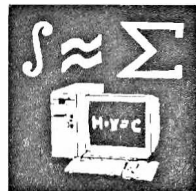


Математика и информатика



УДК 517.51: 517.53

А.П. СТАРОВОЙТОВ

ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАНЫМ ПОРЯДКОМ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

For a fixed sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ of non-negative real numbers strictly decreasing to zero a continuous on $[-1, 1]$ function g is constructed such that $a_n/\sqrt{2} \leq R_{2n}(g) \leq 2a_n$, $n=0, 1, \dots$, where the $R_n(g)$ are the best approximations of g in the uniform norm by rational algebraic functions of degree at most n .

Пусть $C_{[-1, 1]}$ — банахово пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ вещественных функций с равномерной нормой. Через P_n и R_n обозначим соответственно множество всех алгебраических полиномов и рациональных функций с действительными коэффициентами степени не выше n . Для $f \in C_{[-1, 1]}$ и $n=0, 1, 2, \dots$ рассмотрим

$$E_n(f) = \inf \{ \|f - p\| : p \in P_n \}, \quad R_n(f) = \inf \{ \|f - r\| : r \in R_n \}$$

— наилучшие приближения f в $C_{[-1, 1]}$ множествами P_n и R_n . Ниже соотношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$, а запись $\alpha_n \downarrow 0$ предполагает, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает и сходится к нулю. Хорошо известно, например, что $E_n(f) \downarrow 0$ и $R_n(f) \downarrow 0$.

До сих пор не решенной остается следующая проблема, поставленная Е.П. Долженко: “Какой должна быть последовательность $\alpha_n \downarrow 0$, чтобы существовала функция $f \in C_{[-1, 1]}$ такая, что $R_n(f) \asymp \alpha_n$?” [1, с. 317]. При этом будем говорить об эффективном решении проблемы в том случае, когда по заданной последовательности искомая функция построена конструктивно.

Для полиномиальных приближений в силу известной теоремы С.Н. Бернштейна (см. [2, 3]) любая последовательность $\alpha_n \downarrow 0$ является последовательностью наилучших приближений некоторой функции $f \in C_{[-1, 1]}$, т. е. $E_n(f) = \alpha_n$, $n=0, 1, \dots$. Однако решение, предложенное С.Н. Бернштейном, неэффективно. Вот что пишет по этому поводу он сам: “Здесь применяется известный диагональный процесс... Поэтому доказательство существования $f(x)$ является неэффективным. Лишь при некоторых ограничениях, наложенных на закон убывания α_n , мне удалось дать конструктивный метод построения искомой функции $f(x)$ ” [4, с. 249]. К сожалению, полученные С.Н. Бернштей-

ном результаты остались неопубликованными. В дополнение к сказанному можно лишь заметить, что если $\alpha_n \downarrow 0$ строго убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии: $a_{n+1}/a_n > q > 0$, то из установленных С.Н. Бернштейном аппроксимационных свойств аналогов функции Вейерштрасса без производной следует (см. [5, § 8, следствие II]), что функцией $f \in C_{[-1, 1]}$, для которой $E_n(f) \asymp a_n$, является, например,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{3^{k-1}} - a_{3^k}) T_{3^k}(x), \quad (1)$$

где $T_k(x) = \cos k \arccos x$ – многочлены Чебышева.

В случае рациональных приближений первые значительные результаты, относящиеся к сформулированной проблеме, получены А.А. Гончаром: в [6] для произвольной последовательности $\alpha_n \downarrow 0$ найдена непрерывная функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \varepsilon_k}{2^k (x_k - x)}, \quad \varepsilon_k > 0, \quad x_k = 1 + \varepsilon_k,$$

для которой $R_n(f) \leq a_n$, $n=0, 1, \dots$, а в [7] дается эффективный алгоритм для построения $f \in C_{[-1, 1]}$ такой, что $R_n(f) \geq a_n$, $n=0, 1, 2, \dots$. Далее, Е.П. Долженко в [1], рассматривая ряды вида (1), привел пример функции $f \in C_{[-1, 1]}$, для которой $R_n(f) \asymp a_n$ при условии, что $\alpha_n \downarrow 0$ убывает не быстрее некоторой геометрической прогрессии. При приближении тригонометрическими рациональными дробями с действительными коэффициентами функций из $C_{2\pi}$ эффективное решение проблемы Е.П. Долженко получено нами [8, 9] (см. также работу А.А. Пекарского [10], где рассматриваются рациональные приближения комплекснозначных функций).

Основным содержанием данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Для любой последовательности $\alpha_n \downarrow 0$, строго убывающей к нулю, существует такая нечетная функция $g \in C_{[-1, 1]}$, что $R_{2n}(g) \asymp a_n$.

В основу конструкции искомой функции, как и в [8, 9], положены алгебраические дроби Чебышева – Маркова, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, 1]$. Без ограничения общности при построении функции g будем считать, что $a_0=1$. В противном случае следует рассматривать последовательность $1, a_1/a_0, a_2/a_0, \dots$. Определим три бесконечно малые последовательности положительных чисел

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n, \quad \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n\}, \quad (2)$$

$$\beta_n = \frac{\varepsilon_1}{5} \cdot \frac{\varepsilon_2}{5} \cdot \dots \cdot \frac{\varepsilon_n}{5}, \quad n=1, 2, \dots$$

В [10] установлена следующая

Лемма 1. Последовательность $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:

$$1 > \beta_j > \beta_{j+1} > 0, \quad j=1, 2, \dots,$$

$$\sum_{j=l+1}^{\infty} \beta_j / \beta_l < \frac{1}{4} \varepsilon_{l+1}, \quad \sum_{j=1}^{l-1} \beta_l / \beta_j < \frac{1}{4} \varepsilon_l.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $z_k = i\beta_k$, $k=1, 2, \dots, n$ и, взяв каждую точку z_k с кратностью 2, построим синус-дробь Бернштейна [11, гл. 1, § 1]

$$N_{2n}(y) = \sin \Phi_{2n}(y) = \frac{y P_{2n-2}(y)}{\prod_{k=1}^n (y^2 + \beta^2)}, \quad (3)$$

где $P_{2n-2}(y)$ – четный полином порядка $2n-2$, а

$$\Phi_{2n}(y) = 2 \sum_{k=1}^n \arg(z_k - y).$$

Лемма 2. Пусть $\lambda_{2k,l} = N_{2k}(\beta_l)$. Тогда

$$|\lambda_{k,l}| < \frac{1}{2} \varepsilon_l \text{ при } l > k,$$

$$|\lambda_{k,l} - (-1)^l| < \frac{1}{2} \varepsilon_l \text{ при } l \leq k.$$

Доказательство леммы 2 имеется в [8].

Теперь нужную синус-дробь Чебышева – Маркова получим как частный случай дробей Бернштейна, положив в (3) $x = (1-y^2)/(1+y^2)$. Тогда (см. [11, гл. 2, § 1, равенство (9)]) будем иметь

$$v_n(x) = \sin \varphi_{2n}(x) = \sin \Phi_{2n}(y) = \sqrt{1-x^2} \frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^n (1-c_j x)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами, а $c_k = (1-\beta_k^2)/(1+\beta_k^2)$, $k=1, 2, \dots, n$. С учетом замены и последних равенств следует, что

$$0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots < 1 \text{ и } v_k(c_l) = \lambda_{k,l}, \quad k=1, 2, \dots; \quad l=1, 2, \dots$$

В банаховом пространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей $t=(t_0, t_1, t_2, \dots)$ с нормой $\|t\|_{c_0} = \sup\{|t_n|: n=0, 1, 2, \dots\}$ определим множество

$$K = \{t: 0 \leq t_k \leq \varepsilon_{k+1}; \quad k=0, 1, 2, \dots\}.$$

Если $t=(t_0, t_1, t_2, \dots) \in K$, то, полагая $\Delta t_k = t_{k-1} - t_k$, рассмотрим функцию из $C_{[-1, 1]}$

$$h_t(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) v_k(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \sqrt{1-u^2} \frac{P_{k-1}(u)}{\prod_{j=1}^k (1-c_j u)}.$$

Лемма 3. При всех $t \in K$ справедливы неравенства

$$(-1)^l h_t(c_l) \geq a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l, \quad l=1, 2, \dots$$

Доказательство. При $l=1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} h_t(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) v_k(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} (\Delta a_k + \Delta t_k) \lambda_{k,l} + \sum_{k=l}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) (\lambda_{k,l} - (-1)^l). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in K$, то $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$. Поэтому, используя лемму 2, получим

$$|h_t(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1})| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l (a_0 + t_0) < \varepsilon_l.$$

Лемма доказана.

Для каждого $t \in K$ и $x \in [-1, 1]$ определим функцию

$$f_t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \frac{x P_{k-1}(1-x^2)}{\prod_{j=1}^k (1-c_j(1-x^2))}. \quad (4)$$

Ряд в (4) для всех $x \in [-1, 1]$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k)$, а его члены – непрерывные функции на отрезке $[-1, 1]$.

Поэтому при любом $t \in K$ f_t является нечетной функцией из $C_{[-1, 1]}$. При этом для $x \in [0, 1]$

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} h_t(1-x^2) .$$

Покажем, что для всех $t \in K$ справедливы неравенства

$$\frac{a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}} \leq R_{2n}(f_t) \leq a_n + t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Действительно, так как $|\nu_k(x)| = |\sin \varphi_{2k}(x)| \leq 1$ и $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$, то для всех $x \in [-1, 1]$

$$\left| f_t(x) - \sum_{k=1}^n (\Delta a_k + \Delta t_k) \frac{x P_{k-1}(1-x^2)}{\prod_{j=1}^k (1-c_j(1-x^2))} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) |\nu_k(1-x^2)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) = a_n + t_n .$$

Таким образом, оценка сверху в (5) доказана.

Для доказательства оценки снизу воспользуемся частным случаем теоремы Валле Пуссена [12, гл. 2, § 31]. В точках $u_l = \sqrt{1-c_l}$, $l=1, 2, \dots, n+1$ согласно лемме 3

$$(-1)^l f_t(u_l) = \frac{1}{\sqrt{2-u_l^2}} (-1)^l h_t(c_l) \geq \frac{a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l}{\sqrt{2}} .$$

Поэтому с учетом нечетности функции f_t на отрезке $[-1, 1]$ имеются $2n+2$ точки

$$u_1 = -\sqrt{1-c_1}, u_2 = -\sqrt{1-c_2}, \dots, u_{n+1} = -\sqrt{1-c_{n+1}},$$

$$u_{n+2} = \sqrt{1-c_{n+1}}, u_{n+3} = \sqrt{1-c_n}, \dots, u_{2n+2} = \sqrt{1-c_1},$$

в которых f_t принимает значения с чередующимися знаками. Следовательно,

$$R_{2n}(f_t) \geq \min \left\{ \frac{a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l}{\sqrt{2}} : l = 1, 2, \dots, n+1 \right\} = \frac{a_n + t_n - \varepsilon_{n+1}}{\sqrt{2}},$$

и нижняя оценка в (5) доказана.

Теперь, полагая $g = f_{t^*}$, где $t^* = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots) \in K$, и учитывая (5) и (2), окончательно получим

$$\frac{a_n}{\sqrt{2}} \leq R_{2n}(g) \leq 2a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема доказана.

На самом деле при доказательстве теоремы построено несчетное множество функций, удовлетворяющих ее условию. Более того, при дополнительных условиях в силу эффективности построения искомой функции на последовательность $\alpha_n \downarrow 0$ можно гарантировать и некоторые другие ее свойства. Например, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то g является абсолютно непрерывной на $[-1, 1]$.

1. Долженко Е. П. // Мат. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313.
2. Бернштейн С. Н. // С. R. Acad. Sc. 1938. Vol. 206. P. 1520.
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
4. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: В 4 т. М., 1954. Т. 2.
5. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. М.; Л., 1937.

6. Гончар А. А. // ДАН СССР. 1955. Т. 100. № 2. С. 13.
7. Гончар А. А. // Мат. сб. 1967. Т. 72(114). № 3. С. 489.
8. Старовойтов А. П. // Мат. заметки. 2001. Т. 69. Вып. 6. С. 919.
9. Старовойтов А. П. // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 145.
10. Пекарский А. А. // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1994. № 1. С. 23.
11. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
12. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.

Поступила в редакцию 14.01.2002.

Александр Павлович Старовойтов – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики и математической физики.

УДК 517.955

Ф.Е. ЛОМОВЦЕВ

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

The correct strong solvability of the Cauchy problems for factorized differential equations with variable domains of operator coefficients is proved. The formula of their strong solutions

$u = \overline{M_1}^{-1} \dots \overline{M_m}^{-1} \mathfrak{Z}$ is obtained.

Функциональным методом из [1] докажем корректную сильную разрешимость задач Коши для факторизованных дифференциальных уравнений с переменными областями определения операторных коэффициентов и выведем формулу их сильных решений (14).

1. Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)$ и нормой $|\bullet|$ рассматриваются задачи Коши (ЗК):

$$\mathcal{L}_m(t)u \equiv (d/dt + A_m(t)) \cdots (d/dt + A_1(t))u = f, \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

$$\ell_j u \equiv d^j u / dt^j \Big|_{t=0} = \varphi_j \in H, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где u, f – функции t со значениями в H , $A_k(t)$ – линейные положительные самосопряженные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$.

I. Операторы $A_k(t)$, $t \in [0, T[$, являются сужениями на $D(A_k(t))$ линейных операторов $\tilde{A}_k(t)$ в H с не зависящими от t областями определения $D(\tilde{A}_k)$.

II. Области определения $D(A_k^m(t))$ степеней $A_k^m(t)$ плотны в H , $1 \leq k \leq m$; эквивалентны нормы: $|A_s(t)u| \sim |A_k(t)u| \sim |A_s(t)u - A_k(t)u|$ для $\forall u \in D(A_k(t))$, $\forall t \in [0, T[$, $1 \leq s \neq k \leq m$; и существуют постоянные $c_{s,k} \geq 0$, что

$$|A_s(t)A_k(t)v - A_k(t)A_s(t)v|_{\alpha(t)} \leq c_{s,k} |v|_{(\alpha+2)(t)} \quad \forall v \in W^{\alpha+4}(t), \quad t \in [0, T[,$$

$$\alpha \leq 2m-4, \quad s \neq k, \quad (3)$$

где гильбертовы пространства $W^\alpha(t)$ – области определения $D(A_1^{\alpha/2}(t))$ степеней $A_1^{\alpha/2}(t)$, наделенные эрмитовыми нормами $|v|_{\alpha(t)} = |A_1^{\alpha/2}(t)v|$, $\alpha \leq 2m$.

III. Существуют линейные положительные самосопряженные операторы $B(t)$, $t \in [0, T[$, в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$, у которых обратные $B^{-1}(t)$, $A_k(t)B^{-1}(t)$ и их сильная производная $dB^{-1}(t)/dt$ из $L_\infty([0, T[, \mathcal{L}(H))$, и равномерно по t существуют пределы: