R(T' - \lambda I) = l_\infty \Leftrightarrow$

$z(y) \in l_\infty \Leftrightarrow \sup_{k \geq 2} \left| \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} y_{i-1} \right| < \infty$. Возвращая старые индексы, получаем окон-

чательное условие, когда вектор $z(y) \in l_\infty$: $\sup_{k \geq 2+j} \left| \sum_{i=2}^k \frac{\lambda^{k-i}}{a_{i-1} \dots a_{k-1}} y_{i-1} \right| < \infty$. Нетрудно

видеть, что $\{0\} \in \Pi_3(T)$. Можно показать, что если $\lambda_1 \in \Pi_1(T)$, то λ такое, что $|\lambda| < |\lambda_1|$ тоже лежит в спектральном подмножестве $\Pi_1(T)$. Так как $\Pi_1(T)$ – открытое множество (см. [1] или [2]), то спектральное подмножество $\Pi_1(T)$ имеет вид:

$$\Pi_1(T) = \{\lambda \in C: 0 < |\lambda| < r_2\}, \quad (5)$$

где $r_2 = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \Pi_1(T)\}$.

Отметим, что в статье [2] для вычисления множества $\Pi_1(T)$ используется минимальный модуль $\mu(T)$, и в случае, когда среди весов нет нулей, это – условия а) и б), справедливо равенство $r_2 = \sup\{(\mu(T^n))^{1/n}, n \geq 1\}$. Обобщая это равенство на случай, когда среди весов есть конечное число нулевых, это – условие в), получаем формулу (2) для r_2 . Из формул (5) и (2) следует необходимое представление для множества $\Pi_1(T)$ и, таким образом, для существенного спектра $\sigma_{ef}(T)$.

Лемма 3. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(I_1)$, задаваемый формулой (1). Если веса a_k удовлетворяют условию а), то тогда существенный спектр Фредгольма равен $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: r_2' \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, а существенные спектры Вейля и Браудера совпадают и равны $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где

$$r_2' = \sup_{n \geq 1} \left(\inf_{m \geq 2} |a_m \dots a_{m+n-1}| \right)^{1/n}. \quad (6)$$

Доказательство. Эти утверждения следуют из теоремы 1, представления для спектра оператора T , а также из леммы 2 работы [2], в которой показано, что спектральное подмножество $\Pi_3(T)$ пустое. Таким образом, $\sigma_{ef}(T) = \sigma(T) \setminus \Pi_1(T)$, а $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T)$. Спектральное подмножество $\Pi_1(T)$ находится так же, как в лемме 2, с заменой r_2 на r_2' , определенной по формуле (6). Из найденных формул для спектрального подмножества $\Pi_1(T)$ получаем искомое равенство для $\sigma_{ef}(T)$.

С учетом теоремы 1 и лемм 1–3 можно сформулировать основную теорему о существенных спектрах Фредгольма, Вейля и Браудера для оператора взвешенного сдвига T из $B(I_1)$.

Теорема 1. Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $B(I_1)$, задаваемый формулой (1). Тогда для существенных спектров Фредгольма, Вейля и Браудера справедливы следующие представления:

1. Если веса удовлетворяют условиям б) и г), то $\sigma_{ef}(T) = \sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где r_σ – спектральный радиус оператора T .

2. Если веса удовлетворяют условию а), то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: r_2' \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где r_2' определяется по формуле (6).

3. Если веса удовлетворяют условию в) при $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, где a_k – последний нулевой вес, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}$, а если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, то $\sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \cup \{0\}$ и $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где r_2 определяется по формуле (2).

В заключение отметим, что в работе [6] для оператора взвешенного сдвига со специальными весами, отделенными по модулю от нуля, найдена тонкая структура спектра оператора в банаховом пространстве l_p , $1 \leq p \leq \infty$, а в статье [7] подсчитан числовой радиус оператора левого взвешенного сдвига в гильбертовом пространстве l_2 . В работах [8], [9] получены формулы для нахождения существенных спектров различных классов ограниченных линейных операторов Чезаро, определенных на банаховом пространстве последовательностей l_p , $1 \leq p \leq \infty$.

1. Еровенко В. А., Северенчук Н. Б. Введение в теорию существенных спектров линейных операторов в банаховых пространствах. Мн., 2000.

2. Gindler H. A., Taylor A. E. // Stud. Math. 1962. Vol. 22. № 1. P. 35.

3. Ridge W. C. // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 147. № 1-2. P. 349.

4. Мартон М. В. // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. 2002. № 2-3. P. 69.

5. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., 1970.

6. Halberg C. Y., Samuelsson A. // Math. Scand. 1971. Vol. 29. № 1. P. 37.

7. Stout Q. F. // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88, № 3. P. 495.

8. Еровенко В. А. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 9. С. 784.

9. Еровенко В. А., Иванов Ю. Г. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 4. С. 9.

Поступила в редакцию 20.02.2002.

Марина Владимировна Мартон – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа В.А. Еровенко.

УДК 517.965+517.96

Ю.Г. РУЛИНСКИЙ

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

The article deals with some type of pair integral equations given on the finite segments. Using the Wiener – Paley theorem, the equations are reduced to functional relations in the classes of entire functions of exponential type.

Пусть $z=x+iy$. Через E_a обозначим класс всех целых функций $F(z)$ таких, что

$$|F(z)| \leq C e^{a|z|}, F(x) \in L_2(-\infty, +\infty).$$

По теореме Винера – Пэли [1] класс E_a совпадает с классом всех целых функций вида:

$$F(z) = \int_{-a}^a f(t) e^{itz} dt, \text{ где } f(t) \in L_2[-a, a].$$

По аналогии с E_a введем два класса целых функций экспоненциального типа:

E_a^+ , состоящий из всех целых функций $\Phi^+(z)$, таких, что

$$\Phi^+(x) \in L_2(-\infty, +\infty), |\Phi^+(x+iy)| \leq M, y > 0; |\Phi^+(x+iy)| \leq M e^{-ay}, y \leq 0.$$

E_a^- , состоящий из всех целых функций $\Phi^-(z)$, таких, что

$$\Phi^-(x) \in L_2(-\infty, +\infty), |\Phi^-(x+iy)| \leq N, y < 0; |\Phi^-(x+iy)| \leq N e^{ay}, y \geq 0.$$

Лемма 1. Не существует целой функции, отличной от нуля, которая одновременно принадлежит обоим классам E_a^+ и E_a^- .

Доказательство леммы 1 основывается на теореме Лиувилля.

С помощью теоремы Винера – Пэли и леммы 1 можно показать, что верны следующие две теоремы.

Теорема 1. Класс E_a^+ совпадает с классом всех целых функций вида:

$$\Phi^+(z) = \int_0^a f(t) e^{itz} dt, \text{ где } f(t) \in L_2[0, a].$$

Теорема 2. Класс E_a^- совпадает с классом всех целых функций вида:

$$\Phi^-(z) = \int_{-a}^0 f(t) e^{itz} dt, \text{ где } f(t) \in L_2[-a, 0].$$

Рассмотрим парные однородные интегральные уравнения первого рода

$$\int_{-a}^a e^{-\alpha|x-t|} p(t) dt = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1)$$

$$\int_{-a}^a e^{-\beta|x-t|} p(t) dt = 0, \quad -a \leq x \leq 0, \quad (2)$$