БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. В. Демидович

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по естественно-научному образованию
в качестве пособия для слушателей подготовительных отделений
учреждений высшего образования

Минск
БГУ
2018

УДК 531/534(075.4)(079.1)

Р е ц е н з е н т ы:
преподаватель высшей категории кафедры физики и математики
Белорусской государственной академии связи *С. В. Корженевская*;
учитель физики первой категории СШ № 125 г. Минска *Е. В. Якубовская*

Демидович, С. В.
Ключевые задачи по физике. Механика [Электронный ресурс] : пособие / С. В. Демидович. – Минск : БГУ, 2018.
ISBN 978-985-566-600-5.

Представлены ключевые задачи по физике по следующим темам: основы кинематики, основы динамики, законы сохранения в механике, гидроаэростатика. Содержание и структура пособия соответствуют учебной программе вступительных испытаний по физике для лиц, поступающих в высшие учебные заведения.

Предназначено для слушателей подготовительного отделения учреждений высшего образования.

УДК 531/534(075.4)(079.1)

ISBN 978-985-566-600-5

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии содержатся задачи по основным разделам физики и механики (около 170 задач вычислительного и графического типа), апробированные в учебном процессе на подготовительном отделении Белорусского государственного университета. Представлены основные формулы, законы, широко используются материалы, имеющиеся в методической литературе, задачниках по физике, список которых приводится в конце пособия. Также включена часть задач, предлагавшихся на централизованном тестировании в 2006–2016 гг.

Порядок расположения заданий соответствует последовательности изложения материала по физике на подготовительном отделении. Имеются ответы к заданиям для самостоятельного закрепления тем.

1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

1.1. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Механическим движением называется изменение взаимного положения тел или частей одного тела в пространстве с течением времени.

Траектория движения – непрерывная линия, которую описывает в пространстве движущаяся точка по отношению к данной системе отсчёта.

Системой отсчёта называется тело отсчёта, жёстко связанная с ним система координат и прибор для измерения времени (часы).

Перемещением $(\vec{r})$ движущейся материальной точки называется вектор, соединяющий её начальное и конечное положение (рис. 1.1).

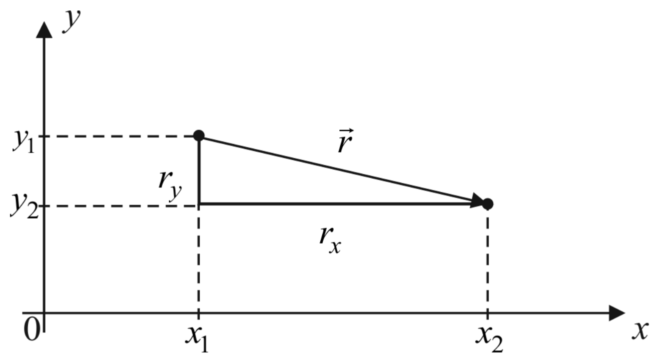


Рис. 1.1

Проекции вектора перемещения на координатные оси OX и OY:

$$r_x = x_2 - x_1;\ r_y = y_2 - y_1, \tag{1.1}$$

где $(x_2; y_2)$, $(x_1; y_1)$ – координаты конечного и начального положения.

Путь (*S*) – это длина участка траектории, пройденного материальной точкой за некоторый промежуток времени.

Длина пути – скалярная положительная величина.

Скорость – векторная физическая величина, равная перемещению тела за единицу времени:

$$\vec{\vartheta} = \frac{\vec{r}}{t}. \tag{1.2}$$

Мгновенная скорость – скорость тела в данный момент времени в данной точке траектории, определяется как отношение достаточно малого перемещения ко времени, за которое это перемещение произошло:

$$\overrightarrow{\vartheta_{м}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}'(t). \tag{1.3}$$

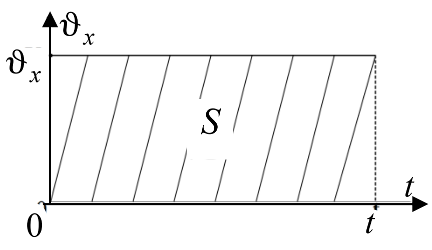
По виду траектории движения различают: прямолинейное движение и криволинейное движение.

Равномерным прямолинейным движением называется движение по прямой с постоянной скоростью, т. е. это такое движение, при котором за любые равные промежутки времени тело совершает одинаковые перемещения.

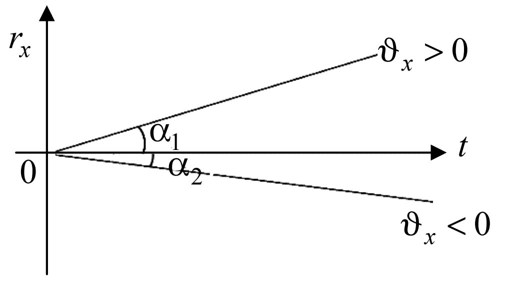
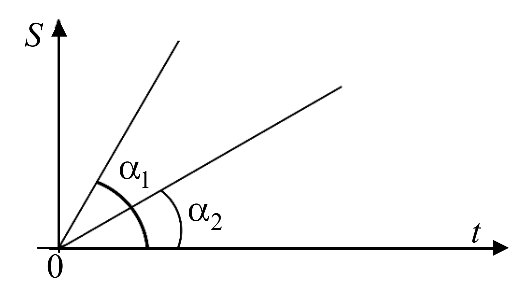
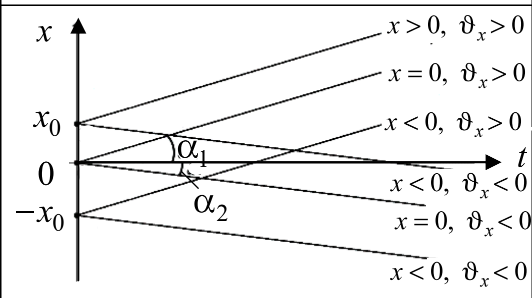
Данный вид движения иногда вызывает затруднения при решении графических задач. Проанализируем графики равномерного прямолинейного движения с помощью табл. 1.1.

Таблица 1.1

Графическое представление равномерного прямолинейного движения

Физическая величина/формула	График	Примечание
Скорость $\vec{\vartheta} = \text{const}$		По данным графика можно определять: ● значение скорости; ● направление движения; ● модуль перемещения и путь, которые численно равны площади фигуры (*S*), ограниченной графиком скорости и осью времени

Окончание табл. 1.1

Физическая величина/формула	График	Примечание
Проекция перемещения $r_x = x - x_0$ $r_x = \vartheta_x \Delta t$		Угловой коэффициент прямой численно равен проекции скорости: $\mathrm{tg}\,\alpha = \vartheta_x$
Путь $S = \vartheta \Delta t$		Угловой коэффициент прямой численно равен значению скорости: $\mathrm{tg}\,\alpha = \vartheta$ $\mathrm{tg}\,\alpha_1 > \mathrm{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow \vartheta_1 > \vartheta_2$
Координата $x = x_0 + \vartheta_x t$ $y = y_0 + \vartheta_y t$		Координата является линейной функцией времени

Рассмотрим решение графических задач на примерах.

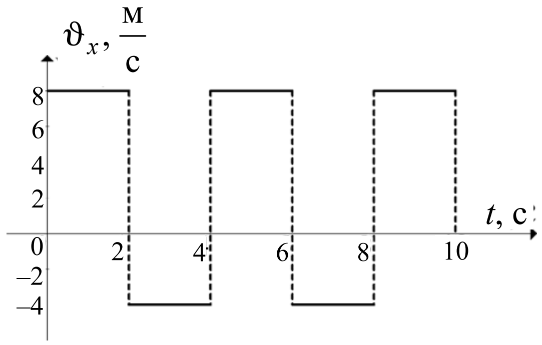
Задача 1

Частица движется вдоль оси *OX*. Из графика зависимости проекции скорости частицы от времени (рис. 1.2, *а*) определяем, что путь, пройденный частицей за промежуток времени $\Delta t = 10$ с, отличается от проекции перемещения в:

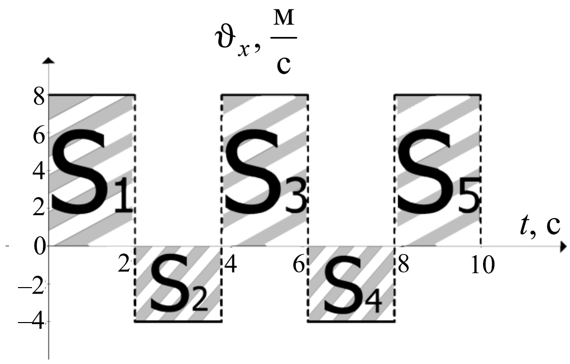
1) $\frac{2}{3}$ раза; 2) $\frac{1}{2}$ раза; 3) 1 раз; 4) $\frac{3}{2}$ раза; 5) 2 раза.

Решение

Как сказано выше, модуль перемещения r и путь S численно равны площадям фигур, ограниченным графиком скорости и осью времени (рис. 1.2, *б*).



а



б

Рис. 1.2

Так как в промежутках времени [2 с; 4 с] и [6 с; 8 с] проекция скорости $\vartheta_x < 0,$ то частица движется противоположно оси *OX*.

Следовательно, путь *S* равен сумме всех площадей:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5,$$

$$S = \ 64 \text{ м};$$

проекция перемещения r_x с учётом направления движения равна

$$r_x = \ S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5,$$

$$r_x = \ 32 \text{ м}.$$

Значит, путь *S*, пройденный частицей за промежуток времени 10 с, отличается от проекции перемещения r_x в 2 раза.

Ответ: 5).

Задача 2

Два одноклассника, попрощавшись на крыльце школы, разошлись по домам в противоположные стороны. Графики зависимости пути от времени представлены на рис. 1.3. Если второй мальчик дойдёт до своего дома, расположенного в 2 раза ближе, чем дом первого, за промежуток времени Δt_2 = 12 мин, то первый – за промежуток времени Δt_1, равный:

1) 3,0 мин; 2) 6,0 мин; 3) 8,0 мин; 4) 12 мин; 5) 18 мин.

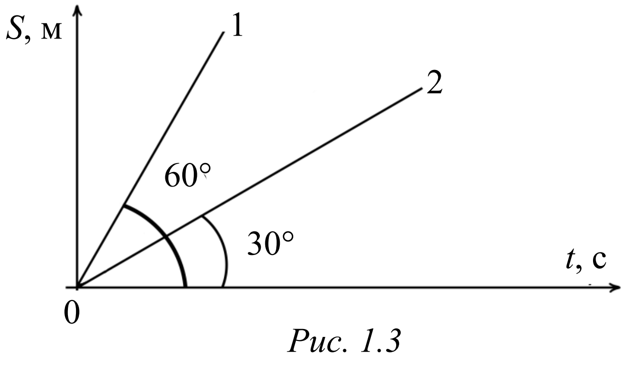


Рис. 1.3

Решение

Анализируя график $S(t)$, знаем, что угловой коэффициент прямой численно равен значению скорости: $\mathrm{tg}\,\alpha = \vartheta$.

Значит, $\mathrm{tg}\,60° = \vartheta_1$ и $\mathrm{tg}\,30° = \vartheta_2$.

По условию задачи

$$S_1 = 2S_2 = \vartheta_1 \Delta t_1,$$

где $S_2 = \vartheta_2 \Delta t_2$; $2\vartheta_2 \Delta t_2 = \vartheta_1 \Delta t_1$; $t_1 = \dfrac{2\vartheta_2 t_2}{\vartheta_1} = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,30° t_2}{\mathrm{tg}\,60°} =$ 8,0 мин.

Ответ: 3).

Задача 3

Автомобиль (А) и трактор (Тр) едут по одной дороге. Графики зависимости координаты движения от времени представлены на рис. 1.4.

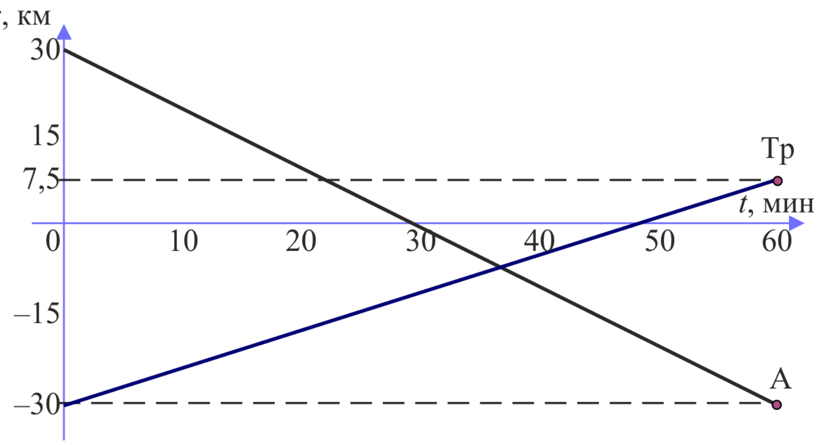


Рис. 1.4

Из приведённых ниже утверждений правильными являются:

А) автомобиль и трактор начинают движение по дороге навстречу друг другу;

Б) координата встречи $x = -5{,}00$ км;

В) через 30 мин после начала движения автомобиль развернулся;

Г) трактор поравняется с автомобилем через 35 мин после начала своего движения;

Д) модуль скорости трактора меньше модуля скорости автомобиля на $22{,}5\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$.

1) А, Б, В; 2) А, Б, Г; 3) Б, В, Г; 4) А, Д; 5) А, В.

Решение

Чтобы выполнить задание, необходимо проанализировать каждое приведённое утверждение.

Координата автомобиля в течение часа уменьшается, координата трактора – увеличивается (трактор движется вдоль оси *OX*, автомобиль – в противоположную сторону). Значит, вариант А) – верный, В) – неверный.

Чтобы определить координату встречи (координата точки пересечения представленных графиков), необходимо записать уравнение зависимости координаты от времени $x(t)$ для каждого участника движения по формуле

$$x = x_0 + \vartheta_x t,$$

где проекция скорости определяется как

$$\vartheta_x = \frac{x - x_0}{\Delta t}.$$

Подставляем данные, при этом время удобно перевести из минут в часы.

$$\vartheta_{x\text{А}} = \frac{-30-30}{1} = -60{,}0\ \frac{\text{км}}{\text{ч}},$$

$$\vartheta_{x\text{Тр}} = \frac{7{,}5-(-30)}{1} = 37{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Определяем, что модуль скорости трактора меньше модуля скорости автомобиля на

$$\vartheta_{x\text{А}} - \vartheta_{x\text{Тр}} = 60{,}0 - 37{,}5 = 22{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Вариант Д) – верный.

Уравнения движения автомобиля и трактора имеют вид

$$x_\text{А}(t) = 30 - 60{,}0t,\ \ x_\text{Тр}(t) = -30 + 37{,}5t.$$

В момент встречи координаты равны: $x_\text{А}(t) = x_\text{Тр}(t)$,

$$30 - 60{,}0t = -30 + 37{,}5t,$$

$$t_\text{встречи} = \frac{60}{97{,}5} = \frac{24}{39}\,\text{ч} \approx 36{,}5\ \text{мин}.$$

Вариант Г) – неверный.

Подставляем $t_\text{встречи}$ в уравнение движения автомобиля и находим координату места встречи:

$$x_\text{А}\left(\frac{24}{39}\right) = 30 - 60{,}0 \cdot \frac{24}{39} \approx -6{,}92\ \text{км}.$$

Значит, вариант Б) – неверный.

Ответ: 4).

Задания для самостоятельного закрепления темы

1. Поезд длиной $l = 120$ м равномерно движется по мосту длиной $L = 280$ м со скоростью $\vartheta = 24{,}0\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Поезд проедет мост за время Δt, равное:

1) 17,0 с; 2) 18,0 с; 3) 24,0 с; 4) 42,0 с; 5) 60,0 с.

2. Кинематический закон прямолинейного движения тела вдоль оси Ox имеет вид: $x = A + Bt$, где $A = 2{,}0$ км, $B = -50\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Проекция перемещения Δr_x тела за промежуток времени $\Delta t = 18$ мин с момента начала отсчета времени равна:

1) −13 км; 2) 13 км; 3) −15 км; 4) 15 км; 5) −17 км.

3. Кинематические уравнения прямолинейного движения двух пешеходов имеют вид: $x_1 = 8{,}0 + t$ и $x_2 = -16 + 4t$, где x и t – соответственно координата и время измерены в метрах и секундах. Координата x места встречи пешеходов равна:

1) 10 м; 2) 12 м; 3) 15 м; 4) 16 м; 5) 21 м.

4. Две девочки Аня (А) и Катя (К) идут по прямой дороге навстречу друг другу. На рис. 1.5 представлен график зависимости координат их движения от времени. Скорость Ани отличается от скорости Кати в:

1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{15}{16}$; 5) $\frac{16}{15}$.

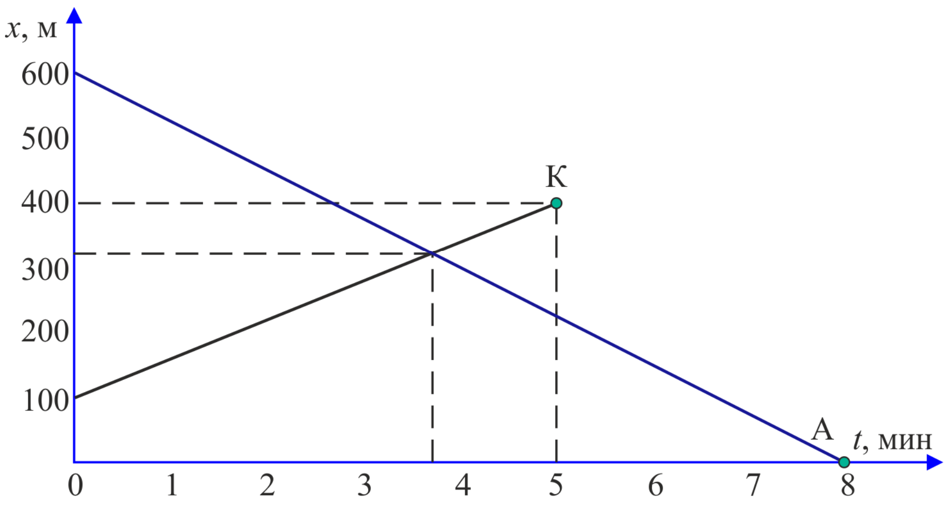


Рис. 1.5

5. Два друга решили покататься на велосипедах. В начале наблюдения первый мальчик (М1) находится в 10 м от друга (М2).

Графики зависимости проекции скорости ϑ_x от времени t представлены на рис. 1.6.

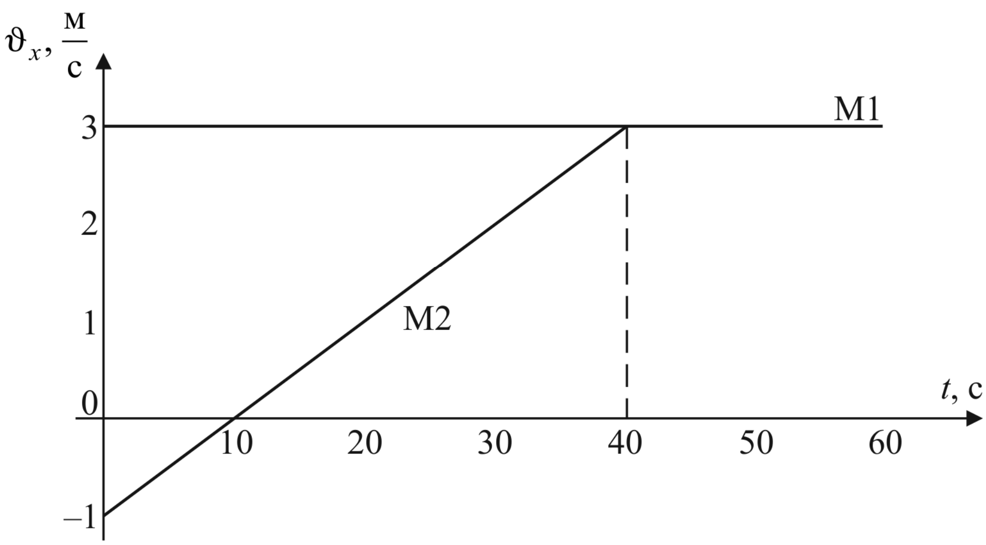


Рис. 1.6

Из приведённых ниже утверждений правильными являются:

А) первый мальчик в течение 1 мин не двигается, второй к нему приближается;

Б) мальчик 2 встретится с мальчиком 1 только через 40 с;

В) через 40 с после начала наблюдения скорости мальчиков будут равны;

Г) мальчик 2 сначала уезжал от друга в противоположную сторону, а через 10 с развернулся и начал догонять друга;

Д) первый мальчик двигается со скоростью $3\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

1) А, Б; 2) Б, Д; 3) В, Д; 4) Б, Г; 5) В, Г.

1.2. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

На практике чаще всего встречаются сложные движения, состоящие из двух простых. В этом случае дополнительно вводится подвижная система отсчёта. Движение тела относительно неподвижной системы отсчёта назовём абсолютным, относительно подвижной – относительным, а движение подвижной системы относительно неподвижной – переносным. Тогда абсолютная скорость $\overrightarrow{\vartheta_1}$ равна векторной сумме относительной $\overrightarrow{\vartheta_{1/2}}$ и переносной $\overrightarrow{\vartheta_2}$ скоростей:

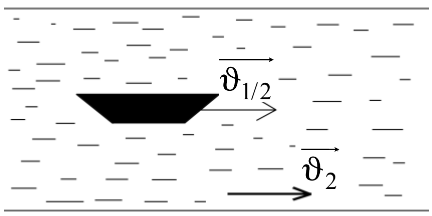
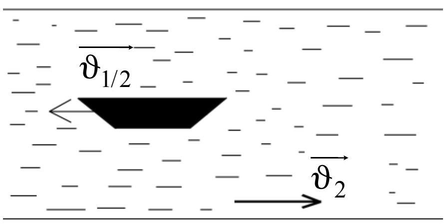
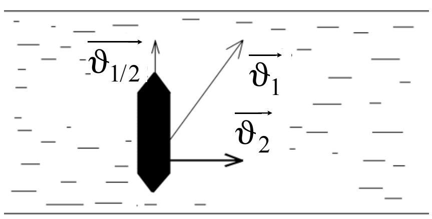
$$\overrightarrow{\vartheta_1} = \overrightarrow{\vartheta_{1/2}} + \overrightarrow{\vartheta_2}. \tag{1.4}$$

Данная формула является математическим выражением *закона сложения скоростей* (скорость каждого тела много меньше скорости света в вакууме).

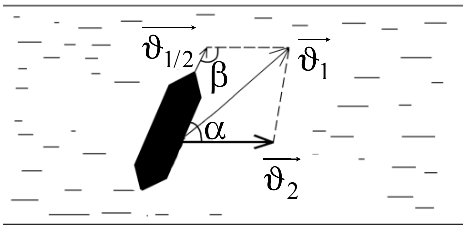
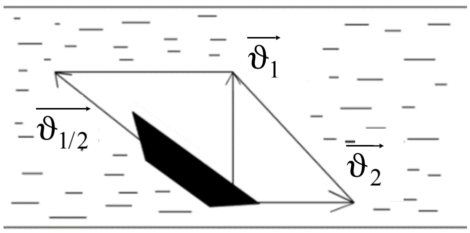
Её наглядное применение рассмотрим на примерах ситуаций, представленных в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Применение закона сложения скоростей при прямолинейном движении

Взаимное расположение векторов $\overrightarrow{\vartheta_{1/2}}$ и $\overrightarrow{\vartheta_2}$	Возможная ситуация	Вычисление модуля абсолютной скорости (скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта)
$\overrightarrow{\vartheta_{1/2}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\vartheta_2}$	*Движение по течению* $\overrightarrow{\vartheta_{1/2}}$ – скорость лодки относительно течения реки; $\overrightarrow{\vartheta_2}$ – скорость течения реки 	$\vartheta_1 = \vartheta_{1/2} + \vartheta_2$ модуль абсолютной скорости (скорость по течению) равен арифметической сумме модулей относительной и переносной скоростей
$\overrightarrow{\vartheta_{1/2}} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\vartheta_2}$	*Движение против течения* 	$\vartheta_1 = \vartheta_{1/2} - \vartheta_2$ модуль абсолютной скорости (скорость против течения) равен разности относительной и переносной скоростей
$\overrightarrow{\vartheta_{1/2}} \perp \overrightarrow{\vartheta_2}$	*Лодка держит курс перпендикулярно берегу* 	$\vartheta_1 = \sqrt{\vartheta_{1/2}^2 + \vartheta_2^2}$ модуль абсолютной скорости определяется по теореме Пифагора

Окончание табл. 1.2

Взаимное расположение векторов $\overrightarrow{\vartheta_{1/2}}$ и $\overrightarrow{\vartheta_2}$	Возможная ситуация	Вычисление модуля абсолютной скорости (скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта)
Произвольное расположение $\overrightarrow{\vartheta_{1/2}}$ и $\overrightarrow{\vartheta_2}$	*Лодку «сносит»* 	Вектор абсолютной скорости $\overrightarrow{\vartheta_1}$ строится по правилу параллелограмма и является его диагональю. Модуль ϑ_1 определяется по теореме косинусов: $\vartheta_1 = \sqrt{\vartheta_{1/2}^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_{1/2}\vartheta_2 \cos\beta}$, так как $\beta = 180° - \alpha$, то $\vartheta_1 = \sqrt{\vartheta_{1/2}^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_{1/2}\vartheta_2 \cos\alpha}$
$\alpha\left(\overrightarrow{\vartheta_{1/2}}, \overrightarrow{\vartheta_2}\right) \neq 0°;$ $90°; 180°$	*Частный случай* лодка переплывает реку перпендикулярно берегу 	Вектор абсолютной скорости также является диагональю параллелограмма, но модуль ϑ_1 можно определить по теореме Пифагора $\vartheta_1 = \sqrt{\vartheta_{1/2}^2 - \vartheta_2^2}$

Многие абитуриенты считают, что закон сложения скоростей справедлив только для равномерных и прямолинейных движений. В действительности же этот закон справедлив для любых движений. Поэтому рассмотрим ситуации применения закона сложения скоростей и при криволинейном движении.

Задача 1

Велосипедист движется без проскальзывания по горизонтальной дороге с постоянной скоростью, модуль которой $\vartheta = 36\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Модули скоростей точек, находящихся на ободе колеса в позициях 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (рис. 1.7), относительно земли $\vartheta_{\text{т/з}}$ равны ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

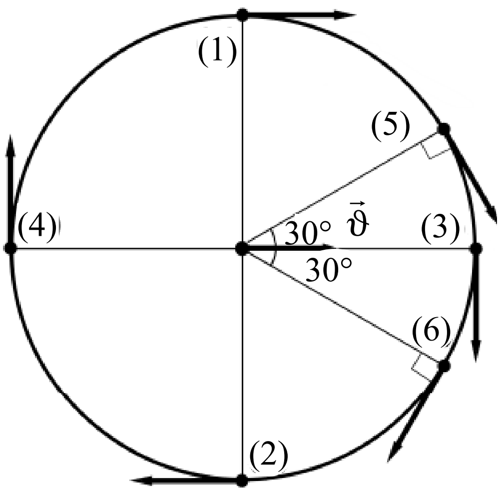


Рис. 1.7

Решение

Велосипед катится *без проскальзывания* по дороге со скоростью $\vartheta = 36\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}} = 10\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Следовательно, значение скорости, с которой колесо катится (переносная скорость – горизонтальный вектор в центре колеса), равно значению скорости, с которой оно крутится (относительная скорость – вектор направлен по касательной к окружности колеса, в каждой позиции своё направление). Чтобы определить модуль скорости точки обода колеса относительно земли $\vartheta_{\text{т/з}}$ в каждой позиции, сначала будем складывать вектора скорости на основании закона сложения скоростей, затем находить модуль искомой величины.

Позиция 1 (рис. 1.8): $\vartheta_{\text{т/з}} = \vartheta + \vartheta = 2\vartheta = 20\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

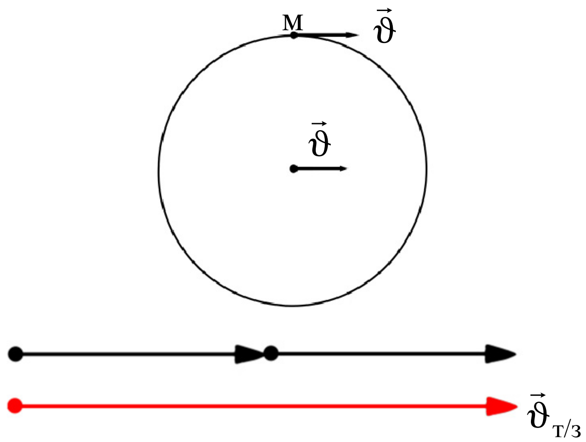


Рис. 1.8

Позиция 2 (рис. 1.9): $\vartheta_{т/з} = \vartheta - \vartheta = 0\ \dfrac{м}{с}$.

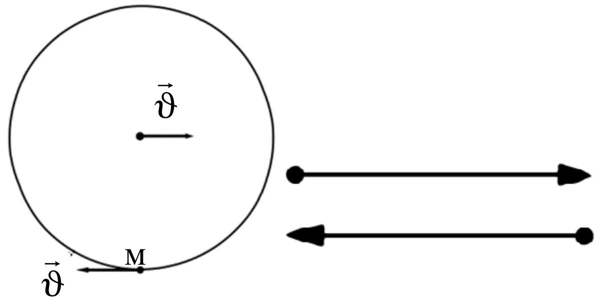


Рис. 1.9

Позиции 3 и 4 (рис. 1.10):

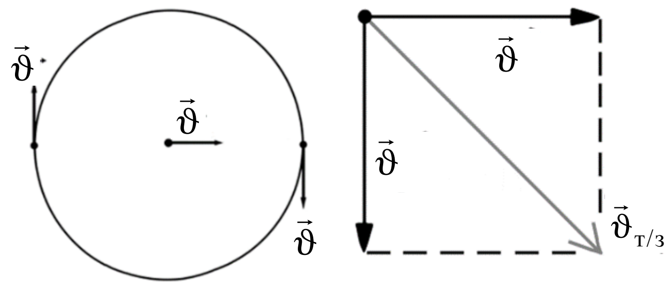


Рис. 1.10

Вектор скорости $\overrightarrow{\vartheta_{т/з}}$ строится по правилу параллелограмма и является его диагональю. Модуль $\vartheta_{т/з}$ определяется по теореме Пифагора

$$\vartheta_{т/з} = \sqrt{\vartheta^2 + \vartheta^2} = \sqrt{2\vartheta^2} = \vartheta\sqrt{2} = 10 \cdot 1{,}41 = 14\ \frac{м}{с}.$$

Позиция 5 (рис. 1.11):

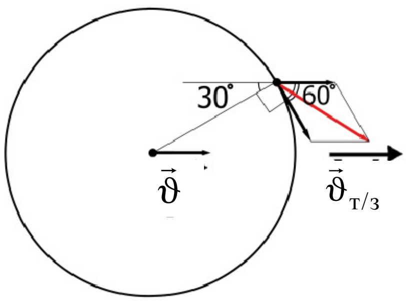


Рис. 1.11

Вектор скорости $\overrightarrow{\vartheta_{т/з}}$ строится по правилу параллелограмма и является его диагональю. Модуль $\vartheta_{т/з}$ определяется по теореме косинусов:

$$\vartheta_{т/з} = \sqrt{\vartheta^2 + \vartheta^2 - 2\vartheta\vartheta\cos 120^\circ} = \sqrt{3\vartheta^2} = \vartheta\sqrt{3} = 10 \cdot 1{,}73 = 17\ \frac{м}{с}.$$

Позиция 6 (рис. 1.12):

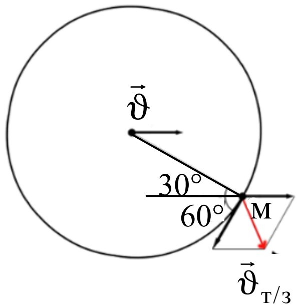


Рис. 1.12

Вектор скорости $\overrightarrow{\vartheta_{т/з}}$ строится по правилу параллелограмма и является его диагональю. Построенный параллелограмм – ромб. Вектор искомой скорости $\vartheta_{т/з}$ – диагональ, лежащая напротив угла 60°.

Значит, $\vartheta_{т/з} = \vartheta = 10\ \frac{м}{с}$.

Обратите внимание, когда колесо катится без проскальзывания, то часто бывает, что нижние спицы видны отчётливо, а верхние спицы как будто сливаются.

Ответ: $20\ \frac{м}{с}$; $0\ \frac{м}{с}$; $14\ \frac{м}{с}$; $17\ \frac{м}{с}$; $10\ \frac{м}{с}$.

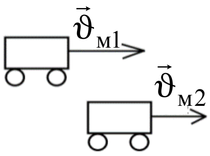
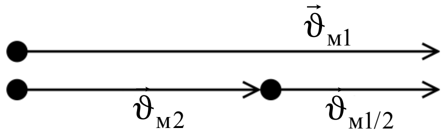
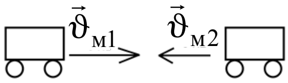
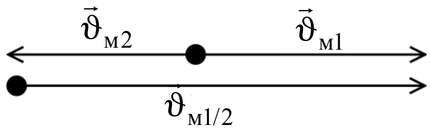
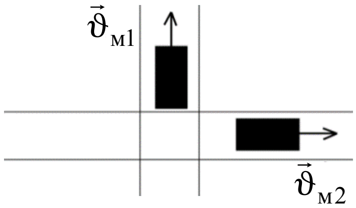
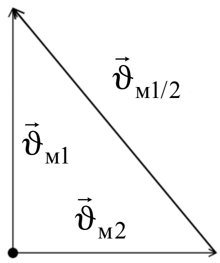
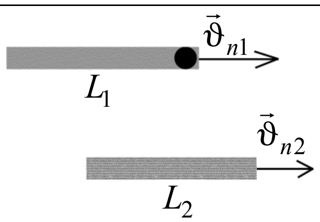
Продолжим анализ закона сложения скоростей. Из формулы 1.4 видим, что *относительная скорость* равна векторной разности абсолютной и переносной скоростей:

$$\overrightarrow{\vartheta_{1/2}} = \overrightarrow{\vartheta_1} - \overrightarrow{\vartheta_2}. \tag{1.5}$$

Наглядное применение формулы (1.5) рассмотрим с помощью простейших задач, заключённых в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Вычисление относительной скорости в простейших ситуациях

Возможная ситуация	Построение вектора относительной скорости	Модуль относительной скорости
 Обгон		$\vartheta_{1/2} = \vartheta_{м1} - \vartheta_{м2}$ модуль относительной скорости равен разности модулей скоростей автомобилей
Сближение или разъезд по параллельным дорогам 		$\vartheta_{1/2} = \vartheta_{м1} + \vartheta_{м2}$ модуль относительной скорости равен сумме модулей скоростей каждого автомобиля
 Разъезд на перекрёстке		$\vartheta_x = A + Bt$ определяется по теореме Пифагора
 Поезд длиной L_1 проезжает мимо поезда длиной L_2	$\vartheta_{1/2} = \vartheta_{n1} - \vartheta_{n2}$ Время движения машиниста (чёрная точка) первого поезда мимо второго поезда $\Delta t = \frac{L_2}{\vartheta_{1/2}} = \frac{L_2}{\vartheta_{n1} - \vartheta_{n2}}.$ А время движения всего первого поезда мимо второго определим как $\Delta t = \frac{L_2 + L_1}{\vartheta_{1/2}} = \frac{L_2 + L_1}{\vartheta_{n1} - \vartheta_{n2}}$	

Переходим от анализа ситуаций к исследованию ситуаций в задачах. Обратите внимание, что задачи 2–4 рассматриваются как на уроках физики, так и математики.

Задача 2

Пассажир первого поезда, движущегося со скоростью $\vartheta_1 = 54\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, заметил, что второй поезд, идущий в том же направлении по параллельному пути, прошёл мимо него за промежуток времени $\Delta t = 2{,}5$ мин. Если второй поезд состоит из головного вагона и $N = 14$ прицепных, а длина каждого вагона (со сцепкой) составляет $L = 25$ м, то второй поезд относительно земли движется со скоростью ϑ_2, равной ... $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Решение

Пассажир находится в первом поезде и видит, как его обгоняет второй поезд. Запишем скорость обгона $\vartheta_{1/2}$:

$$\vartheta_{1/2} = \frac{L(N+1)}{\Delta t}.$$

С другой стороны, эта скорость при движении поездов в одну сторону определяется как

$$\vartheta_{1/2} = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

Приравниваем оба выражения и выражаем искомую скорость

$$\vartheta_2 = \frac{L(N+1)}{\Delta t} + \vartheta_1,$$

подставляем значения в СИ

$$\vartheta_2 = \frac{25 \cdot 15}{150} + 15 = 17{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 63\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: $63\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Задача 3

Катер обогнал плот, плывущий по течению реки, в точке A. Через промежуток времени $\Delta t_1 = 1{,}0$ ч после этого катер повернул обратно и встретил плот на расстоянии $L = 4{,}0$ км ниже точки A. Если считать, что мотор катера на всём пути работал одинаково, то скорость течения реки ϑ равна ... $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Решение

Определим, с какой скоростью катер удаляется от плота.

1-й способ рассуждения

Собственную скорость катера относительно течения обозначим ϑ_1, скорость течения ϑ_2. Так как скорость катера относительно плота в обоих случаях – это скорость относительно течения, т. е. собственная скорость катера, то в обеих ситуациях катер относительно плота движется с собственной скоростью ϑ_1.

2-й способ рассуждения

Катер, двигаясь по течению реки, удаляется от плота со скоростью $\vartheta_{1/2}$:

$$\vartheta_{1/2} = \vartheta_{\text{по течению}} - \vartheta_2 = (\vartheta_1 + \vartheta_2) - \vartheta_2 = \vartheta_1$$

и приближается к плоту, двигаясь против течения:

$$\vartheta_{1/2} = \vartheta_{\text{против}} - \vartheta_2 = (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \vartheta_2 = \vartheta_1.$$

Значит, время удаления катера от плота равно времени его возврата:

$$\Delta t_{\text{удаления}} = \Delta t_{\text{возврата}} = \Delta t_1 = 1{,}0 \text{ ч},$$

$$\Delta t_{\text{общее}} = 2\Delta t_1 = 2{,}0 \text{ ч} = \Delta t_{\text{плота}}.$$

Плот проплыл расстояние $L = 4{,}0$ км, двигаясь 2 ч со скоростью течения.

Находим скорость течения: $\vartheta_2 = \dfrac{L}{\Delta t} = 2{,}0\ \dfrac{\text{км}}{\text{ч}}.$

Ответ: $2{,}0\ \dfrac{\text{км}}{\text{ч}}.$

Задача 4

Путешественник проходит на моторной лодке расстояние между двумя пристанями по течению реки за время $\Delta t_1 = 4{,}0$ ч, а в противоположном направлении между этими же пристанями за $\Delta t_2 = 8{,}0$ ч. Спускаясь на плоту, расстояние между этими же пристанями путешественник преодолеет за время Δt_3, равное ... ч.

Решение

Собственную скорость моторной лодки (скорость лодки относительно воды) обозначим ϑ_1. Скорость течения реки (скорость подвижной системы координат) ϑ_2. Первый раз путешественник плывёт по течению. Второй раз – против течения. Во время путешествия на плоту человек будет двигаться относительно берегов со скоростью течения ϑ_2. Данные можно оформить в виде таблицы:

Путь	Скорость путешественника относительно берега	Время движения
S	$\vartheta_1 + \vartheta_2$	4 ч
S	$\vartheta_1 - \vartheta_2$	8 ч
S	ϑ_2	t_3

Записываем систему уравнений:

$$S=(\vartheta_1+\vartheta_2)\cdot 4,$$

$$S=(\vartheta_1-\vartheta_2)\cdot 8,$$

$$S=\vartheta_2 t_3.$$

Приравняем первые два уравнения и найдём зависимость между собственной скоростью объекта и скоростью подвижной системы координат (течения):

$$4(\vartheta_1+\vartheta_2)=8(\vartheta_1-\vartheta_2),$$

$$3\vartheta_2=\vartheta_1.$$

Собственная скорость больше скорости течения в 3 раза. Учтём полученный вывод в следующем равенстве:

$$4(\vartheta_1+\ \vartheta_2)=\vartheta_2 t_3,$$

$$16\vartheta_2=\vartheta_2 t_3,$$

$$t=16\text{ ч}.$$

Ответ: 16 ч.

Задача 5

При скорости ветра $\vartheta_{\text{в}1}=10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ дождь идёт под углом $\alpha=30°$ к вертикали. Дождь будет идти под углом $\beta=45°$ при скорости ветра $\vartheta_{\text{в}2}$, равном ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение

Так как в задаче дует ветер, то мы имеем дело с косым дождём. Интенсивность дождя не изменяется. Из построения (рис. 1.13) запишем

$$\text{tg}\,30°=\frac{\vartheta_{\text{в}1}}{\vartheta_{\text{к}}}\ \text{ и }\ \text{tg}\,45°=\frac{\vartheta_{\text{в}2}}{\vartheta_{\text{к}}},$$

где $\vartheta_{\text{к}}$ – скорость капли дождя в безветренную погоду.

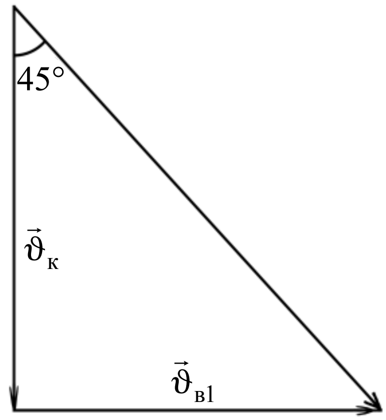


Рис. 1.13

Выражая данную скорость капли из обоих выражений, получаем равенство

$$\frac{\vartheta_{в1}}{\mathrm{tg}30^\circ} = \frac{\vartheta_{в2}}{\mathrm{tg}45^\circ},$$

$$\vartheta_{в2} = \vartheta_{в1}\frac{\mathrm{tg}45^\circ}{\mathrm{tg}30^\circ} = 17\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $17\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задания для самостоятельного закрепления темы

1. По параллельным участкам соседних железнодорожных путей навстречу друг другу равномерно двигаются пассажирский и товарный поезда со скоростями $\vartheta_1 = 70\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $\vartheta_2 = 38\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ соответственно. Если машинист пассажирского поезда заметил, что он проехал мимо товарного поезда за промежуток времени $\Delta t = 18$ с, то длина $\boldsymbol{L}$ товарного поезда ... **м**.

2. Спасатель, проплывая против течения на лодке, под мостом потерял спасательный круг. Обнаружив потерю через время $\Delta t_1 = 10$ мин, он повернул обратно и догнал круг на расстоянии $L = 700$ м от моста. Если считать, что собственная скорость лодки в воде не изменялась, спасательный круг двигался со скоростью ϑ ... $\frac{\text{м}}{\text{мин}}$.

3. Лодка перевозит пассажиров из посёлка А в посёлок В. Двигаясь вниз по реке, она находится в пути $\Delta t_1 = 3{,}0$ ч. Если плот затрачивает на преодоление этого расстояния в 4 раза больше времени, то обратно из посёлка В в посёлок А лодка вернётся за время $\boldsymbol{\Delta t_2}$ … **ч**.

4. Почтовый голубь дважды пролетел путь из пункта А в пункт В, двигаясь с одной и той же скоростью относительно воздуха. В первом случае, в безветренную погоду, голубь пролетел путь АВ за промежуток времени $\Delta t_1 = 25$ мин. Во втором случае, при попутном ветре, скорость которого была постоянной, голубь пролетел этот путь за промежуток времени $\Delta t_2 = 15$ мин. Если бы ветер был встречный, то путь АВ голубь пролетел бы за промежуток времени $\boldsymbol{\Delta t_3}$, равный ... **мин**.

5. Эскалатор поднимает стоящего на нём человека за время $\Delta t_1 =$ $= 1{,}0$ мин. Если человек идёт по остановившемуся эскалатору, то на подъём затрачивается $\Delta t_2 = 3{,}0$ мин. Если человек будет подниматься по движущемуся эскалатору, увеличив собственную скорость в 2 раза, то на подъём уйдёт промежуток времени $\boldsymbol{\Delta t_3}$, равный ... **с**.

6. При скорости ветра $\vartheta_{\text{в}1} = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ скорость капель дождя составляет $\vartheta_{\text{д}1} = 30\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Когда ветер уменьшится и будет дуть со скоростью $\vartheta_{\text{в}2} = 5{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, то скорость капель дождя $\vartheta_{\text{д}2}$ станет равной ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

7. В безветренную погоду капли дождя оставляют на окне равномерно движущегося автобуса след, направленный под углом 30° к вертикали. Если скорость автобуса $\vartheta_{\text{а}} = 45\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то скорость капель относительно земли $\vartheta_{\text{к}}$ равна ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

8. Два катера движутся по озеру с модулями скоростей $\vartheta_1 = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $\vartheta_2 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ относительно воды, направленными под углом $\alpha = 60°$ друг к другу. Модуль скорости первого катера относительно второго $\vartheta_{1/2}$ равен ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

9. Колесо движется без проскальзывания по горизонтальной дороге с постоянной скоростью. Модуль скорости точки *B*, находящейся на ободе колеса, относительно земли равен $\vartheta_1 = 8{,}7\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ (рис. 1.14).

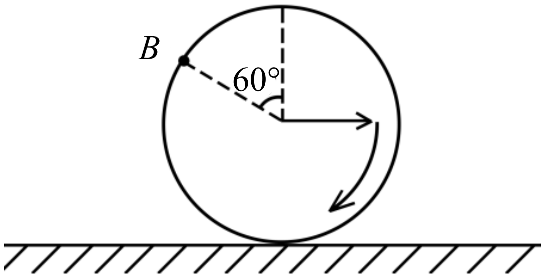


Рис. 1.14

Линейная скорость точки *B* ϑ_2 составляет ... $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

10. Самолёт летит из города M в город N, расположенных на расстоянии L = 800 км друг от друга, и возвращается обратно. Скорость самолёта относительно воздуха во время полёта равна $\vartheta_\text{с} = 328\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$. Первый раз при перелёте по маршруту M–N–M дует постоянный ветер из M в N. В другой раз при движении по такому же маршруту дует боковой ветер перпендикулярно линии полёта. Время полного перелёта в первом случае отличается от времени полного перелёта во втором при скорости ветра $\vartheta_\text{в} = 20{,}0\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ на Δt ... с.

11. В реку из некоторой точки O на берегу у самой воды бросают камень перпендикулярно берегу. Скорость поверхностных волн в воде равна $\vartheta_1 = 1{,}0\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, а скорость течения реки $\vartheta_2 = 0{,}5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Если камень упал в воду на расстоянии L = 9,0 м от берега, то после падения камня волна от него придёт в точку O через время Δt, равное ... с.

12. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом каждые Δt_1 = 3,0 ч. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые Δt_2 = 20 мин. Каждый автомобиль проходит трассу за время $\Delta \boldsymbol{t}_{1\text{A}}$ и $\Delta \boldsymbol{t}_{2\text{A}}$, равное ... **мин**.

1.3. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

Средняя путевая скорость $\langle \vartheta \rangle$ – скалярная физическая величина, которая определяется как отношение всего пути S, пройденного за весь промежуток времени Δt, к величине этого промежутка:

$$\langle \vartheta \rangle = \frac{S}{\Delta t}. \qquad (1.6)$$

Следует заметить, что в условиях задач слово «путевая», как правило, опускается.

Средняя скорость перемещения $\langle \overrightarrow{\vartheta_r} \rangle$ **–** векторная физическая величина, равная отношению вектора перемещения $\vec{r}$ тела за промежуток времени Δt к величине этого промежутка:

$$\langle \overrightarrow{\vartheta_r} \rangle = \frac{\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.7)$$

Поскольку ответы мы даём в числовых значениях, то в задачах требуется рассчитать либо модуль средней скорости перемещения

$$\langle \vartheta_r \rangle = \frac{|r|}{\Delta t}, \qquad (1.8)$$

либо проекцию средней скорости

$$\langle \vartheta_x \rangle = \frac{r_x}{\Delta t}. \qquad (1.9)$$

Чтобы определить значение необходимой средней скорости, нужно внимательно читать условия задач. Рассмотрим некоторые задачи данной темы.

Задача 1

Ученикам требуется пробежать по стадиону два круга. Один из мальчиков пробегает первый круг со скоростью $\vartheta_1 = 3{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, второй круг – со скоростью $\vartheta_1 = 4{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Другой мальчик первую половину всего времени бежит со скоростью $u_1 = 3{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а вторую половину времени – со скоростью $u_2 = 4{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Модули средних путевых скоростей и средних скоростей перемещения этих ребят отличаются на:

1) $\left|\langle u\rangle - \langle \vartheta\rangle\right| = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\quad \left|\langle u_r\rangle - \langle \vartheta_r\rangle\right| = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

2) $\left|\langle u\rangle - \langle \vartheta\rangle\right| = 1{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\quad \left|\langle u_r\rangle - \langle \vartheta_r\rangle\right| = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

3) $\left|\langle u\rangle - \langle \vartheta\rangle\right| = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\quad \left|\langle u_r\rangle - \langle \vartheta_r\rangle\right| = 1{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

4) $\left|\langle u\rangle - \langle \vartheta\rangle\right| = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\quad \left|\langle u_r\rangle - \langle \vartheta_r\rangle\right| = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

5) $\left|\langle u\rangle - \langle \vartheta\rangle\right| = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\quad \left|\langle u_r\rangle - \langle \vartheta_r\rangle\right| = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение

Часто учащиеся, не задумываясь, выбирают ответ номер 1. Покажем, почему этот номер является ошибочным ответом.

Определим значение средней путевой скорости каждого мальчика, используя формулу (1.6). Обозначим длину одного круга S. Тогда полный путь равен $2S$. Время прохождения первого круга Δt_1, второго – Δt_2.

Найдем модуль средней скорости первого мальчика:

$$\langle \vartheta\rangle = \frac{2S}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{\vartheta_1} + \frac{S}{\vartheta_2}} = \frac{2}{\frac{1}{\vartheta_1} + \frac{1}{\vartheta_2}}.$$

Делаем алгебраические преобразования и получаем формулу

$$\langle \vartheta\rangle = \frac{2\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \tag{1.10}$$

$$\langle \vartheta\rangle = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3+4} = 3{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Выведем формулу для определения модуля средней скорости второго мальчика. Со скоростями u_1 и u_2 он каждый раз двигается одинаковый промежуток времени Δt. Тогда общее время движения равно $2\Delta t$. За первый промежуток Δt он пробегает дистанцию S_1, за следующий – S_2.

$$\langle u\rangle = \frac{S_1 + S_2}{2\Delta t} = \frac{u_1\Delta t + u_2\Delta t}{2\Delta t},$$

$$\langle u\rangle = \frac{u_1 + u_2}{2}, \tag{1.11}$$

$$\langle u\rangle = \frac{3+4}{2} = 3{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Значит, модули средних путевых скоростей этих ребят отличаются на

$$\left|\langle u\rangle - \langle \vartheta\rangle\right| = 3{,}5 - 3{,}4 = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для определения модуля средней скорости перемещения необходимо знать модуль перемещения. Так как мальчики бегут по кругу и их конечные и начальные положения совпадают, то $|r|$ каждого мальчика равно нулю. Следовательно,

$$\langle \vartheta_r\rangle = 0, \langle u_r\rangle = 0 \Rightarrow \left|\langle u_r\rangle - \langle \vartheta_r\rangle\right| = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 4).

Выводы

● Формулу (1.10) всегда можно использовать в задачах о средней скорости при прохождении *двух равных отрезков пути*.

● Формулу (1.11) всегда можно использовать в задачах о средней скорости при затрачивании *двух равных промежутков времени*.

● Если N-равные промежутки времени Δt тело проходит со скоростями $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, ..., \vartheta_N$, то среднюю скорость за всё время движения можно рассчитать по формуле

$$\langle \vartheta\rangle = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \ldots + \vartheta_N}{N}. \tag{1.12}$$

(Данную формулу рекомендуется вывести самостоятельно.)

Задача 2

График движения автомобиля представлен на рис. 1.15.

Значения средней путевой скорости $\langle \vartheta\rangle$ и проекции средней скорости перемещения $\langle \vartheta_x\rangle$ автомобиля за промежуток времени $\Delta t = 4$ ч равны соответственно:

1) $\langle\vartheta\rangle = 45\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $\langle\vartheta_x\rangle = 45\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$;

2) $\langle\vartheta\rangle = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $\langle\vartheta_x\rangle = 45\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$;

3) $\langle\vartheta\rangle = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $\langle\vartheta_x\rangle = 27\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$;

4) $\langle\vartheta\rangle = 45\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $\langle\vartheta_x\rangle = 27\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$;

5) $\langle\vartheta\rangle = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $\langle\vartheta_x\rangle = 36\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

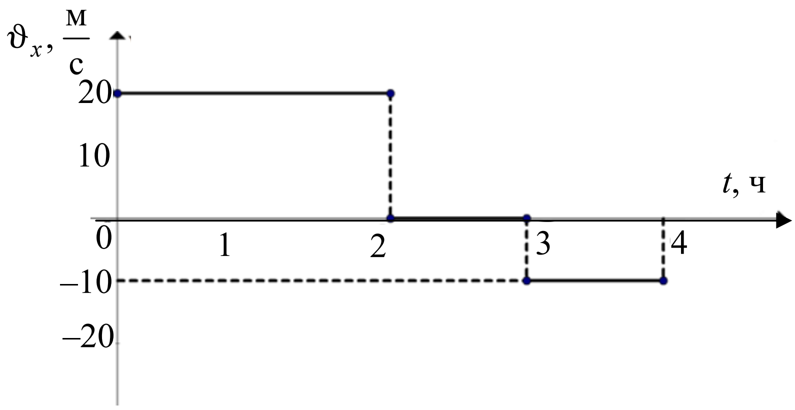


Рис. 1.15

Решение

Проанализируем график $\vartheta_x(t)$ за промежуток времени $\Delta t = 4$ ч. Первые 2 ч автомобиль двигался в положительном направлении оси *OX*. Затем 1 ч отдыхал. Последний час двигался в сторону, противоположную первоначальной.

Среднюю путевую скорость определяем по формуле (1.6).

Весь пройденный автомобилем путь вычислим графическим способом, так как нам известно, что путь равен площади фигуры, заключённой между графиком скорости и осью времени. Однако следует обратить внимание, что скорость автомобиля на графике дана в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, поэтому сначала необходимо перевести её значения в $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а затем вычислить. Таким образом, путь равен сумме площадей двух прямоугольников:

$$S = S_1 + S_2.$$

Тогда искомая средняя путевая скорость

$$\langle\vartheta\rangle = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t} = \frac{72\cdot 2 + 36\cdot 1}{4} = 45\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Проекция перемещения, по данным графика,

$$r_x = S_1 - S_2.$$

Средняя скорость перемещения

$$\langle \vartheta_r \rangle = \frac{S_1 - S_2}{\Delta t} = \frac{72 \cdot 2 - 36 \cdot 1}{4} = 27\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: 4).

Задача 3

Турист отправился в путь. График зависимости проекции его скорости от времени при движении до пункта назначения (базы) указан на рис. 1.16.

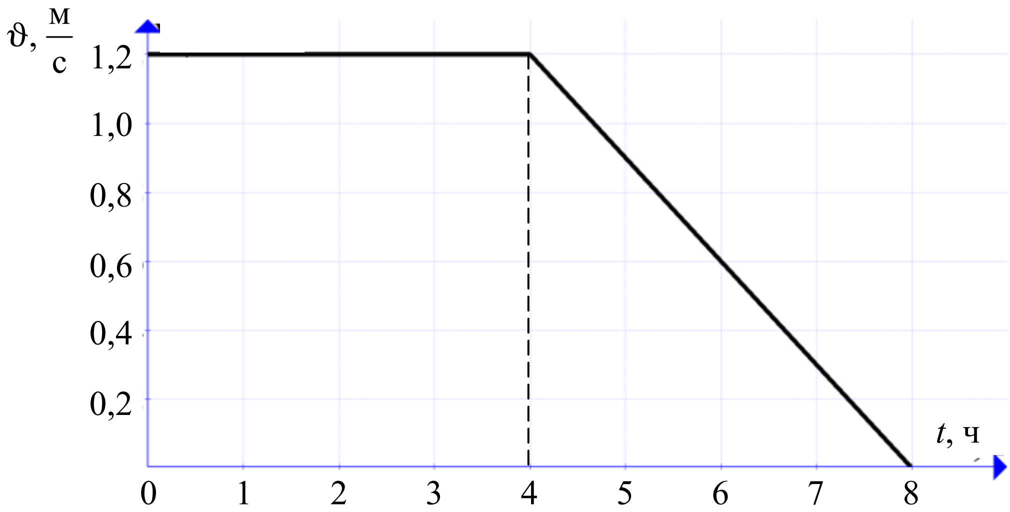


Рис. 1.16

Из приведённых ниже утверждений верными являются:

А) всю вторую половину пути турист движется, постепенно уменьшая скорость;

Б) туристу надо пройти до базы больше 25 км;

В) средняя скорость туриста на всём пути составила 3,24 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$;

Г) средняя скорость туриста на всём пути составила 0,60 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

Д) первую половину пути турист прошёл за 4 ч.

1) А, Г;   2) Б, Г;   3) Б, В;   4) Б, В, Г;   5) А, Г, Д.

Решение

Проанализируем приведённые утверждения.

Путь численно равен площади фигуры, ограниченной графиком скорости и осью времени (трапеции). Площадь прямоугольника (за первые

4 ч движения) больше площади треугольника (за следующие 4 ч движения). Следовательно, за первые 4 ч движения турист прошёл, двигаясь с постоянной скоростью, больше половины пути. Значит, варианты А) и Д) – неверные.

Для вычисления пути необходимо перевести единицы измерения.

$$\vartheta = 1{,}20\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 4{,}32\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Общий путь равен площади трапеции

$$S = 25{,}92\ \text{км}.$$

Вариант Б) – верный.

Рассчитаем среднюю путевую скорость туриста:

$$\langle\vartheta\rangle = \frac{S}{\Delta t} = 3{,}24\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 0{,}90\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Значит, вариант В) – верный; вариант Г) – неверный.

Ответ: 3).

Задания для самостоятельного закрепления темы

1. Первую половину всего времени вертолёт перемещался на север со скоростью $\vartheta_1 = 108\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а вторую половину времени – на восток со скоростью $\vartheta_2 = 144\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Модули средней путевой скорости и скорости перемещения отличаются на:

1) $0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $10{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) $12{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 4) $15{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 5) $18{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

2. Первую половину пути трактор двигался со скоростью ϑ_1, модуль которой 2 раза больше модуля его скорости на второй половине пути. Если модуль скорости трактора на второй половине пути $\vartheta_2 = 30\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то его средняя скорость $\langle\vartheta\rangle$ на всем пути равна:

1) $25\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $30\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 3) $40\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 4) $45\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 5) $60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3. Трасса autoралли состоит из трех одинаковых кругов. Если первый круг автомобиль проехал со скоростью $\vartheta_1 = 64\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, второй – $\vartheta_2 = 80\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а третий – $\vartheta_3 = 84\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то средняя скорость автомобиля $\langle\vartheta\rangle$ на всей трассе составила:

1) $73\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $74\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 3) $75\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 4) $76\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 5) $77\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

4. В течение промежутка времени $\Delta t_1 = \frac{3}{4}t$ (t – всё время движения) скорость движения велосипедиста в два раза больше его скорости в течение оставшегося промежутка времени Δt_2. Если средняя скорость велосипедиста на всём пути $\langle\vartheta_1\rangle = 21\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то его скорость ϑ_2 в течение промежутка времени Δt_2 равна:

1) $6\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $8\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 3) $12\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 4) $14\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 5) $18\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

5. Домашнюю черепаху выпускают на даче погулять. Она чует салат, растущий на грядке, направляется к нему по прямой линии и достигает цели.

На рис. 1.17 представлен график зависимости проекции скорости ϑ_x черепахи от времени.

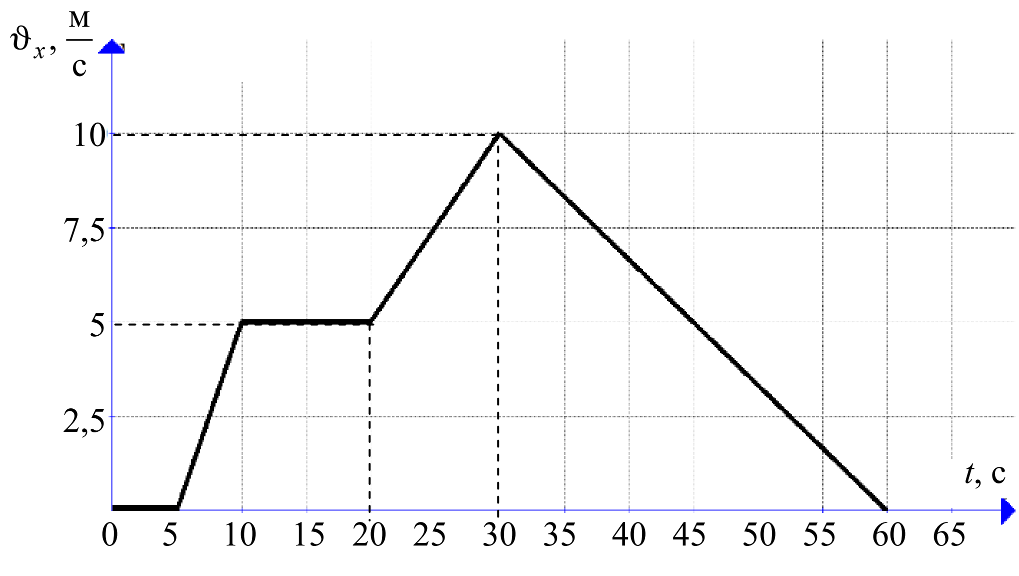


Рис. 1.17

Модуль средней скорости перемещениям $\langle \vartheta_r \rangle$ черепахи за всё время наблюдения равен:

1) 45 $\frac{мм}{с}$; 2) 48 $\frac{мм}{с}$; 3) 50 $\frac{мм}{с}$; 4) 52 $\frac{мм}{с}$; 5) 55 $\frac{мм}{с}$.

6. На рис. 1.18 изображён график зависимости координаты от времени $x(t)$ группы туристов, движущихся прямолинейно. Средняя путевая скорость $\langle \vartheta \rangle$ и модуль их средней скорости перемещения $\langle \vartheta_r \rangle$ равны соответственно:

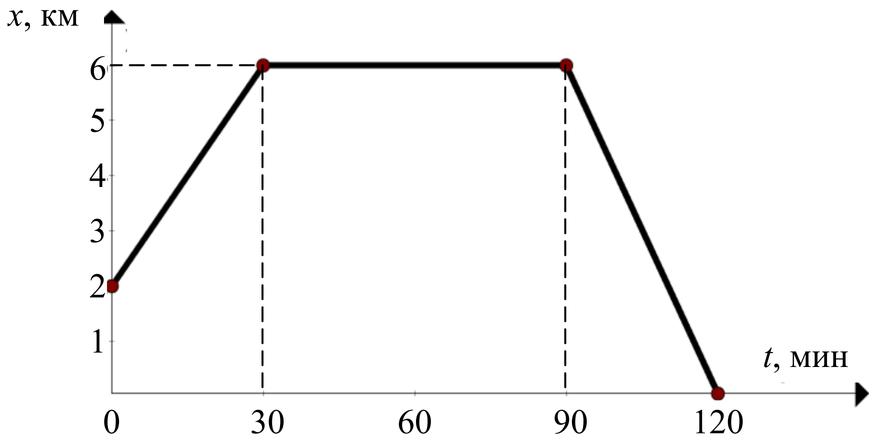


Рис. 1.18

1) 5 $\frac{км}{ч}$; 1 $\frac{км}{ч}$;

2) 5 $\frac{км}{ч}$; 3 $\frac{км}{ч}$;

3) 6 $\frac{км}{ч}$; 3 $\frac{км}{ч}$;

4) 6 $\frac{км}{ч}$; 2 $\frac{км}{ч}$;

5) 6 $\frac{км}{ч}$; 1 $\frac{км}{ч}$.

1.4. РАВНОУСКОРЕННОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Ускорение $\vec{a}$ – это векторная физическая величина, которая равна изменению вектора скорости $\Delta\vec{\vartheta}$ за промежуток времени Δt:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t}, \qquad (1.13)$$

где $\Delta\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta_0}$; $\vec{\vartheta_0}$ – вектор начальной скорости движения; $\vec{\vartheta}$ – вектор скорости через промежуток времени Δt.

В случае произвольного криволинейного движения скорость тела может изменяться по модулю и по направлению. Тогда быстроту изменения модуля скорости характеризует касательное ускорение, направленное по касательной к траектории. Быстроту изменения скорости по направлению характеризует нормальное (центростремительное) ускорение, направленное по радиусу к центру кривизны в данной точке траектории. В этом параграфе речь идёт о касательном ускорении, так как рассматривается прямолинейное движение.

Равноускоренным прямолинейным движением называется движение по прямой с постоянным ускорением, т. е. это такое прямолинейное движение, при котором за любые равные промежутки времени скорость тела изменяется одинаково.

Характер движения: ускоряется или тормозит исследуемый объект, нам указывает взаимная ориентация его векторов скорости $\vec{\vartheta}$ и ускорения $\vec{a}$.

Если $\vec{\vartheta} \uparrow\uparrow \vec{a}$ $(a_x > 0, \vartheta_x > 0$ или $a_x < 0, \vartheta_x < 0)$, тело ускоряется.

Если $\vec{\vartheta} \uparrow\downarrow \vec{a}$ $(a_x > 0, \vartheta_x < 0$ или $a_x < 0, \vartheta_x > 0)$, тело замедляется.

Рассмотрим формулы и графическое представление равноускоренного прямолинейного движения.

Проекция ускорения a_x:

$$a_x = \frac{\vartheta_x - \vartheta_{0x}}{\Delta t}. \tag{1.14}$$

График – *прямая*, параллельная оси времени (рис. 1.19).

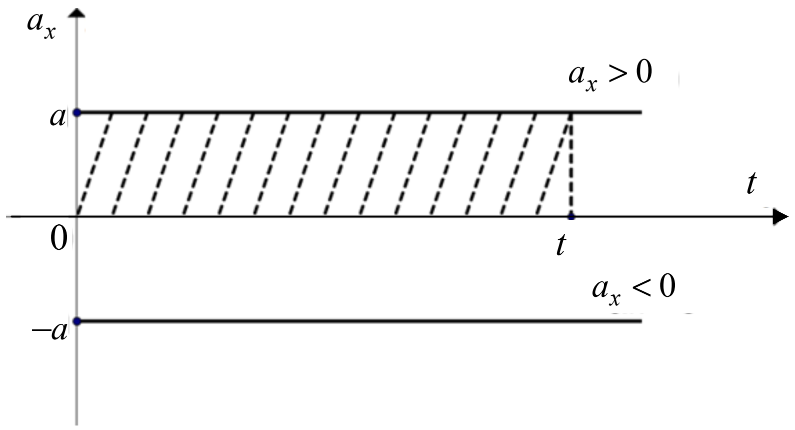


Рис. 1.19

Если начальная скорость равна нулю, то проекция скорости $\vartheta_x(t)$ в момент времени t численно равна площади прямоугольника, ограниченного графиком ускорения, осью времени и отрезками $t_1 = 0$, $t_2 = t$.

Скорость при равноускоренном движении в проекциях:

$$\vartheta_x = \vartheta_{0x} + a_x \Delta t,$$
$$\vartheta_y = \vartheta_{0y} + a_y \Delta t. \tag{1.15}$$

В скалярной форме

$$\vartheta = \vartheta_0 \pm a\Delta t. \tag{1.16}$$

Среднее значение проекции скорости на промежутке $[t_1; t_2]$:

$$\langle \vartheta_x \rangle = \frac{\vartheta_{1x} + \vartheta_{2x}}{2}, \tag{1.17}$$

где $\vartheta_{1x} = \vartheta_x(t_1)$, $\vartheta_{2x} = \vartheta_x(t_2)$.

По данным графика $\vartheta(t)$ (рис. 1.20), можно определять:

● направление движения;

● значение скорости;

● значение ускорения: $\operatorname{tg}\alpha = a$;

● модуль перемещения и путь, которые численно равны площади фигуры (S), ограниченной графиком скорости, осью времени и отрезками $t_1 = 0$, $t_2 = t$.

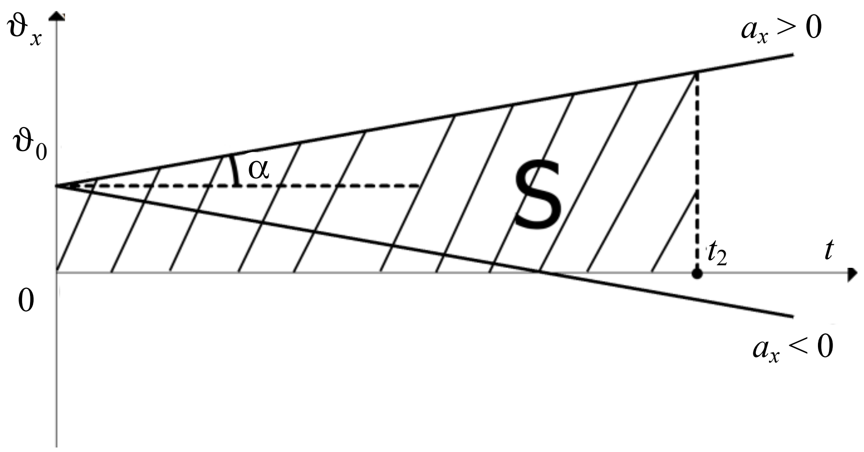


Рис. 1.20

Путь S:

$$S(t) = \vartheta_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \tag{1.18}$$

$$S = \frac{\left|\vartheta^2 - \vartheta_0^{\ 2}\right|}{2a}, \tag{1.19}$$

$$S = \frac{\left(\vartheta_2 + \vartheta_1\right)}{2}\Delta t, \tag{1.20}$$

где $\vartheta_1 = \vartheta\left(t_1\right)$, $\vartheta_2 = \vartheta\left(t_2\right)$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

Путь за одну n-ю секунду при $\vartheta_0 = 0$:

$$S_n = \left(2n - 1\right)\frac{a}{2}. \tag{1.21}$$

Путь является квадратичной функцией времени, следовательно, график представляет собой *параболу* (рис. 1.21).

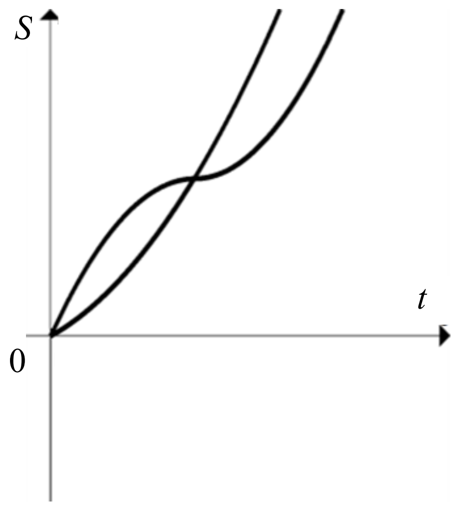


Рис. 1.21

Проекция перемещения $r_x(t)$:

$$r_x = x - x_0,$$

$$r_x = \vartheta_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{1.22}$$

График тоже представляет собой *параболу* (рис. 1.22).

Координата $x(t)$:

$$x = x_0 + \vartheta_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{1.23}$$

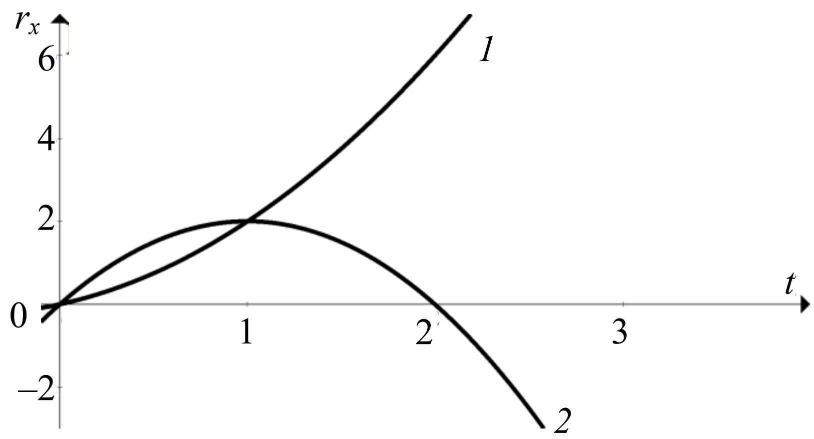


Рис. 1.22

График координаты $x(t)$ отличается от графика перемещения $r_x(t)$ смещением по оси OX вверх или вниз на величину начальной координаты x_0 (рис. 1.23):

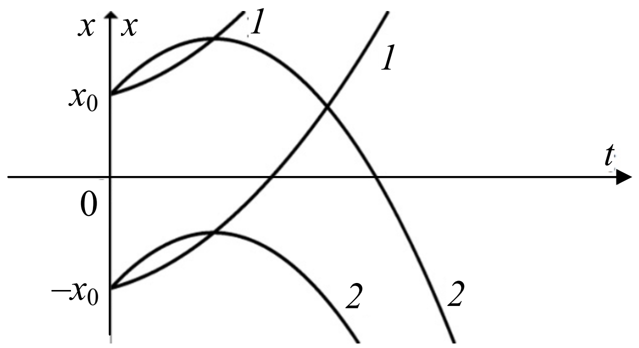


Рис. 1.23

Модуль мгновенной скорости равен угловому коэффициенту касательной, проведённой в соответствующей точке каждой параболы.

При решении задач необходимо правильно применять кинематические уравнения, уметь анализировать графики кинематических величин, проводить аналогии. Например, следует понимать, что все формулы, представленные для равноускоренного движения, применимы и для описания *свободного падения*.

Свободным падением называют движение тела только под действием силы тяжести.

Ускорение $\vec{g}$, с которым свободно падает тело, называется ускорением свободного падения. Оно направлено вертикально вниз, не зависит от массы падающего тела, одинаково для всех тел. Его числовое значение вблизи поверхности Земли примерно равно $g \approx 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Для упрощения расчётов в задачах принимаем его значение равным $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Рассмотрим задачи, часто вызывающие затруднения на вступительных испытаниях.

Задача 1

Материальная точка движется вдоль оси OX так, что график зависимости проекции её скорости ϑ_x на эту ось от времени t имеет вид, изображенный на рис. 1.24. Проекция ускорения a_x материальной точки на ось OX в момент времени t = 1,5 с равна:

1) $-0{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 2) $-1{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 3) $-1{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 4) $1{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 5) $1{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

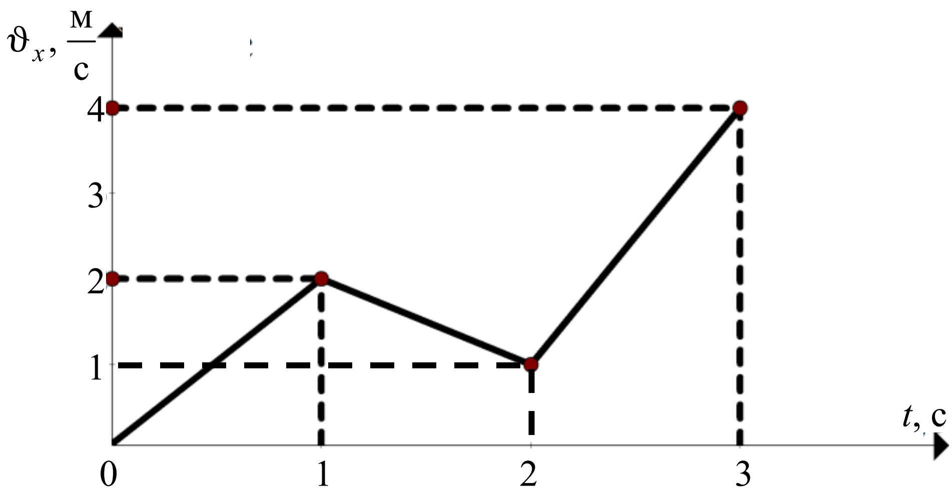


Рис. 1.24

Решение

При ответе на поставленный вопрос важно понимать, что ускорение характеризует *изменение скорости* за единицу времени. Поэтому рассуждаем следующим образом:

● определяем, что момент времени t_1 = 1,5 с принадлежит промежутку [1 с; 2 с];

● находим по графику значения проекции скорости в моменты времени t_1 = 1 с и t_2 = 2 с $\vartheta_{1x}(1\ \text{с}) = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $\vartheta_{2x}(2\ \text{с}) = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

● подставляем полученные значения в формулу (1.14):

$$a_x = \frac{\vartheta_{2x} - \vartheta_{1x}}{\Delta t} = \frac{1-2}{1} = -1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: 2).

Задача 2

Велосипедист начал движение по прямой велосипедной трассе. Если ось OX направлена вдоль трассы, то график зависимости проекции ускорения от времени имеет вид, представленный на рис. 1.25.

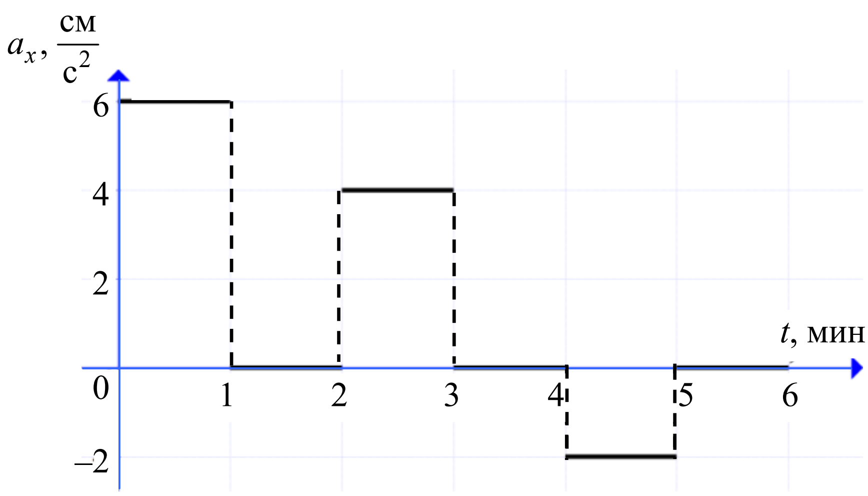


Рис. 1.25

Из приведённых ниже утверждений верными являются:

А) в промежутки времени [1 мин; 2 мин], [3 мин; 4 мин], [5 мин; 6 мин] велосипедист не двигался;

Б) через 3 мин после начала движения скорость велосипедиста достигнет $6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

В) наибольшая скорость была развита велосипедистом через одну минуту после начала движения;

Г) наибольшая скорость была развита велосипедистом через три минуты после начала движения;

Д) путь, который проехал велосипедист, больше его перемещения.

1) А, Б, В; 2) Б, Д; 3) В, Д; 4) Г, Д; 5) Б, Г.

Решение

Проанализируем график $a_x(t)$. В промежутках времени [1 мин; 2 мин], [3 мин; 4 мин], [5 мин; 6 мин] $a_x(t) = 0\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Значит, в эти промежутки времени $\vartheta_x = \text{const}$.

Определим проекцию скорости в конце каждого промежутка времени, учитывая, что по условию задачи $\vartheta_{0x}(t) = 0\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

$\Delta t_1 \in$ [0 мин; 1 мин], равноускоренное движение:

$$\vartheta_{1x}(60\ \text{с}) = \vartheta_{0x} + a_{1x}\Delta t = 6 \cdot 60 = 360\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 3{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$\Delta t_2 \in$ [1 мин; 2 мин], равномерное прямолинейное движение:

$$\vartheta_{2x} = 360\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 3{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$\Delta t_3 \in$ [2 мин; 3 мин], равноускоренное движение:

$$\vartheta_{3x}(60\ \text{с}) = \vartheta_{2x} + a_{3x}\Delta t = 360 + 4 \cdot 60 = 600\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 6{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$\Delta t_4 \in$ [3 мин; 4 мин], равномерное прямолинейное движение:

$$\vartheta_{4x} = 600\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 6{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$\Delta t_5 \in$ [4 мин; 5 мин], равноускоренное движение:

$$\vartheta_{5x}(60\ \text{с}) = \vartheta_{4x} + a_{5x}\Delta t = 360 + (-2) \cdot 60 = 480\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 4{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$\Delta t_6 \in$ [5 мин; 6 мин], равномерное прямолинейное движение:

$$\vartheta_{6x} = 480\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 4{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Все проекции скоростей больше нуля, значит, велосипедист двигался по трассе, не разворачиваясь.

Ответ: 5).

Задача 3

Для материальной точки, движущейся по оси OX, зависимость координаты от времени выражается уравнением $x = A - Bt + Ct^2$, в котором $A = 8$ м, $B = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $C = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через время $t_1 = 5$ с после начала движения координата точки $x(t_1)$, модуль проекции перемещения $r_x(t_1)$ и путь $S(t_1)$ будут равны соответственно:

1) 13 м; 5 м; 5 м;
2) 5 м; 13 м; 5 м;
3) 13 м; 5 м; 13 м;
4) 4 м; 5 м; 9 м;
5) 9 м; 5 м; 4 м.

Решение

Подставим коэффициенты в уравнение

$$x = 8 - 4t + t^2.$$

Сравним полученное выражение с формулой $x = x_0 + \vartheta_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$.

Находим, что

$$x_0 = 8\text{м};\ \vartheta_{0x} = -4\ \frac{\text{м}}{\text{с}};\ a_x = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Координата точки в момент времени $t_1 = 5$ с:

$$x_1(5) = 8 - 4t_1 + t_1^2 = 8 - 20 + 25 = 13\ \text{м}.$$

По формуле (1.15) определим проекцию скорости в момент времени $t_1 = 5$ с:

$$\vartheta_{1x}(5) = -4 + 2t = -4 + 2\cdot 5 = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Так как $\vartheta_{0x} < 0$, но $\vartheta_{1x} > 0$, значит, точка сначала двигалась в направлении, противоположном направлению оси OX, затем с некоторого момента времени t_2 стала двигаться в обратную сторону. В этот момент проекция скорости на ось OX равна нулю:

$$\vartheta_{2x}(t_2) = -4 + 2t_2 = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}},\ \text{откуда} \Rightarrow\ t_2 = 2\ \text{с}.$$

Координата точки в этот момент остановки

$$x_2(2\ \text{с}) = 8 - 4t_2 + t_2^2 = 4\ \text{м},$$

путь $S = |x_2 - x_0| + |x_1 - x_2| = 13$ м.

Проекцию перемещения определяем как

$$r_x = x_1 - x_0 = 5\ \text{м}.$$

Графический способ определения пути и перемещения

Определив, что в течение 5 с материальная точка успела остановиться и начать двигаться в противоположном направлении, понимаем, что путь, пройденный точкой, больше её перемещения.

Определим S и r_x графическим способом.

Построим график зависимости проекции скорости $\vartheta_{1x}(5) = -4 + 2t$ (рис. 1.26).

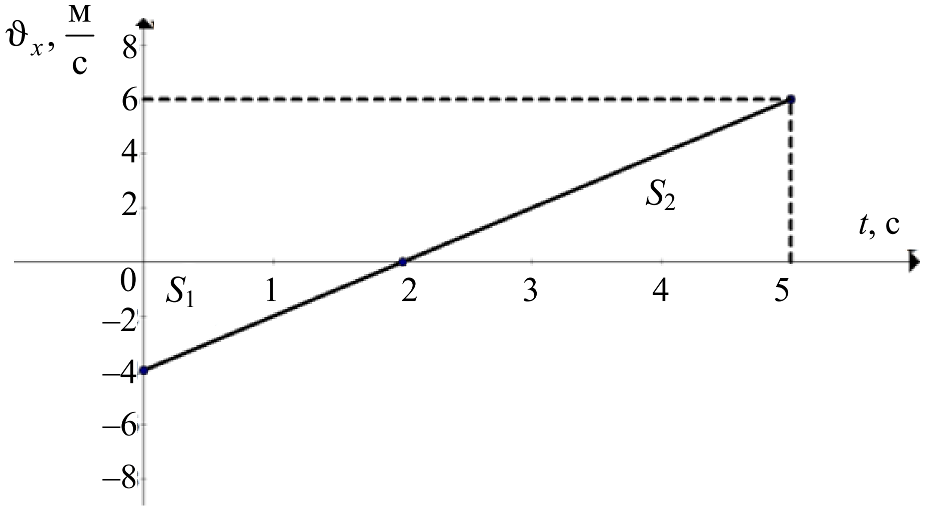


Рис. 1.26

Модуль перемещения и путь численно равны площадям фигур, ограниченным графиком скорости и осью времени.

Следовательно, путь равен сумме всех площадей:

$$S = S_1 + S_2,$$

$$S = 13 \text{ м}.$$

Проекция перемещения с учётом направления движения равна

$$r_x = -S_1 + S_2,$$

$$r_x = 5 \text{ м}.$$

Решая подобные задачи, многие учащиеся не учитывают изменения направления скорости и поэтому путь находят так же, как перемещение.

Ответ: 3).

Иногда абитуриенты забывают о том, что все кинематические величины и характеристики движения тела зависят от выбора системы отсчёта.

Задача 4

Легковой автомобиль двигался по прямолинейному участку дороги со скоростью, модуль которой $\vartheta = 36{,}0\ \frac{км}{ч}$. На дороге сидел заяц. Когда автомобиль приблизился на расстояние S = 40,0 м, заяц равноускоренно побежал вперёд в направлении движения автомобиля. Чтобы избежать столкновения, заяц должен бежать с минимальным ускорением, модуль a которого равен ... $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Решение

Начальная скорость зайца $\vartheta_{0з}$ равна нулю. Определяем минимальное ускорение зайца, значит, его скорость в момент, когда машина поравняется с ним, будет равна скорости автомобиля $\vartheta_з = \vartheta$. Свяжем систему отсчёта с зайцем. Начальная относительная скорость (скорость автомобиля относительно зайца) равна

$$\vartheta_{а/з}(0) = \vartheta - \vartheta_{0з} = \vartheta = 36{,}0\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 10{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Конечная относительная скорость равна

$$\vartheta_{2а/з} = \vartheta - \vartheta_з = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Путь, пройденный автомобилем в этой системе отсчёта $S = 40{,}0$ м, запишем, используя формулу (1.19):

$$S = \frac{\vartheta_{2а/з}^2 - \vartheta_{1а/з}^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{\vartheta_{2а/з}^2 - \vartheta_{1а/з}^2}{2S} = 1{,}25\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 125\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $125\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

В задачах, где тело после броска вертикально вверх движется прямолинейно с ускорением $\vec{g}$, полезно помнить, что время полёта вверх на максимально возможную высоту равно времени падения в первоначальную точку. Понимание этого ускоряет процесс решения задачи.

Задача 5

Камень, брошенный вертикально вверх, упал на землю через $\Delta t = 4{,}0$ с. Если сопротивлением среды пренебречь, то скорость, модуль перемещения и путь камня $(\vartheta;\ r;\ S)$ в моменты времени $t_1 = 2{,}0$ с; $t_2 = 3{,}0$ с; $t_3 = 4{,}0$ с равны.

Решение

Так как подброшенный вверх камень упал через 4 с, значит, время движения вверх до максимальной высоты $t_1 = 2$ с равно времени падения. Следовательно, скорость $\vartheta_1 = 0$, модуль перемещения и путь одинаковы и равны

$$r_x(t_1) = S(t_1) = H_{max} = \frac{gt_1^2}{2} = 20 \text{ м}.$$

Начав падать и пролетев вниз в течение $\Delta t = t_2 - t_1 = 1$ с, камень наберёт скорость $\vartheta_2 = g\Delta t = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, пролетит вниз $H_2 = \frac{gt^2}{2} = 5$ м. Значит, модуль перемещения составит к этому времени $r_x(t_2) = H_{max} - H_2 = 15$ м, путь $S(t_2) = H_{max} + H_2 =$ 25 м.

В момент падения $t_3 = 4$ с (падая в течение 2 с) скорость камня достигнет величины

$$\vartheta_3 = gt_1 = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

пройденный путь будет равен $S(t_3) = 2H_{max} =$ 40 м, а модуль перемещения $r_x(t_3) = 0$ м.

Ответ: (0 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 20 м; 20 м), (10 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 15 м; 25 м), (20 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 0 м; 40 м).

Задача 6

Поезд отошел от станции и, двигаясь равноускорено, прошел за десятую секунду путь $S_1 = 9{,}5$ м. Путь S, пройденный поездом за время $t = 20$ с, равен:

1) 95 м; 2) 100 м; 3) 190 м; 4) 200 м; 5) 295 м.

Решение

Начальная скорость поезда равна нулю. Значит, путь, пройденный поездом за десятую секунду движения, можно определить с помощью формулы (1.21):

$$S_n = (2n-1)\frac{a}{2},$$

так как n = 10, получаем

$$S_1 = S_{10\text{-}ю} = 19\frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{19}S_{10\text{-}ю} = 1{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда весь путь S, пройденный поездом за время $\Delta t = 20$ с, равен

$$S = \frac{at^2}{2} = 200 \text{ м}.$$

Ответ: 4).

Задания для самостоятельного закрепления темы

1. Из приведённых ниже зависимостей равноускоренное прямолинейное движение описывают следующие:

А) $\vartheta_x = -3t$; Г) $x = t - 5t^2$;

Б) $x = 6 - 5t$; Д) $r_x = 12t$.

В) $\vartheta_x = 2 + 3t$;

1) все; 2) А, В, Г, Д; 3) А, В, Г; 4) В, Г, Д; 5) А, Б, Д.

2. Материальная точка движется вдоль оси OX так, что график зависимости проекции её скорости ϑ_x на эту ось от времени t имеет вид, изображенный на рис. 1.24. Проекция ускорения a_x материальной точки на ось OX в момент времени $t = 2{,}5$ с равна:

1) $-2{,}5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $-1{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) $1{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; 4) $2{,}5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; 5) $3{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

3. Зависимость координаты некоторого тела от времени выражается уравнением $x = A + Bt - Ct^2$, в котором $A = 12$ м, $B = 6{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ и $C = 2{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через время $t_1 = 8$ с после начала движения координата точки $x(t_1)$, проекция перемещения $r_x(t_1)$ и путь $S(t_1)$ будут равны соответственно:

1) –68 м; 80 м; 80 м; 4) –68 м; –80 м; 89 м;

2) –68 м; –80 м; 74 м; 5) –68 м; 80 м; 74 м.

3) –80 м; –80 м; –89 м;

4. В последнюю секунду свободного падения мячик пролетел путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. Мячик упал с высоты:

1) 31,3 м; 2) 31,2 м; 3) 20,0 м; 4) 18,5 м; 5) 15,0 м.

5. Из крана капают одинаковые капли воды с промежутком времени $\Delta t_1 = 0{,}3$ с. Через промежуток времени $\Delta t_2 = 0{,}7$ с после начала падения первой капли скорость движения второй капли относительно первой $\vartheta_{1/2}$ направлена **в** ... и равна по модулю: ... $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

1) вниз ... 2 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) вверх ... 2 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) вниз ... 3 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$;

4) вверх ... 3 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; 5) вниз ... 4 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

6. Аэростат поднимается с Земли вертикально вверх с ускорением $a = 2\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через $\Delta t_1 = 5{,}0$ с от начала движения из него выпадает предмет.

$\frac{км}{ч}$

Выпавший предмет будет лететь к земле в течение промежутка времени Δt_2:

1) 1,4 с; 2) 2,2 с; 3) 2,4 с; 4) 3,4 с; 5) 4,0 с.

7. Поезд отошел от станции и, двигаясь равноускорено, за время $t = 30$ с прошел путь $S = 450$ м. Путь S_1, пройденный поездом за десятую секунду, равен:

1) 4,5 м; 2) 7,5 м; 3) 9,5 м; 4) 15 м; 5) 19 м.

8. Тело, двигаясь равноускорено и прямолинейно в положительном направлении оси OX, за первый промежуток времени $\Delta t_1 = 4$ с прошло путь $S_1 = 80$ м, а за последующий промежуток времени $\Delta t_2 = 8$ с прошло путь $S_2 = 208$ м. Модуль скорости ϑ_0 в начале первого промежутка времени движения тела равен ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

9. Самолет сначала летел равномерно и прямолинейно со скоростью, модуль которой $\vartheta_0 = 540\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а затем начал разгоняться и за четвёртую секунду равноускоренного прямолинейного движения пролетел путь $S = 185$ м. Модуль скорости самолета ϑ в конце четвёртой секунды разгона равен ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

10. Легковой автомобиль двигался по прямолинейному участку дороги со скоростью, модуль которой $\vartheta = 39{,}6\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На дороге сидел заяц. Когда автомобиль приблизился на расстояние $S = 50{,}0$ м, заяц равноускорено побежал вперёд в направлении движения автомобиля. Чтобы избежать столкновения, заяц должен бежать с минимальным ускорением, модуль **a** которого равен ... $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

11. Автомобиль, стоящий у светофора, может равноускорено разогнаться с места до максимально разрешённой скорости $\vartheta_1 = 60\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ за промежуток времени $\Delta t_1 = 6{,}0$ с. В тот момент, когда загорается зелёный свет и автомобиль начинает движение, его обгоняет грузовик, движущийся с постоянной скоростью $\vartheta_1 = 50\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Автомобиль обгонит грузовик, не нарушая правил, через промежуток времени $\Delta \boldsymbol{t_2}$, равный ... с.

12. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\vartheta_0 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Средняя путевая скорость тела $\langle\vartheta\rangle$ за всё время движения (от начала броска до возвращения в исходную точку) равна ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

13. На рис. 1.27 представлен график зависимости проекции ускорения a_x от времени t для тела, которое двигалось вдоль оси OX. Если модуль начальной скорости тела $\vartheta_{0x} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$, то путь $\boldsymbol{S}$, пройденный телом за промежуток времени $\Delta t = 3$ с (от начала отсчёта времени), равен ... м.

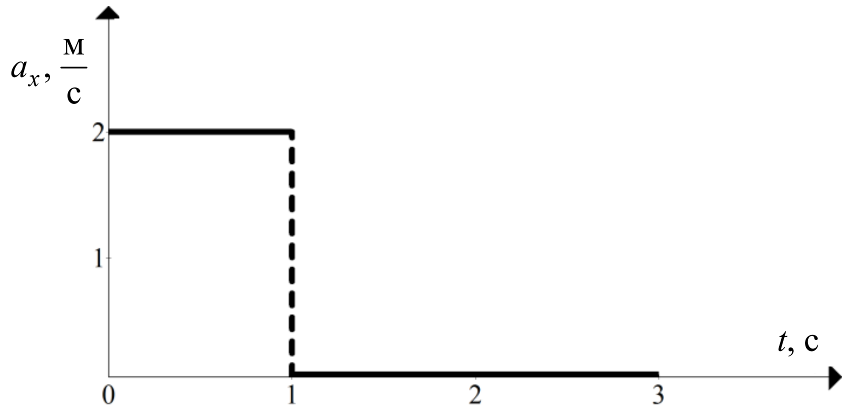


Рис. 1.27

1.5. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ГОРИЗОНТАЛЬНО

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то это движение происходит с постоянным ускорением $\vec{a}$, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз.

Ось OY направляют вертикально вверх через точку броска. Ось OX – горизонтально вдоль поверхности Земли в сторону броска (рис. 1.28).

Высоту, с которой бросают тело, обозначим H. Расстояние, на которое улетит тело по горизонтали, называется дальностью полёта и обозначается S.

Начальные условия в данной системе координат:

$x_0 = 0,\ y_0 = h,\ \vartheta_{0x} = \vartheta_0,\ \vartheta_{0y} = 0\ ,\ a_x = 0,\ a_y = -g.$

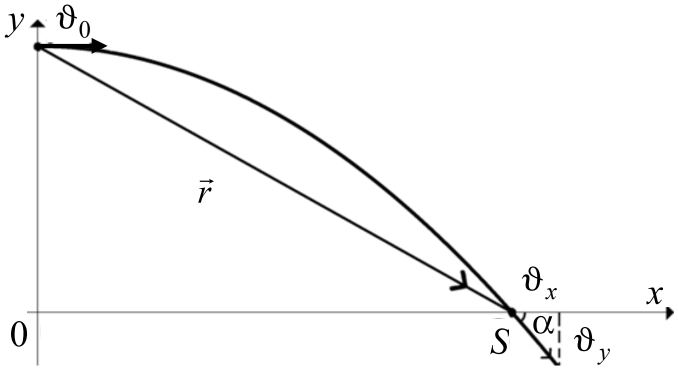


Рис. 1.28

Движение тела, брошенного горизонтально, можно представить как суперпозицию двух движений: равномерного по горизонтали со скоростью $\vartheta_{0x} = \vartheta_0$ и свободное падение по вертикали.

Из уравнений движений

$$x(t) = \vartheta_0 t, \tag{1.24}$$

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2} \tag{1.25}$$

получаем уравнение траектории

$$y(x) = h - \frac{gx^2}{2\vartheta_0^2}. \tag{1.26}$$

Траектория движения – часть параболы, ветвь которой направлена вниз.

Модуль вектора мгновенной скорости в момент времени t направлен по касательной к траектории полёта и определяется по формуле

$$\vartheta(t) = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2} = \sqrt{\vartheta_0^2 + (gt)^2}. \tag{1.27}$$

Угол α, который в момент времени t составляет вектор мгновенной скорости тела с горизонтом, определяется формулой

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\vartheta_y(t)}{\vartheta_x} = \frac{gt}{\vartheta_0}. \tag{1.28}$$

Модуль вектора перемещения

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{h^2 + S^2}. \tag{1.29}$$

Время полёта можно определить из формул максимальной высоты

$$H = \frac{gt^2}{2} \tag{1.30}$$

или дальности полёта

$$S = \vartheta_0 t. \tag{1.31}$$

Обычно, когда речь идёт о движении одного тела, брошенного горизонтально, учащиеся хорошо справляются с заданиями. Однако, когда в задачах присутствует комбинированное движение или необходимо сопоставлять параметры движения нескольких тел, возникают затруднения.

Задача 1

С самолёта, летящего горизонтально с постоянной скоростью $\vartheta_0 = 175{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ на высоте $h = 2000$ м, сброшен небольшой предмет. Через время $\Delta t_1 = 30{,}00$ с самолёт будет находиться от предмета на расстоянии ***r*** **... м**.

Решение

Самое важное в данном задании понимать, что при отсутствии силы сопротивления воздуха предмет *всё время*, пока не упадёт на землю, имея горизонтальную составляющую скорости $\vartheta_x = \vartheta_0$ и вертикальную составляющую скорости $\vartheta_y = gt$, находится *на одной вертикали с самолётом*. Рассчитаем, через какое время предмет упадёт на землю:

$$H = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 20\ \text{с}.$$

Значит, надо найти расстояние между предметом и самолётом через $\Delta t_2 = 10{,}00$ с после падения. Следовательно, необходимо высчитать расстояние, которое пролетел самолёт за Δt_2:

$$S = \vartheta_0 \Delta t_2 = 1750\ \text{м}.$$

Тогда расстояние между лежащим на земле предметом и летящим самолётом

$$r = \sqrt{h^2 + S^2} \approx 2658\ \text{м}.$$

Ответ: 2658 м.

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. Тело брошено горизонтально с высоты $h = 13{,}8$ м над поверхностью земли. Сопротивлением движению можно пренебречь. Если модуль конечной скорости тела $\vartheta = 26,0\ \frac{м}{с}$, то модуль начальной скорости тела ϑ_0 равен ... $\frac{м}{с}$.

2. Тело брошено горизонтально с начальной скоростью $\vartheta_0 = 5,0\ \frac{м}{с}$. Сопротивлением движению можно пренебречь. Если дальность полета тела S = 10 м, то оно брошено с высоты ***h*** ... **м**.

3. С некоторой высоты горизонтально брошено тело с начальной скоростью $\vartheta_0 = 5,0\ \frac{м}{с}$. Если дальность полета тела равна половине высоты, с которой оно брошено, то дальность полета ***S*** составляет ... **м**.

4. С некоторой высоты в горизонтальном направлении бросили металлический шарик со скоростью, модуль которой $\vartheta = 12\ \frac{м}{с}$. Через промежуток времени $\Delta t = 1,0$ с после момента броска модуль перемещения Δr падающего шарика составил ... **м**.

5. Тело, брошенное с башни в горизонтальном направлении, упало на расстоянии S = 20 м от основания башни. Если в момент падения на поверхность земли угол между скоростью тела и горизонтом $\alpha = 45°$, то высота основания башни ***h*** равна ... **м**.

6. С вышки высотой h = 34 м в горизонтальном направлении бросили камень. Если в момент падения на землю скорость камня направлена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, то модуль горизонтальной составляющей его скорости ϑ_x в момент соприкосновения с поверхностью земли равен ... $\frac{м}{с}$.

1.6. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПО ОКРУЖНОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ПО МОДУЛЮ ЛИНЕЙНОЙ СКОРОСТЬЮ

При описании движения тела по окружности используются следующие физические величины.

Период вращения – скалярная физическая величина, которая показывает время одного полного оборота:

$$T = \frac{\Delta t}{N}. \qquad (1.32)$$

Частота вращения – скалярная физическая величина, которая показывает число полных оборотов за единицу времени:

$$\nu = \frac{N}{\Delta t}. \tag{1.33}$$

Из выражений (1.32) и (1.33) следует, что период и частота – обратные величины:

$$T = \frac{1}{\nu}. \tag{1.34}$$

Единица измерения частоты в СИ – Герц: 1 Гц = 1 $с^{-1}$.

Линейная скорость тела:

$$\vartheta = \frac{L}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu, \tag{1.35}$$

где L – длина дуги окружности, пройденной телом за промежуток времени Δt.

Угловая скорость тела:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \tag{1.36}$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота радиус-вектора движущегося по окружности тела за промежуток времени Δt.

Из выражений (1.35) и (1.36) следует связь линейной и угловой скорости:

$$\vartheta = \omega R. \tag{1.37}$$

Центростремительное ускорение (нормальное):

$$a_{ц} = \frac{\vartheta^2}{R} = \omega^2 R = \vartheta\omega = 4\pi^2\nu^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \tag{1.38}$$

Как упоминалось в теме 1.4, центростремительное ускорение направлено по радиусу к центру окружности.

Задача 1

Мальчик равномерно вращает камень, привязанный к верёвке длиной $L = 60{,}0$ см, в вертикальной плоскости, делая $N = 150$ оборотов за время $\Delta t = 60$ с. Если верёвка обрывается в тот момент, когда линейная скорость камня направлена вертикально вверх, то он взлетает на максимальную высоту ***h***, равную ... **см**.

Решение

Максимальную высоту подъёма определим по формуле

$$h = \frac{\vartheta_0^2}{2g},$$

где ϑ_0 – линейная скорость камня, которая определяется как

$$\vartheta_0 = 2\pi R\nu,$$

где радиус окружности равен длине верёвки $R = L$; $\nu = \frac{N}{\Delta t}$ – частота вращения.

В итоге максимальная высота подъёма

$$h = \frac{4\pi^2 N^2 R^2}{2gt^2} = \frac{2\pi^2 N^2 L^2}{gt^2} = 438 \text{ см}.$$

Ответ: 438 см.

Задача 2

Точка движется по окружности с постоянной скоростью $\vartheta = 1{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Если за время $\Delta t = 3$ с вектор скорости изменит своё направление на угол $\Delta\varphi = 45°$, то её центростремительное ускорение $\boldsymbol{a}_\text{ц}$ равно ... $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Решение

Центростремительное ускорение можно определить следующим образом:

$$a_\text{ц} = \vartheta\omega,$$

где ϑ и ω – линейная и угловая скорости точки соответственно.

Угловая скорость по определению равна

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$ рад.

Искомое центростремительное ускорение

$$a_\text{ц} = \vartheta\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\vartheta\pi}{4\Delta t} = 47\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: 47 $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Задача 3

Мальчик и девочка катаются на детской карусели в виде горизонтального диска радиусом $R = 1{,}5$ м. Скорость мальчика, стоящего на краю карусели, $\vartheta_1 = 3{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Скорость девочки ϑ_2, стоящей на $L = 0{,}5$ м ближе к центру вращения, равна ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение

Катаясь на каруселях, дети вращаются с одинаковой частотой. Из формулы (1.35) зависимости скорости ϑ от частоты ν имеем

$$\vartheta = 2\pi R\nu \Rightarrow \nu = \frac{2\pi R}{\vartheta}.$$

Радиус окружности, по которой вращается мальчик, $R = 1{,}5$ м.

Радиус окружности девочки меньше на $L = 0{,}5$ м.

Получаем равенство

$$\frac{2\pi R}{\vartheta_1} = \frac{2\pi(R - L)}{\vartheta_2} \Rightarrow \vartheta_2 = \frac{(R - L)\vartheta_1}{R} = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $2{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. Волчок, вращающийся с частотой $\nu = 50{,}0\ \text{с}^{-1}$, свободно падает с высоты $h = 20$ м. За время падения волчок сделает N полных оборотов, в количестве ... .

2. Точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью $\vartheta = 25\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. За время $\Delta t = 1{,}5$ с вектор скорости точки изменяет свое направление на угол $\Delta\varphi = 135°$. Центростремительное ускорение точки $\boldsymbol{a}_{\text{ц}}$ равно ... $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

3. При равномерном вращении по окружности материальная точка за промежуток времени $\Delta t = 20$ с прошла путь $S = 16$ м. Если угловая скорость равномерного вращения точки $\omega = 2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, то радиус $\boldsymbol{R}$ окружности равен ... **см**.

4. Угол поворота φ колеса вокруг неподвижной оси, совпадающей с его осью вращения, изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = At$, где $A = 16\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$. Период $\boldsymbol{T}$ вращения колеса равен ... **мс**.

5. Если минутная стрелка часов на 20 % длиннее секундной, то отношение модуля линейной скорости конца секундной стрелки к модулю линейной скорости конца минутной стрелки $\dfrac{\vartheta_{\text{с}}}{\vartheta_{\text{мин}}}$ равно ... .

6. Модуль линейной скорости точек, лежащих на ободе равномерно вращающегося колеса, $\vartheta_1 = 9{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, а точек, расположенных ближе к оси вращения, $\vartheta_2 = 5{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Если модуль цетростремительного ускорения точек, расположенных на ободе, составляет $a_{\text{ц}} = 100\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$, то расстояние $\boldsymbol{L}$ между точками равно ... **см**.

7. Тонкостенный шар радиусом R = 100 см вращается с угловой скоростью $\omega = 628\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$ относительно оси, проходящей через его центр. Шар пробивается вдоль диаметра летящей пулей так, что в оболочке шара остаётся только одно отверстие. Модуль минимальной скорости пули ϑ_1 составляет ... $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

8. Линейная скорость точек на ободе колеса $\vartheta_1 = 10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, а точек, находящихся на L = 20,0 см ближе к центру, $\vartheta_1 = 50\ \dfrac{\text{дм}}{\text{с}}$. За промежуток времени t = 6,28 с колесо сделает число оборотов $\boldsymbol{N}$ ... .

9. Радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м. В результате суточного вращения Земли модуль линейной скорости точек земной поверхности ϑ на широте $\varphi = 60°$ равен ... $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

10. Кольцо сварено из двух полуколец радиуса R = 100 см, скорости звука в которых равны $\vartheta_1 = 5{,}00 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ и $\vartheta_2 = 4{,}00 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Волны, возбуждённые ударом по точке сварки, встретятся через время t, равное ... .

1) $1{,}41 \cdot 10^{-3}$ с; 3) $7{,}07 \cdot 10^{-4}$ с; 5) $3{,}49 \cdot 10^{-4}$ с.
2) $1{,}06 \cdot 10^{-3}$ с; 4) $6{,}98 \cdot 10^{-4}$ с;

2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ

2.1. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Первый закон Ньютона

Тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока оно не понуждается внешними силами изменить это состояние.

Свойство тела при отсутствии внешних воздействий сохранять неизменным состояние своего движения называется *инертностью*. Движение тела, свободного от внешних воздействий, называется *движение по инерции*. Поэтому первый закон Ньютона известен как *закон инерции*. Если тело, которое покоится или движется равномерно и прямолинейно, выбрать за тело отсчёта, то связанная с ним система будет инерциальной. Тогда первый закон будет сформулирован следующим образом: существуют такие системы отсчёта, в которых уединённое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Второй закон Ньютона

В инерциальной системе отсчёта равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна произведению массы тела на сообщаемое ему ускорение

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.1}$$

Сила – векторная физическая величина, которая является мерой ускорения, приобретаемого телами при их взаимодействии. Сила характеризуется точкой приложения, направлением, модулем.

Равнодействующая сила является векторной суммой всех сил, приложенных к телу:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots + \overrightarrow{F}_N. \tag{2.2}$$

Следовательно, второй закон Ньютона математически имеет выражение

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots + \overrightarrow{F}_N = m\vec{a}. \tag{2.3}$$

Третий закон Ньютона

В инерциальной системе отсчёта силы, с которыми взаимодействуют две любые материальные точки, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей их:

$$\overrightarrow{F}_{1\text{на}2} = -\overrightarrow{F}_{2\text{на}1}. \tag{2.4}$$

Взаимодействие тел осуществляется либо при их непосредственном контакте, либо посредством силового поля, которое является промежуточным звеном, передающим взаимодействие.

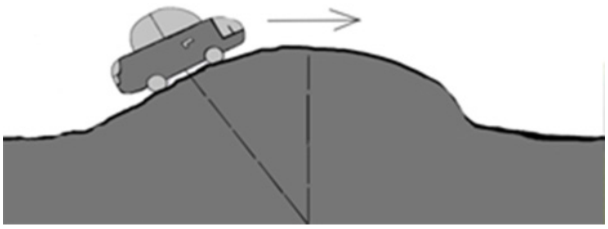
В механике, основанной на законах Ньютона, считается, что время течёт во всех инерциальных системах отсчёта одинаково; масса тела – величина постоянная; ускорение тела и силы взаимодействия между телами не зависят от скорости движения инерциальной системы отсчёта.

Часто учащиеся и абитуриенты проявляют неполное усвоение законов Ньютона, упуская векторный характер силы и ускорения, путают причинно-следственную связь между силой и ускорением, не понимают связи между законами Ньютона, что приводит к их формальному усвоению и к ошибкам при ответах на вступительных испытаниях. Рассмотрим задания на примерах.

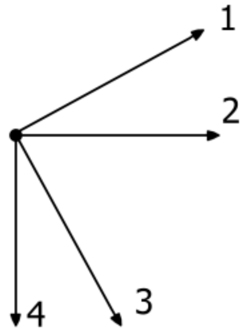
Задача 1

Автомобиль поднимается на холм с постоянной по модулю скоростью (рис. 2.1, *а*). Направление равнодействующей всех сил, приложенных к автомобилю, на рис. 2.1, *б* обозначено цифрой:

1) равнодействующая всех сил равна нулю;
2) равнодействующая всех сил равна единице;
3) равнодействующая всех сил равна двум;
4) равнодействующая всех сил равна трем;
5) равнодействующая всех сил равна четырём.



а



б

Рис. 2.1

Решение

В данной задаче важно учитывать не только постоянную по модулю скорость движения, но и криволинейный характер движения автомобиля. Из этих двух условий следует, что машина имеет центростремительное ускорение, которое направлено по радиусу кривизны траектории. Направление равнодействующей всех сил, приложенных к автомобилю, совпадает с направлением вектора ускорения. Значит, ответ 3).

Ответ: 3).

Задача 2

Тело двигалось в пространстве под действием трех постоянных по направлению сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$. Модуль первой силы $F_1 = 20$ Н, второй – $F_2 = 33$ Н. Модуль третьей силы на разных участках пути приведен в таблице

№ участка	1	2	3	4	5
F_3, Н	5,0	9,0	11	35	55

Если известно, что только на одном участке тело двигалось равномерно, то в таблице этот участок обозначен номером:

1) 1;   2) 2;   3) 3;   4) 4;   5) 5.

Решение

В задаче следует найти участок равномерного и прямолинейного движения тела под действием трёх сил, значит, на искомом участке ускорение тела $\vec{a} = 0$, так как результирующая сила, действующая на тело,

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = 0.$$

Однако неизвестна взаимная ориентация векторов этих сил, и невозможно выполнить сложение векторов. Значит, найдём диапазон, которому может принадлежать модуль силы F_3. Если первая и вторая силы направлены в противоположные стороны, то сила $\vec{F_3}$ должна быть добавлена к меньшей силе $\vec{F_1}$, чтобы вместе компенсировать силу $\vec{F_2}$.

Значит, минимальное значение модуля $\vec{F_3}$ будет равно

$$F_3 = F_2 - F_1 = 13 \text{ Н}.$$

Если первая и вторая силы направлены в одну сторону, то сила $\vec{F_3}$ должна компенсировать их векторную сумму. Значит, максимальное значение модуля $\vec{F_3}$ будет равно

$$F_3 = F_2 + F_1 = 53 \text{ Н}.$$

Запишем диапазон, которому может принадлежать модуль силы F_3:

$$F_3 \in [13; 53].$$

Из табличных данных находим значение модуля третьей силы:

$$F_3 = 35 \text{ Н}.$$

Ответ: 4).

Задача 3

Кинематический закон движения тела вдоль оси OX имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ м, $B = 4 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $C = 5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Если проекция равнодействующей силы, приложенной к телу, $F_x = 20$ Н, то масса m тела равна:

1) 2 кг; 2) 3 кг; 3) 4 кг; 4) 5 кг; 5) 6 кг.

Решение

Согласно второму закону Ньютона, $F_x = ma_x$.

Следовательно, чтобы определить массу тела, необходимо знать проекцию ускорения a_x на ось OX.

Подставляем значения коэффициентов в кинематический закон движения

$$x(t) = 3 + 4t + 5t^2$$

и, сопоставив с формулой $x(t) = x_0 + \vartheta_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$, определяем значение проекции ускорения $a_x = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Значит, $m = \frac{F_x}{a_x} = 2$ кг.

Ответ: 1).

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. Если равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, которая находится в инерциальной системе отсчета, равна нулю, то она:

1) всегда находится в состоянии покоя;

2) движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя;

3) всегда движется равномерно и прямолинейно;

4) движется по окружности с постоянной по модулю скоростью;

5) свободно падает.

2. Равнодействующая всех сил, действующих на шарик (рис. 2.2), привязанный к нити и движущийся по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной по модулю скоростью:

1) равна нулю;

2) направлена вниз;

3) направлена вправо;

4) направлена по нити к точке подвеса;

5) направлена по радиусу к центру окружности вращения.

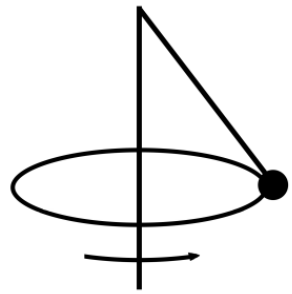


Рис. 2.2

3. График зависимости проекции скорости ϑ_x материальной точки, движущейся вдоль оси *OX*, на эту ось от времени *t* изображён на рис. 2.3.

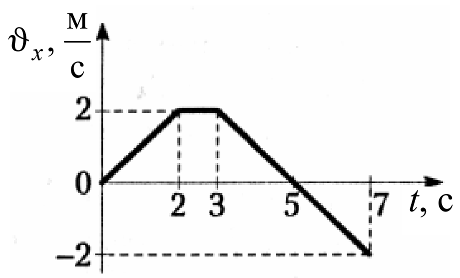


Рис. 2.3

Если F_x – проекция на ось *OX* равнодействующей всех сил, приложенных к этой точке, то из приведённых утверждений верным(ми) являются:

А) $\Delta t \in$ [0 с; 2 с] и [2 с; 3 с], $F_x > 0$;

Б) $\Delta t \in$ [3 с; 5 с], $F_x < 0$;

В) $\Delta t \in$ [5 с; 7 с], $F_x < 0$;

Г) $\Delta t \in$ [5 с; 7 с], $F_x > 0$;

Д) $\Delta t \in$ [0 с; 2 с] и [5 с; 7 с], $F_x > 0$.

1) А; 2) Б, Д; 3) Б, В; 4) Б, Г; 5) Д.

4. Зависимость проекции скорости тела, движущегося вдоль оси OX, на эту ось от времени имеет вид $\vartheta_x = A + Bt$, где $A = 2{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $B = 0{,}50\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Если модуль равнодействующей всех сил, приложенных к телу, $F = 3{,}0$ Н, то его масса m равна:

1) 2,0 кг; 2) 4,0 кг; 3) 6,0 кг; 4) 8,0 кг; 5) 2,0 кг.

5. На тело массой $m = 4$ кг действуют три силы $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ (рис. 2.4).

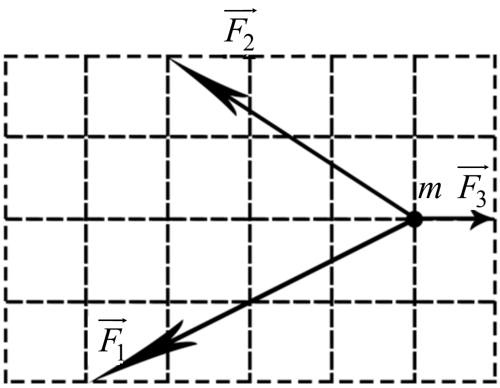


Рис. 2.4

Если горизонтальная составляющая первой силы $\vec{F_1}$ равна 24 Н, то модуль ускорения a тела равен:

1) $2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 2) $4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 3) $6\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 4) $8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 5) $10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

6. Если на покоящуюся материальную точку O начинают действовать четыре силы $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$ (рис. 2.5), то точка:

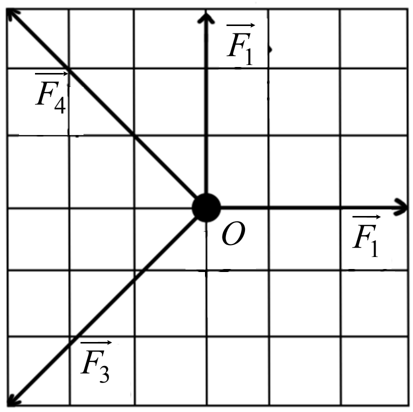


Рис. 2.5

1) начнёт двигаться в направлении силы $\vec{F}_1$;

2) начнёт двигаться в направлении силы $\vec{F}_2$;

3) начнёт двигаться в направлении силы $\vec{F}_3$;

4) начнёт двигаться в направлении силы $\vec{F}_4$;

5) останется в состоянии покоя.

7. На рис. 2.6 показана зависимость проекции скорости ϑ_x от времени t, проекция равнодействующей всех сил, приложенных к телу положительна в точке(ах):

1) 1, 3; 2) 2, 3; 3) 2, 4; 4) 3, 4; 5) 1, 5.

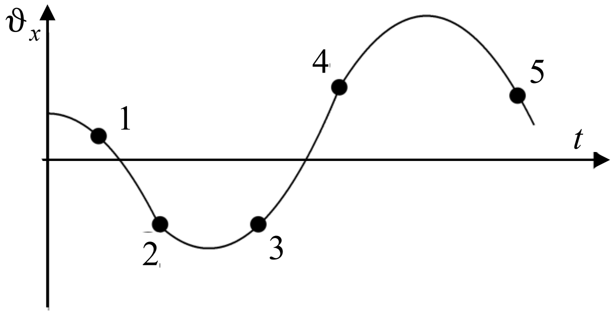


Рис. 2.6

8. Ребёнок везёт санки по заснеженной дороге с постоянной по модулю скоростью, прилагая силу $\vec{F}$ (рис. 2.7). Кроме того, на санки действуют следующие силы: сила тяжести санок $m\vec{g}$, сила трения скольжения $\overrightarrow{F_{тр}}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$.

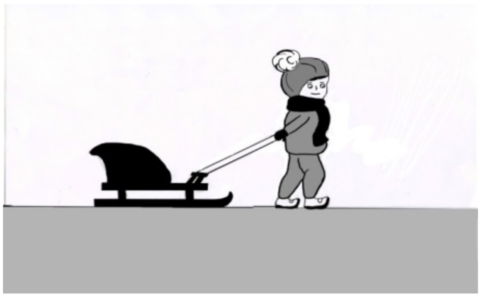


Рис. 2.7

Между модулями сил выполняются следующие соотношения:

1) $F = F_{тр}$; $N = mg$;

2) $F = F_{тр}$; $N < mg$;

3) $F > F_{тр}$; $N < mg$;

4) $F > F_{тр}$; $N > mg$;

5) $F < F_{тр}$; $N = mg$.

2.2. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ

Умение решать задачи на законы Ньютона – это важный показатель того, что абитуриент понимает физические процессы, описанные в задаче, находит связи между ними. Важно знать, что динамические задачи будут рассматриваться и в других разделах физики (например, движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях).

Рекомендации по решению задач

1. Сделать рисунок, указать все силы, действующие на тело.
2. Если тело движется с ускорением, указать направление его вектора.
3. Нарисовать оси OX и OY декартовой системы координат. Удобно совмещать ось OX с направлением вектора ускорения.
4. Записать уравнение второго закона Ньютона в векторном виде, указав в нём силы, действующие на тело, согласно условию задачи.
5. Записать полученное уравнение в проекциях на оси OX и OY.
6. Указать дополнительные формулы, необходимые в каждой конкретной задаче.

Как правило, необходимо помнить о следующих понятиях и формулах:

● вес тела $\vec{P}$ – сила, с которой тело давит на опору или подвес. По третьему закону Ньютона, если тело находится на поверхности, вес тела равен по модулю и противоположен по направлению силе нормальной реакции опоры $\vec{N}: |P| = |N|$. Если тело висит на нити: $|P| = |F_н|$, где $\vec{F_н}$ – сила натяжения нити, приложенная к телу и направленная всегда вдоль нити;

● сила трения скольжения $F_{тр.ск} = \mu N$, μ – коэффициент трения. Следует иметь в виду, что сила трения скольжения всегда направлена в сторону, противоположную направлению скорости тела. Под действием силы трения скольжения тело может остановиться, тогда сила трения скольжения исчезнет. Если в задаче не указано, движется ли тело, необходимо провести исследование о его состоянии (покой или скольжение) и определить значение силы трения скольжения или покоя (задачи 2 и 3);

● при наличии в задачах пружин, растяжимых эластичных лент использовать закон Гука для упругих деформаций: $|F_{упр.}| = k\Delta x$, где k – коэффициент жёсткости, Δx – величина деформации;

● кинематические уравнения;

● понятия давления, плотности и др.

7. Решить полученную систему уравнений относительно неизвестных величин.
8. Вычислить и записать ответ.

Рассмотрим применение данных рекомендаций при решении задач.

Движение тел в горизонтальном и вертикальном направлениях

Задача 1

Лифт начинает движение вверх с ускорением $a = 2{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. На полу лифта лежит куб, сделанный из материала плотностью $\rho = 0{,}7\ \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Если давление куба на пол составляет $p = 4{,}2$ кПа, то длина L ребра куба равна ... **см**.

Решение

В задаче речь идёт о давлении куба p на пол, которое определяется как

$$p = \frac{F_\text{д}}{S}, \qquad (2.5)$$

где $F_\text{д}$ – сила давления (вес тела), S – площадь грани куба.

На куб, лежащий в лифте, действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 2.8).

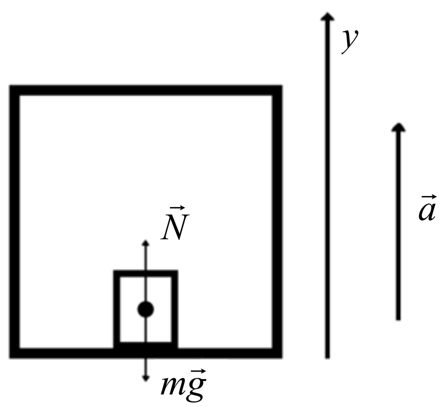


Рис. 2.8

По третьему закону Ньютона, вес куба по модулю равен силе $\vec{N}$:

$$\left|F_\text{д}\right| = \left|N\right|.$$

Определив силу реакции опоры и подставив в выражение (2.5), мы можем найти длину ребра куба.

Ось OY направим вертикально вверх.

Запишем уравнение второго закона Ньютона в данной ситуации:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N},$$

OY: $ma = N - mg \Rightarrow N = ma + mg = m(a+g)$.

Подставим в (2.5):

$$p = \frac{m(a+g)}{L^2},$$

где $m = \rho V = \rho L^3$.

$$p = \frac{\rho L^3(a+g)}{L^2} = \rho L(a+g) \Rightarrow L = \frac{p}{\rho(a+g)} = \frac{4{,}2 \cdot 10^3}{700(2{,}0+10)} = 0{,}5 \text{ м} = 50 \text{ см}.$$

Ответ: 50 см.

В данной задаче получили, что вес P куба был больше силы тяжести $|P| = |N| > mg$. Такое состояние называется *перегрузкой*.

Задача 2

Брусок массой m = 3,0 кг лежит на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $\mu = 0{,}4$. К бруску под углом $\alpha = 60°$ приложена сила F, модуль которой возрастает пропорционально времени от 0 до 15 Н за Δt = 3 с. Модуль силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ через $\Delta t = 2$ с после начала действия силы равен ... **Н**.

Решение

Так как модуль приложенной к бруску внешней силы возрастает пропорционально времени от 0 до 15 Н за $\Delta t = 3$ с, запишем зависимость $F(t)$ и определим значение приложенной силы через $t = 2$ с:

$$F(t) = 5t \Rightarrow F(2) = 5t = 10 \text{ Н}.$$

На рис. 2.9 обозначим силы, действующие на брусок.

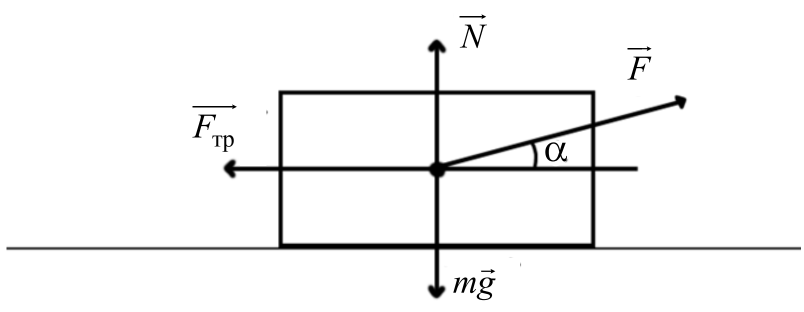


Рис. 2.9

Запишем уравнение второго закона Ньютона, учитывая, что брусок лежит ($a = 0$):

$$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}} + \vec{F},$$

где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{N}$ – сила нормальной реакции опоры; $\vec{F}$ – внешняя сила; $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ – сила трения.

Ось OX направим вдоль поверхности в сторону действия внешней силы, ось OY – перпендикулярно плоскости поверхности.

Тогда $F_x(2\ \text{с}) = F\cos\alpha = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5{,}0$ Н.

Если проекция внешней силы $F_x(2\ \text{с}) \geq F_{\text{тр. ск}}$, то брусок сдвинется с места и будет скользить. Тогда $F_{\text{тр. ск}}$ – сила трения скольжения будет определяться по формуле $F_{\text{тр. ск}} = \mu N$.

Если $F_x(2\ \text{с}) < F_{\text{тр. ск}}$, то брусок останется в покое. Тогда $F_{\text{тр. пок}}$ – сила трения покоя будет равна $F_{\text{тр. пок}} = F_x(2\ \text{с})$.

Для получения результата необходимо вычислить силу трения скольжения.

Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось OY:

$$0 = F(2\ \text{с})\sin\alpha + N - mg;$$

$$N = mg - F(2\ \text{с})\sin\alpha.$$

$$F_{\text{тр. ск}} = \mu N = \mu(mg - F(2\ \text{с})\sin\alpha) = 0{,}4\left(3 \cdot 10 - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8{,}5\ \text{Н}.$$

Получаем, что $F_x(2\ \text{с}) < F_{\text{тр. ск}}$, значит, брусок через $t = 2$ с продолжает оставаться в покое:

$$F_{\text{тр. пок}} = F_x(2\ \text{с}) = 5{,}0\ \text{Н}.$$

Ответ: 5,0 Н.

Движение тел по наклонной плоскости

При движении тела по наклонной плоскости для упрощения решения ось OX направляют вдоль наклонной плоскости.

Задача 3

Брусок массой $m = 1{,}5$ кг находится на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Если коэффициент трения $\mu = 0{,}7$, то сила взаимодействия бруска с поверхностью $\boldsymbol{F}_{\text{вз}}$ при значениях угла $\alpha = 30°$ и $\alpha = 45°$ будет равна ... **Н**.

Решение

В задаче необходимо найти силу взаимодействия тела с поверхностью, которую можно определить по формуле

$$F_{\text{вз}} = \sqrt{N^2 + F_{\text{тр}}{}^2}, \tag{2.6}$$

где N – сила нормальной реакции опоры, $F_{\text{тр}}$ – сила трения.

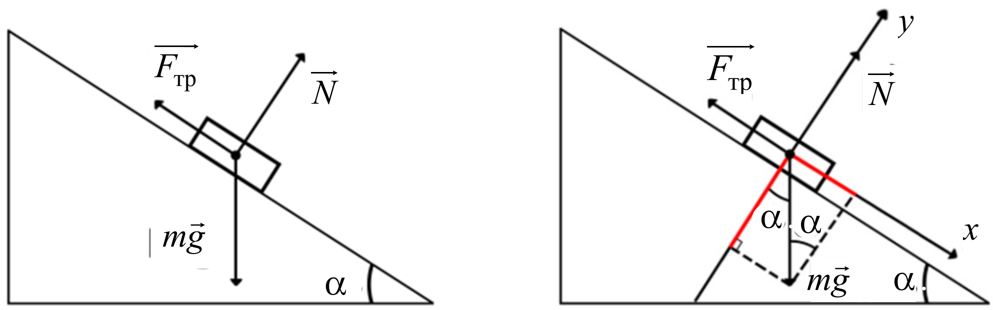
Значит, надо исследовать значение силы нормальной реакции опоры и значение силы трения.

Согласно рис. 2.10, *а*, запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}},$$

где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{N}$ – сила нормальной реакции опоры; $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ – сила трения.

Ось OX направим вдоль поверхности вниз, ось OY – перпендикулярно плоскости поверхности и запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси (рис. 2.10, *б*).



а *б*

Рис. 2.10

Найдём условие, при котором тело покоится ($a = 0$) на наклонной плоскости.

$$OX:\ 0 = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}},$$

$$OY:\ 0 = N - mg\cos\alpha.$$

Следовательно, $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha$,

$$N = mg\cos\alpha.$$

При скольжении $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Тело будет покоиться при условии, что

$$\mu N > mg\sin\alpha \Rightarrow \mu mg\cos\alpha > mg\sin\alpha,$$

$$\mu > \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2.7)$$

Делаем вывод, что если:

а) $\mu > \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$ тело покоится $\Rightarrow$ сила трения определяется как

$$F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha;$$

б) $\mu \le \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$ тело скользит $\Rightarrow$ сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Согласно условию задачи, $\mu = 0,7$.

Если $\alpha = 30° \Rightarrow \operatorname{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mu > \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$ покой $\Rightarrow F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha \Rightarrow$

$$F_{\text{вз}} = \sqrt{N^2 + (\text{mg}\sin\alpha)^2},$$

$$F_{\text{вз}} = \sqrt{(\text{mg}\cos\alpha)^2 + (\text{mg}\sin\alpha)^2} = mg,$$

$$F_{\text{вз}} = 15 \text{ Н}.$$

Если $\alpha = 45 \Rightarrow \operatorname{tg}45 = 1 \Rightarrow \mu < \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$ скольжение $\Rightarrow F_{\text{тр}} = \mu N \Rightarrow$

$$F_{\text{вз}} = \sqrt{N^2 + (\mu\text{N})^2} = N\sqrt{1+\mu^2} = mg\cos\alpha\sqrt{1+\mu^2} = 13 \text{ Н}.$$

Ответ: 15 Н; 13 Н.

Задача 4

Брусок начинает скользить вверх по наклонной плоскости с некоторой начальной скоростью. Если плоскость составляет угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, коэффициент трения $\mu = 0,3$, и брусок пройдет до остановки расстояние S = 3,5 м, то начальная скорость ϑ_0 бруска равна ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение

Изобразим на рис. 2.11 силы, действующие на брусок, направление ускорения, запишем уравнение второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}},$$

где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{N}$ – сила нормальной реакции опоры; $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ – сила трения скольжения.

Обратим внимание, что брусок начал движение после сообщения ему начальной скорости ϑ_0, сила тяги в задаче отсутствует.

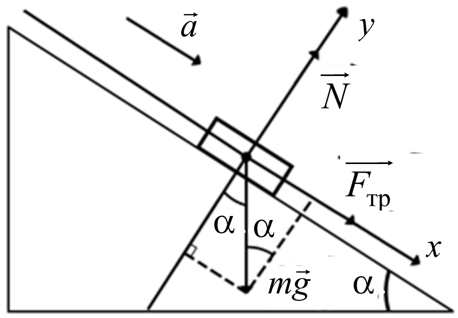


Рис. 2.11

Ось OX направим вдоль поверхности вниз, ось OY – перпендикулярно плоскости поверхности и запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси (рис. 2.11).

$$OX:\ ma = mg\sin\alpha + F_{\text{тр}},$$

$$OY:\ 0 = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha.$$

Брусок скользит, значит, $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$

Из раздела кинематики $a = \dfrac{\vartheta_0^{\ 2}}{2S}.$

После подстановки получаем

$$\frac{m\vartheta_0^{\ 2}}{2S} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha,$$

$$\vartheta_0 = \sqrt{2Sg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = \sqrt{2\cdot 3{,}5\cdot 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 8{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $8{,}0\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}.$

Движение системы связанных тел

При движении связанных тел уравнения Ньютона записываются для каждого тела.

Направления осей для каждого тела могут отличаться.

Если нить, связывающая тела, нерастяжимая, то тела движутся с одинаковым по модулю ускорением.

Если нить, связывающая тела, невесомая, то сила натяжения нити $F_{\text{н}} = \text{const}$ в любой точке нити.

Задача 5

Брусок массой M, находящийся на горизонтальной поверхности стола, связан невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через лёгкий блок, вращающийся без трения, с грузом массой $m = 0{,}80$ кг. Система находится в лифте, движущемся вертикально вниз с ускорением, модуль которого $a = 2{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (рис. 2.12, *а*).

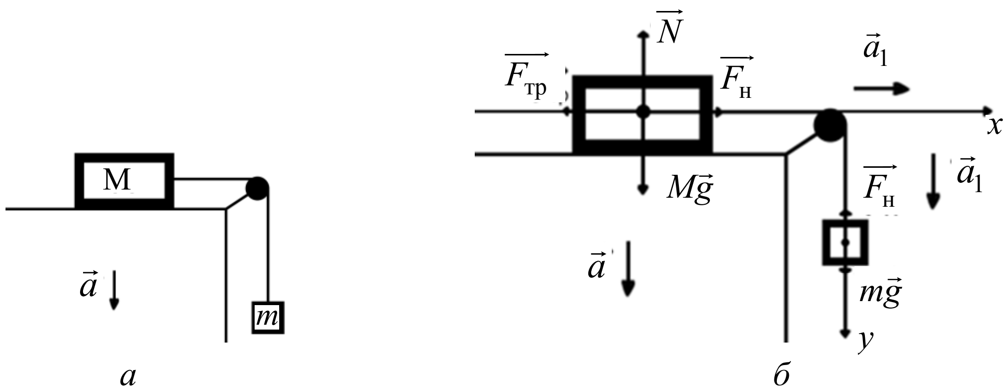


Рис. 2.12

Коэффициент трения скольжения между бруском и поверхностью стола $\mu = 0{,}20$. Если модуль силы натяжения нити $F_{\text{н}} = 6{,}0$ Н, то масса бруска M равна:

1) 0,9 кг; 2) 1,9 кг; 3) 2,9 кг; 4) 3,9 кг; 5) 4,9 кг.

Решение

Данную задачу можно решать как в ИСО, связанной с поверхностью земли, так и в НСО, связанной с лифтом.

Разберём решение в ИСО относительно поверхности земли.

Изобразим на рисунке силы, действующие на брусок и груз, направление ускорения каждого тела $\vec{a}_1$ и лифта $\vec{a}$ (рис. 2.12, *б*) и запишем уравнения второго закона Ньютона для каждого тела:

$m\left(\vec{a}_1 + \vec{a}\right) = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{н}}}$ – для груза;

$M\left(\vec{a}_1 + \vec{a}\right) = \overrightarrow{Mg} + \overrightarrow{F_{\text{н}}} = \overrightarrow{F_{\text{тр}}} + \overrightarrow{N}$ – для бруска;

$m\vec{g}$ – сила тяжести груза;

$\overrightarrow{F_{\text{н}}}$ – сила натяжения нити;

$M\vec{g}$ – сила тяжести бруска;

$\vec{N}$ – сила нормальной реакции опоры;

$\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ – сила трения скольжения.

Ось OX направим горизонтально вправо, ось OY – вертикально вниз и запишем уравнения для груза и бруска в проекциях на оси:

$$OX: Ma_1 = F_\text{н} - F_\text{тр},$$

$$OY:\ Ma = Mg - N,$$

$$OY:\ m(a + a_1) = mg - F_\text{н}.$$

Так как $F_\text{тр} = \mu N$, то получаем $N = M(g - a) \Rightarrow F_\text{тр} = \mu M(g - a)$.

Составляем систему

$$\begin{cases} Ma_1 = F_\text{н} - \mu M(g - a), \\ ma_1 = m(g - a) - F_\text{н}. \end{cases}$$

Рационально умножить обе части первого уравнения системы на m, второго – на M. Тогда левые части уравнений равны, значит, приравняем правые части:

$$mF_\text{н} - \mu mM(g - a) = mM(g - a) - MF_\text{н},$$

выражаем искомую массу бруска:

$$M = \frac{mF_н}{m(g - a)(\mu + 1) - F_\text{н}}.$$

Численно:

$$M = \frac{0{,}80 \cdot 6{,}0}{0{,}80(10 - 2)(0{,}20 + 1) - 6{,}0} = 2{,}9\ \text{кг}.$$

Ответ: 3).

Движение тел по окружности

При равномерном движении тела по окружности равнодействующая сила сообщает телу центростремительное (нормальное) ускорение $\vec{a_\text{ц}}\left(\vec{a_n}\right)$, направленное вдоль радиуса к центру описываемой окружности.

При неравномерном движении скорость меняется не только по направлению, но и по модулю. В результате тело имеет центростремительное (нормальное) $\vec{a_n}$ и касательное (тангенциальное) $\vec{a_\tau}$ ускорения, векторы которых взаимно перпендикулярны.

В школьном курсе физики рассматриваются задачи с использованием нормального (центростремительного) ускорения.

Задача 6 (конический маятник)

Шарик массой $m = 0{,}2$ кг, подвешенный на нерастяжимой упругой нити, равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая $N = 5$ оборотов за промежуток времени $\Delta t = 5{,}0$ с. При этом нить длиной $l = 50$ см отклонена от вертикали на угол α, равный:

1) 20°; 2) 30°; 3) 45°; 4) 60°; 5) 90°.

Решение

Изобразим на рисунке силы, действующие на шарик (рис. 2.13, *а*).

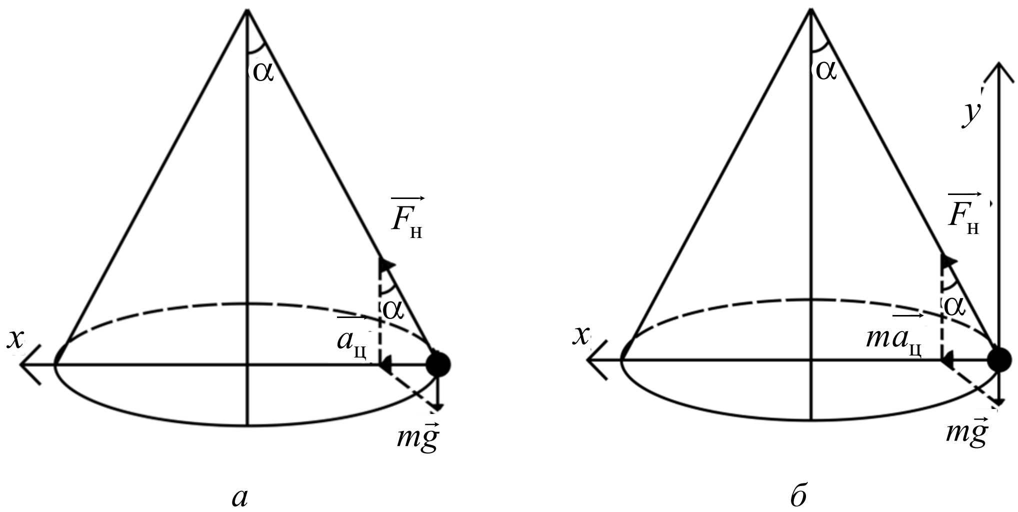


Рис. 2.13

Запишем уравнение второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н,$$

где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{F}_н$ – сила натяжения нити.

Ось OX направим горизонтально вдоль радиуса, ось OY – вертикально вверх (рис. 2.13, *б*) и запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси:

$$OX:\ ma_ц = F_н \sin\alpha,$$

$$OY:\ 0 = F_н \cos\alpha - mg \Rightarrow mg = F_н \cos\alpha.$$

Разделим первое уравнение на второе и получим

$$\frac{a_ц}{g} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для получения ответа необходимо расписать формулы для центростремительного ускорения:

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 R = (2\pi\nu)^2 R = 4\pi^2 \left(\frac{N}{t}\right)^2 R = \frac{4\pi^2 N^2}{t^2} l \sin\alpha,$$

где ν – частота вращения; R – радиус окружности, которую описывает шарик.

После подстановки определяем искомый угол:

$$\frac{4\pi^2 N^2}{t^2} l \sin\alpha = g \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{4\pi^2 N^2}{t^2} l = g \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\cos\alpha = \frac{gt^2}{4\pi^2 N^2 l}.$$

Численно:

$$\cos\alpha = \frac{10 \cdot 25}{4(3{,}14)^2 \cdot 25 \cdot 50{,}5 \cdot 10^{-2}} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°.$$

Ответ: 4).

Задача 7

Грузовой автомобиль массой $M = 4{,}0$ т движется с постоянной скоростью $\upsilon = 54 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ по вогнутому мосту, радиус кривизны которого составляет $R = 0{,}1$ км. В тот момент, когда линия, соединяющая центр кривизны моста с автомобилем, составляет угол $\alpha = 60°$ с вертикалью, автомобиль давит на мост с силой $\boldsymbol{F}$, равной ... **кН**.

Решение

Необходимо определить модуль силы давления F автомобиля в определённом месте моста. По третьему закону Ньютона, со стороны моста на автомобиль будет действовать сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, причем $|F| = |N|$. Следовательно, наша задача найти значение силы нормальной реакции опоры.

На рис. 2.14 укажем центростремительное ускорение, направленное по радиусу к центру кривизны, силу тяжести $m\vec{g}$ и силу нормальной реакции опоры $\vec{N}$. Ось OY сонаправим с центростремительным ускорением в исследуемой точке. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на ось OY:

$ma_{ц} = N - mg\cos\alpha$, значит, искомая сила давления будет выражаться формулой

$$N = mg\cos\alpha + ma_{ц} = m\left(g\cos\alpha + \frac{\vartheta^2}{R}\right).$$

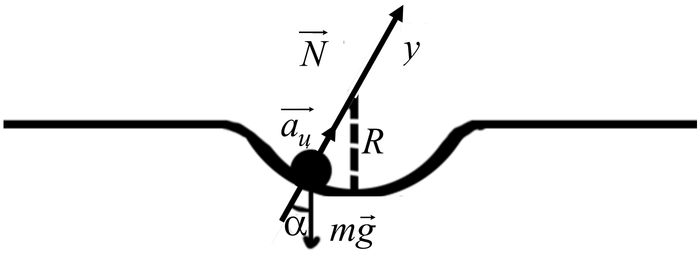


Рис. 2.14

Численно:

$$N = 4 \cdot 10^3\left(10 \cdot \frac{1}{2} + \frac{225}{100}\right) = 29 \text{ кН}.$$

Ответ: 29 кН.

Задачи с применением закона всемирного тяготения

К задачам на динамику вращательного движения относятся и задачи на движение спутников и планет. Предполагается, что движение спутников и планет совершается под действием силы тяготения.

Закон всемирного тяготения:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.8}$$

где F – модуль силы взаимного притяжения двух тел массами m_1 и m_2; r – расстояние между центрами этих тел; G – гравитационная постоянная, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Модуль ускорения свободного падения g_0 у поверхности Земли (планеты):

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}, \tag{2.9}$$

где M – масса Земли (планеты); R – радиус Земли (планеты).

Модуль ускорения свободного падения g_h на высоте h над поверхностью Земли (планеты)

$$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2} = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}, \tag{2.10}$$

где h – высота над поверхностью Земли (планеты).

Модуль первой космической скорости у поверхности Земли

$$\vartheta_1 = \sqrt{g_0 R}. \tag{2.11}$$

Модуль скорости на высоте h над поверхностью Земли

$$\vartheta = R\sqrt{\frac{g_0}{(R+h)}}. \tag{2.12}$$

Выражение $R + h = r$ называется радиусом орбиты.

Задачи на движение тела под действием силы тяготения решаются кинематико-динамическим способом. Силой сопротивления окружающей среды пренебрегают.

Форму планет считают шарообразной.

Объём шара радиусом R высчитываем по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Задача 8

Искусственный спутник движется по круговой орбите вокруг Земли ($M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг) в плоскости экватора. Если спутник находится над одной и той же точкой поверхности планеты, то радиус r его орбиты равен:

1) $2{,}2 \cdot 10^4$ км; 2) $3{,}5 \cdot 10^4$ км; 3) $4{,}2 \cdot 10^4$ км; 4) $6{,}5 \cdot 10^4$ км; 5) $7{,}4 \cdot 10^4$ км.

Решение

При решении необходимо учесть, что по условию задачи угловые скорости вращения спутника вокруг Земли и вращения Земли вокруг собственной оси одинаковы и равны $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период вращения Земли вокруг своей оси.

$$T = 24 \text{ ч.}$$

В формуле (2.12) скорость ϑ распишем через период T по законам кинематики и получим выражение

$$\frac{2\pi r}{T} = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}.$$

После возведения в квадрат подставляем формулу (2.9) и получаем выражение

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}.$$

Расчётная формула для орбиты спутника будет иметь вид

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}.$$

Численно:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6,0\cdot 10^{24}\left(24\cdot 3600\right)^2}{4\cdot 3,14^2}} \approx 4,2\cdot 10^4 \text{ км}.$$

Ответ: 3).

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. К потолку лифта подвешен динамометр, к пружине которого подвешена гиря массой m = 0,8 кг. Если показания динамометра F = 7,6 Н, то вектор ускорения a лифта направлен ... , его модуль a равен:

1) вниз, 0,4 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;
2) вверх, 0,4 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;
3) вниз, 0,5 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;
4) вверх, 0,5 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;
5) вверх, 0,6 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2. Грузы массами m_1 = 100 г и m_2 = 300 г связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок. В начальный момент центры тяжести грузов удерживаются на одной высоте. Если грузы отпустить, то спустя время $\Delta t = 1,0$ с после начала движения без трения расстояние $\boldsymbol{l}$ между грузами станет равным:

1) 50 дм; 2) 30 дм; 3) 25 дм; 4) 20 дм; 5) 15 дм.

3. Под действием внешней силы, равной по модулю $F = mg$, направленной вдоль наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, тело движется равномерно вверх. Если тело отпустить с вершины, то оно движется с ускорением $\boldsymbol{a}$, равным:

1) 1,5 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 2) 2,1 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 3) 3,3 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 4) 4,1 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 5) 5,2 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

4. Шар, подвешенный на упругой нити жесткостью $k = 0{,}4\ \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, вращается по окружности в горизонтальной плоскости так, что нить образует с вертикалью угол $\alpha = 45°$. Если удлинение нити при вращении $\Delta l = 10$ см, то масса $\boldsymbol{m}$ груза равна:

1) 1,5 кг; 2) 1,9 кг; 3) 2,5 кг; 4) 2,8 кг; 5) 3,2 кг.

5. Горизонтальный легкий стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 50\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. По стержню без трения может скользить шарик массой $m = 100$ г, прикрепленный к оси пружиной, жесткость которой $k = 1{,}5\ \frac{\text{кН}}{\text{м}}$. Длина пружины в недеформированном состоянии $l_0 = 25$ см. Удлинение Δl пружины при вращении стержня равно:

1) 1,0 см; 2) 1,5 см; 3) 2,0 см; 4) 4,0 см; 5) 5,0 см.

6. Если масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Луны в 3,6 раза меньше радиуса Земли, то ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$ на Луне равно:

1) 1,6 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 2) 3,7 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 3) 8,0 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 4) 8,7 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 5) 15 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

7. Радиус Луны $R = 1{,}75 \cdot 10^4$ м, ускорение свободного падения вблизи ее поверхности $g = 1{,}62\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Период вращения искусственного спутника $\boldsymbol{T}$, движущегося вблизи поверхности Луны по круговой орбите, равен:

1) 1,8 ч; 2) 2,5 ч; 3) 3,8 ч; 4) 4,3 ч; 5) 6,1 ч.

8. Радиус R_1 планеты Альфа в четыре раза меньше радиуса R_2 планеты Бета, а модуль ускорения свободного падения g_1 на поверхности Альфы в два раза меньше модуля ускорения свободного падения g_2 на поверхности Беты. Если ρ_1 – средняя плотность Альфы, а ρ_2 – средняя плотность Беты, то ρ_1 и ρ_2 связаны соотношением:

1) $\rho_1 = \frac{\rho_2}{4}$; 2) $\rho_2 = \frac{\rho_1}{4}$; 3) $\rho_1 = 2\rho_2$; 4) $\rho_1 = 4\rho_2$; 5) $\rho_1 = \rho_2$.

9. Если к телу массой $m = 25$ кг, лежащему на горизонтальной поверхности, приложить силу $F = 120$ Н, направленную вверх под углом $a = 60°$ к горизонту, то тело будет двигаться равномерно. Если эту же силу приложить вверх под углом $\beta = 30°$ к горизонту, то тело будет двигаться с ускорением $\boldsymbol{a}$, равным ... $\frac{\text{дм}}{\text{с}^2}$.

10. На гладком полу лежат два бруска массами $m_1 = 0{,}6$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг соответственно, связанные между собой легкой нерастяжимой нитью. Если сначала горизонтальную силу $F = 2{,}0$ Н приложить к первому бруску и привести систему тел в движение, а затем привести систему в движение, приложив эту же силу ко второму бруску, то модули сил натяжения нити, возникающие в первом и во втором случаях, будут отличаться на ΔF ... **Н.**

11. Кинематический закон движения кабины лифта при вертикальном её подъёме вдоль оси OY имеет вид $y(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 2{,}00$ м, $B = 3{,}00\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $C = 1{,}00\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Если модуль силы сопротивления, действующей на кабину, которую поднимают с помощью троса, составляет 20,0 % от модуля силы тяжести, а модуль силы натяжения троса, приложенной к кабине, $F = 8{,}40$ кН, то масса $\boldsymbol{m}$ кабины равна ... **кг**.

12. Лыжник, не отталкиваясь палками, начал двигаться по склону с углом наклона к горизонту $\alpha = 45°$. Коэффициент трения лыж о снег $\mu = 0{,}15$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости $F = k\vartheta^2$, где $k = 0{,}85\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}$. Если масса лыжника $m = 64$ кг, то максимальная скорость $\vartheta_{\max}$, достигнутая им, равна ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

13. На горизонтальном диске, который вращается вокруг неподвижной вертикальной оси, покоится (относительно диска) небольшая монета массой $m = 3{,}00$ г. Расстояние между центром монеты и осью вращения диска $R = 30$ см. Если модуль силы взаимодействия монеты с диском $F = 37{,}5$ мН, то угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения диска равна ... $\frac{\textbf{рад}}{\textbf{с}}$.

14. Общая масса мотогонщика и мотоцикла $m = 120$ кг. Если мотоцикл движется со скоростью $\vartheta = 72\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ по выпуклому мосту с радиусом кривизны $R = 100$ м, а суммарная площадь сцепления колес мотоцикла с покрытием моста $S = 2{,}0$ дм^2, то давление $\boldsymbol{p}$, оказываемое мотоциклом на мост в его верхней точке, равно ... **кПа**.

15. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите на расстоянии, равном трём радиусам Земли от её поверхности. Если модуль первой космической скорости у поверхности Земли равен $\vartheta_1 = 8\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$, то модуль линейной скорости ϑ_2 спутника равен ... $\mathbf{\frac{км}{с}}$.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

3.1. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ

Механическая работа – это процесс передачи механической энергии от одного тела (или системы тел) к другому.

Работа A постоянной силы F – скалярная физическая величина, равная произведению модуля силы F и модуля перемещения r на косинус угла α между ними:

$$A = Fr\cos\alpha. \qquad (3.1)$$

Единицей измерения работы в СИ является 1 джоуль: $[A] = 1$ Дж.

Данное определение справедливо, если сила F постоянна по модулю и по направлению, траекторией движения является прямая линия. Если $F \neq \text{const}$, то можно воспользоваться графическим способом вычисления работы: работа переменной силы равна площади фигуры, находящейся между осью перемещения и графиком проекции силы на эту ось (рис. 3.1).

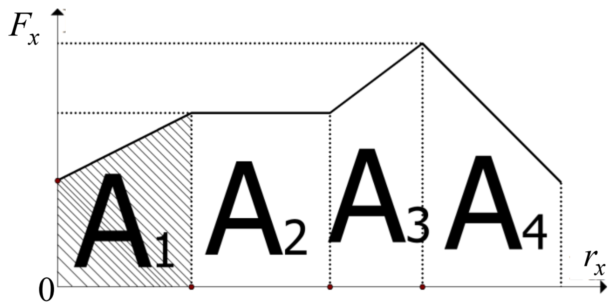


Рис. 3.1

Полная работа силы равна алгебраической сумме площадей отдельных участков фигуры:

$$A = A_1 + A_2 + \dots . \qquad (3.2)$$

Мощность *P* – скалярная физическая величина, равная отношению работы A, совершённой механизмом, к промежутку времени Δt, за который эта работа совершается.

$$P = \frac{A}{\Delta t} = F\vartheta\cos\alpha, \tag{3.3}$$

где ϑ – скорость движения.

При вычислении мгновенной мощности (мощность механизма в данный момент времени) в формулу (3.3) необходимо подставлять мгновенное значение скорости.

Единицей измерения мощности в СИ является 1 ватт: $[P] = 1$ Вт.

Коэффициентом полезного действия η называется отношение полезной мощности $P_{\text{плз}}$ к затраченной $P_{\text{з}}$ (потреблённой).

В каждом механизме происходит потеря потреблённой мощности за счёт трения, сопротивления воздуха и т. д. Если продолжительность подвода и выделение энергии одинаковы, то КПД можно вычислить по формулам:

$$\eta = \frac{P_{\text{плз}}}{P_{\text{з}}} \cdot 100\ \% = \frac{A_{\text{плз}}}{A_{\text{з}}} \cdot 100\ \%. \tag{3.4}$$

Энергия *E* – это функция состояния физической системы, изменение которой равно работе.

Следовательно, единицей измерения энергии в СИ тоже является джоуль (Дж).

Кинетическая энергия *E*к – это энергия, которой обладает тело массой m вследствие движения и которая зависит от скорости движения ϑ тела:

$$E_{\text{к}} = \frac{m\vartheta^2}{2}. \tag{3.5}$$

В ряде случаев, чтобы избежать сложного решения задачи, требующего применения второго закона Ньютона и уравнений кинематики, очень удобно использовать *теорему об изменении кинетической энергии*: «Изменение кинетической энергии тела $\Delta E_{\text{к}}$ при переходе из начального состояния 1 в конечное состояние 2 равно суммарной работе A всех сил, действующих на тело в течение данного перехода:

$$\Delta E_{\text{к}} = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n». \tag{3.6}$$

Потенциальная энергия $E_п$ – это энергия, обусловленная взаимодействием тел друг с другом и зависящая от координат тел, входящих в систему.

Поскольку силы взаимодействия могут иметь различную физическую природу и по-разному зависеть от расстояния между взаимодействующими телами, то единой формулы потенциальной энергии нет.

Потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h относительно земли (нулевого уровня):

$$E_п = mgh. \tag{3.7}$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела:

$$E_п = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.8}$$

Сила тяжести и сила упругости являются *потенциальными силами*. Это значит, что:

● работа сил тяжести и сил упругости при перемещении по замкнутой траектории равна нулю;

● работа сил тяжести и сил упругости при перемещении из начального положения 1 в конечное положение 2 приводит к убыли потенциальной энергии и определяется как

$$A_{mg,упр} = E_{п1} - E_{п2} = -\Delta E_п. \tag{3.9}$$

Полная механическая энергия E системы тел равна арифметической сумме кинетических и потенциальных энергий всех тел, входящих в систему:

$$E = \sum E_к + \sum E_п. \tag{3.10}$$

В задачах данного раздела необходимо определить работу постоянной или переменной силы, рассчитать среднюю или мгновенную мощность, сравнить или определить значения потенциальной и кинетической энергий тела или системы тел.

При решении задач на работу постоянной силы, если не заданы сила и перемещение, силу следует найти из уравнений второго закона Ньютона, а величину перемещения – по законам кинематики.

Задача 1

Тело массой $m = 2{,}0$ кг движется по горизонтальной поверхности вдоль оси OX. Кинематический закон движения имеет вид $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 4{,}0$ м; $B = 4{,}0\ \frac{м}{с}$; $C = 0{,}50\ \frac{м}{с^2}$. Если коэффициент трения скольжения между телом и поверхностью $\mu = 0{,}30$, то работа $\boldsymbol{A}$ горизонтально направленной силы тяги за промежуток времени $\Delta t = 2{,}0$ с от начала отсчета времени равна ... **Дж**.

Решение

Подставляем значения коэффициентов в кинематический закон движения $x(t) = 4{,}0 + 4{,}0t + 0{,}50t^2$ и определяем значение ускорения $a = 1{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Работа силы тяги $A_{\text{тяги}} = F_{\text{т}} r_x \cos 0°$.

По второму закону Ньютона,

$$ma_x = F_{\text{т}} - F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$; $F_{\text{т}} = ma + F_{\text{тр}} = ma + \mu mg = m(a + \mu g)$.

Перемещение за $\Delta t = 2{,}0$ с определим по законам кинематики:

$$r_x = x(2) - x(0) = 4{,}0 \cdot 2{,}0 + 0{,}5 \cdot 4{,}0 = 10 \text{ м}.$$

Искомая работа силы тяги:

$$A_{\text{тяги}} = m(a + \mu g) r_x = 80 \text{ Дж}.$$

Ответ: 80 Дж.

Задача 2

Цепь массой $m = 5{,}0$ кг и длиной $l = 2{,}0$ м лежит на земле. Минимальная работа $\boldsymbol{A_{\min}}$ по подъему этой цепи на высоту, равную её длине, составляет:

1) 25 Дж; 2) 50 Дж; 3) 75 Дж; 4) 100 Дж.

Решение

В результате подъёма цепи её центр тяжести перемещается на высоту, равную половине длины цепи $h = \frac{l}{2}$. Совершённая работа и есть минимальная работа по подъёму центра тяжести: $A = mg\frac{l}{2}$ = 50 Дж.

Ответ: 2).

Задача 3

При ходьбе на лыжах на дистанцию в $S = 20$ км по горизонтальному пути происходят гармонические колебания центра тяжести спортсмена с вертикальной амплитудой $x_{\max} = 8{,}0$ см и периодом $T = 4$ с. Работа A_2, которую затрачивают мышцы лыжника, чтобы затормозить опускание центра тяжести, составляет 0,4 от работы A_1, которая производится при подъёме центра тяжести на эту же высоту. Масса лыжника $m = 75$ кг, коэффициент трения лыж о снег $\mu = 0{,}05$. Если всю дистанцию спортсмен прошёл за время Δt, равное 1ч 30 мин, то работа $\boldsymbol{A}$ лыжника на марше и средняя мощность $\boldsymbol{P}$ составят соответственно ... **кДж** и ... **Вт**.

Решение

Определим количество колебаний центра тяжести спортсмена на всей дистанции:

$$N = \frac{\Delta t}{T}.$$

При каждом колебании центр тяжести опускался и поднимался на высоту $h = 2x_{\max}$.

Работа A_1, затрачиваемая лыжником на поднятие центра тяжести на всей дистанции, составит:

$$A_1 = Nmgh = mgh\frac{\Delta t}{T}.$$

Работа A_2, чтобы затормозить опускание центра тяжести, составляет 0,4 от работы A_1:

$$A_2 = 0{,}4mgh\frac{\Delta t}{T}.$$

Работа A_3, затрачиваемая лыжником на преодоление силы трения:

$$A_3 = \left|\mu NS\cos 180°\right| = \mu mgS.$$

Общая работа A лыжника на марше равна сумме работ A_1, A_2 и A_3:

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A = mgh\frac{\Delta t}{T} + 0{,}4mgh\frac{\Delta t}{T} + \mu mgS = mg(1{,}4\cdot 2x_{\max}\frac{\Delta t}{T} + \mu S).$$

Численно:

$$A = 75\cdot 10\left(2{,}8\cdot 0{,}08\frac{5{,}4\cdot 10^3}{4} + 0{,}05\cdot 2\cdot 10^4\right) = 977 \text{ кДж}.$$

Средняя мощность лыжника:

$$P = \frac{A}{t} \approx 181 \text{ Вт}.$$

Ответ: 977 кДж; ≈ 181 Вт.

Задача 4

На рис. 3.2 приведён график зависимости кинетической энергии $E_к$ тела, движущегося вдоль оси OX от координаты x. Значение равнодействующей сил $F_{равн}$, приложенных к телу, было наибольшим на участке:

1) AB;
2) BC;
3) CD;
4) DM;
5) одинаково на всех участках.

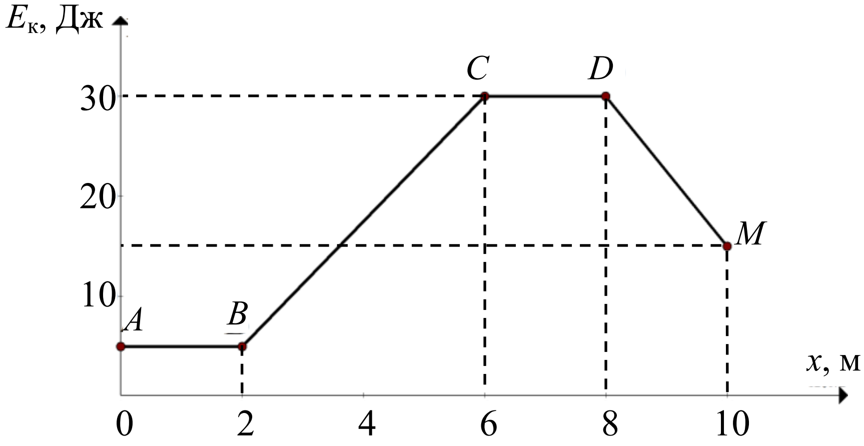


Рис. 3.2

Решение

Для рассуждений применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$E_{к2} - E_{к1} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A_{равн}.$$

По определению $A_{равн} = F_{равн}x$.

Следовательно, на участках AB и CD равнодействующая сила равна $F_{равн} = 0$.

На участке BC: $F_{равн} = \dfrac{30\,Дж - 5\,Дж}{4\,м} = 6{,}25$ Н.

На участке DM: $\left|F_{равн}\right| = \dfrac{30\,Дж - 15\,Дж}{2\,м} = 7{,}50$ Н.

Ответ: 4).

Задача 5

Санки начинают скольжение с высоты $H = 15$ м по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту. Въезжают на горизонтальную поверхность и, пройдя по ней путь $S = 12$ м, снова поднимаются в гору по плоскости с углом наклона $\beta = 15°$. Если известно, что коэффициент трения на всём пути одинаков и равен $\mu = 0,2$, то санки остановятся на высоте h, равной ... **дм**.

Решение

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Так как в начальном и конечном состояниях скорость санок равна нулю, то из формулы (3.6) видно, что работа всех сил на всём пути равна нулю:

$$\Delta E_к = \sum A_{всех\ сил} = 0.$$

На санки действуют сила тяжести $\overrightarrow{mg}$, силы трения $\overrightarrow{F_{1тр}}$, $\overrightarrow{F_{2тр}}$, $\overrightarrow{F_{3тр}}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (на каждом – своя $\vec{N}$) (рис. 3.3).

$$A_{mg} + A_{тр1} + A_{тр2} + A_{тр3} = 0.$$

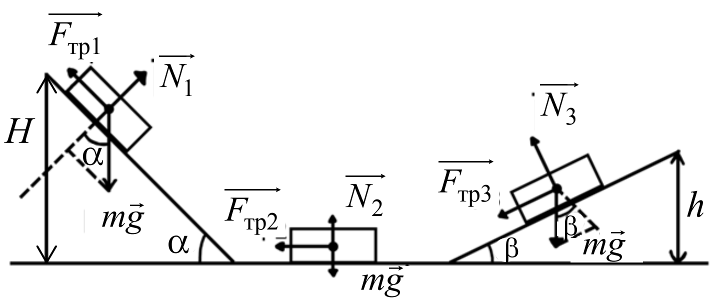


Рис. 3.3

Работа силы нормальной реакции опоры равна нулю $A_N = 0$, так как угол α между векторами $\overrightarrow{N}$ и $\vec{r}$ равен 90° ($\cos 90° = 0$).

Работа силы тяжести согласно формуле (3.9) выражается в виде

$$A_{mg} = E_{п1} - E_{п2} = mgH - mgh.$$

Работу силы трения покажем через формулу

$$A_{тр} = \mu NS \cos 180° = -\mu NS,$$

где N – силы нормальной реакции опоры (разная на каждом участке); S – длина пройденного пути на каждом участке.

Согласно рис. 3.3, $N_1 = mg\cos\alpha$; $N_2 = mg$; $N_3 = mg\cos\beta$.

Из геометрических соображений по первой горке санки проехали путь $S_1 = \dfrac{H}{\sin\alpha}$, по второй горке до остановки – $S_3 = \dfrac{h}{\sin\beta}$.

Таким образом, получаем выражение

$$mgH - mgh - \mu mg\cos\alpha\frac{H}{\sin\alpha} - \mu mgS - \mu mg\cos\beta\frac{h}{\sin\beta} = 0.$$

Сокращаем выражение на mg и обозначаем искомую величину

$$h(1 + \mu\,\mathrm{ctg}\,\beta) = H(1 - \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) - \mu S,$$

$$h = \frac{H(1 - \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) - \mu S}{1 + \mu\,\mathrm{ctg}\,\beta}.$$

По условию задачи $2\beta = \alpha$.

Тогда

$$\mathrm{ctg}\,\beta = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\mathrm{ctg}\,15^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3} = 3,73,$$

$$\mathrm{ctg}\,30^\circ = 1,73.$$

Численно искомая высота равна

$$h = \frac{15(1 - 0,2 \cdot 1,73) - 0,2 \cdot 12}{1 + 0,2 \cdot 3,73} = 4,2\ \text{м} = 42\ \text{дм}.$$

Ответ: 42 дм.

В задачах на работу переменной силы обычно такими силами являются сила упругости пружины, переменная сила трения и переменная выталкивающая сила. Работу переменной силы можно рассчитать по формуле

$$A = \langle F \rangle S\cos\alpha, \tag{3.11}$$

где $\langle F \rangle$ – среднее значение силы, можно также применить графический способ нахождения работы, построив график функции $F = F(S)$.

Задача 6

Деревянный однородный кубик со стороной a = 10 см плавает в воде так, что его центр находится на высоте h = 4,0 см выше поверхности воды. Чтобы погрузить кубик в воду наполовину, надо совершить работу $\boldsymbol{A}$, равную ... **мДж**.

Решение

1-й способ

Так как кубик плавает, то сила тяжести кубика уравновешена силой Архимеда

$$mg = F_A \Rightarrow mg = \rho_в g V_1,$$

где $\rho_в$ – плотность воды, V_1 – объём части кубика, погруженный в воду

$$V_1 = a^2 h_1 = a^2\left(\frac{a}{2} - h\right).$$

Погрузить кубик в воду наполовину, значит, погрузить его на глубину $h = 4$ см.

При погружении сила Архимеда начинает превышать силу тяжести кубика, возникает результирующая сила $F_{выт}$, выталкивающая кубик из воды, и при погружении на h она растёт и достигает максимального значения

$$F_{выт}^{max} = \rho_в g V_2 - mg,$$

где V_2 – погруженный объём, равный $V_2 = a^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

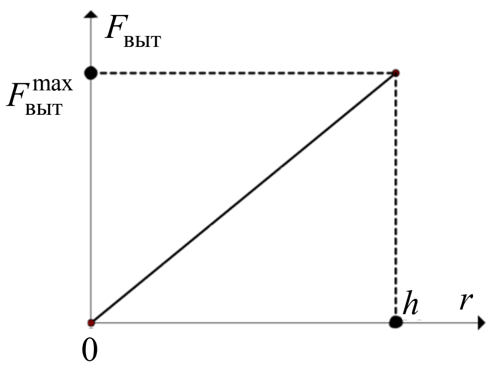
$$F_{выт}^{max} = \rho_в g V_2 - \rho_в g V_1 = \rho_в g\left(\frac{a^3}{2} - a^2\left(\frac{a}{2} - h\right)\right) = \rho_в g a^2 h.$$

Против этой переменной $F_{выт}$ и должна быть совершена работа:

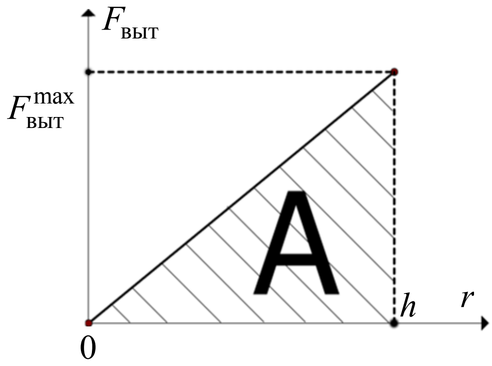
$$A = \langle F_{выт}\rangle h = \frac{F_{выт}^{max} + F_{выт}^{нач}}{2} h = \frac{\rho_в g a^2 h^2 + 0}{2} = 0{,}08 \text{ Дж} = 80 \text{ мДж}.$$

2-й способ (*графический*)

Построим график зависимости возникающей при погружении кубика результирующей выталкивающей силы от глубины погружения (рис. 3.4, *а*), где максимальное погружение по условию задачи $x_{max} = h$ и максимальная выталкивающая сила $F_{выт}^{max} = \rho_в g a^2 h$.



а



б

Рис. 3.4

Работа против выталкивающей силы равна площади фигуры (треугольника), заключённой между графиком и осью перемещения (рис. 3.4, *б*):

$$A = \frac{\rho_в g a^2 h^2}{2} = 80 \text{ мДж}.$$

Ответ: 80 мДж.

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. Тело движется вдоль оси *OX*. Если график зависимости проекции скорости ϑ_x этого тела на ось *OX* от времени *t* имеет вид, изображенный на рис. 3.5, то работа ***A*** равнодействующей всех сил, приложенных к телу, положительна на участке(ах):

1) *BC*; 2) *AB*; 3) *DE*; 4) *BC* и *DE*; 5) *CD* и *OA*.

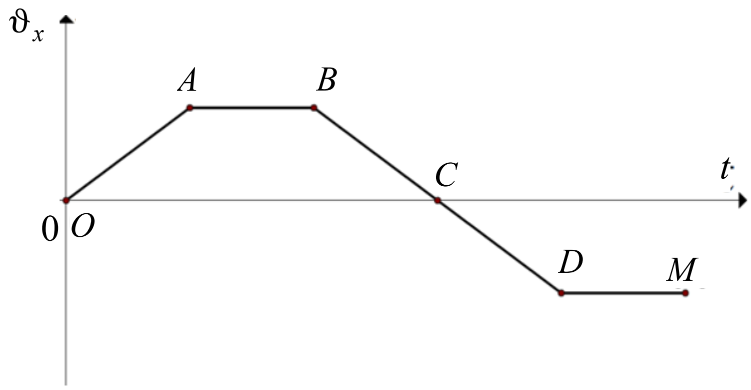


Рис. 3.5

2. На рис. 3.6 сплошной линией показан график зависимости полной механической энергии $E_{полн}$ системы от времени *t*, а штриховой линией – график зависимости потенциальной энергии $E_п$ системы от времени *t*. Кинетическая энергия $E_к$ системы оставалась неизменной в течение промежутка времени:

1) $\Delta t_1 = (0;\ 1)$ с;

2) $\Delta t_2 = (1;\ 2)$ с;

3) $\Delta t_3 = (2;\ 3)$ с;

4) $\Delta t_4 = (3;\ 4)$ с;

5) $\Delta t_5 = (4;\ 5)$ с.

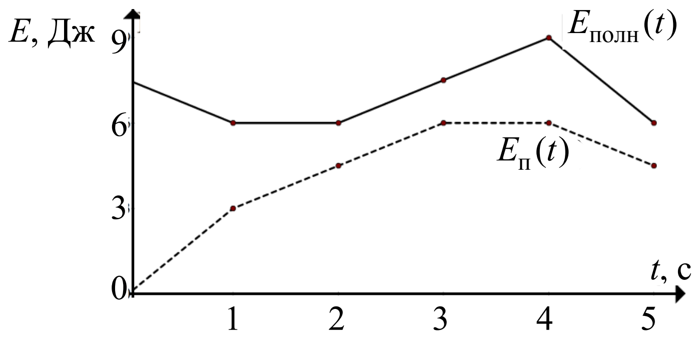


Рис. 3.6

3. Тело массой $m = 10$ кг, которое свободно падало без начальной скорости $\left(\vartheta_0 = 0\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ с высоты $H = 9{,}9$ м, погрузилось в мягкий грунт земли на глубину $h = 10$ см. Модуль средней силы F, сопротивления грунта, действующей на тело, равен:

1) 0,50 кН; 2) 1,9 кН; 3) 5,0 кН; 4) 8,5 кН; 5) 10 кН.

4. Минимальная работа, которую необходимо совершить, чтобы поставить вертикально лежащий на земле столб массой $m = 0{,}1$ т и длиной $L = 3{,}0$ м, приподнимая его за один край, равна:

1) 1,0 кДж; 2) 1,5 кДж; 3) 3,0 кДж; 4) 4,5 кДж; 5) 6,0 кДж.

5. Узкий столб массой $M = 250$ кг, к вершине которого прикреплена крестовина массой $m = 40{,}0$ кг, необходимо перевести из горизонтального в вертикальное положение. Если длина столба $L = 800$ см, то минимальная работа, совершённая при установке столба в вертикальное положение, составит:

1) 16,8 кДж; 2) 11,6 кДж ; 3) 13,2 кДж; 4) 18,6 кДж; 5) 23,2 кДж.

6. Автомобиль массой $m = 1{,}6$ т движется со скоростью $\vartheta = 72\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$, если коэффициент сопротивления движению $\mu = 0{,}25$, то мощность P, развиваемая двигателем, равна:

1) 50 кВт; 2) 60 кВт; 3) 70 кВт; 4) 80 кВт; 5) 90 кВт.

7. Вагон, двигаясь с постоянной скоростью $\vartheta = 3\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ по горизонтальному участку пути с коэффициентом трения $\mu_1 = 0{,}002$, въезжает на другой горизонтальный участок с коэффициентом трения $\mu_2 = 0{,}003$ и движется по нему до полной остановки. Путь вагона $\boldsymbol{S}$ по второму участку составит ... **м**.

8. Известно, что под действием силы $F = 35$ Н пружинка сжимается на $\Delta x_1 = 1{,}0$ см. Чтобы сжать пружинку на $\Delta x_2 = 20$ см, надо совершить работу $\boldsymbol{A}$, равную ... **Дж**.

9. Из винтовки в горизонтальном направлении сделано два выстрела в щит, находящийся на расстоянии $S = 45$ м. После первого выстрела перед дулом винтовки поставили доску. Вторая пуля, пробив доску, попала в щит на $h = 30$ см ниже первой. Масса пули $m = 5{,}0$ г. Если начальная скорость пуль $\vartheta_0 = 0{,}30\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$, то при пробивании доски пулей совершена работа $\boldsymbol{A}$, равная ... **Дж**.

10. Цилиндр, площадь основания которого $S = 0{,}50$ м^2, плавает в вертикальном положении в воде. Наименьшая работа $\boldsymbol{A_{\min}}$, которую необходимо совершить, чтобы достать цилиндр из воды, если его масса $m = 10$ кг, равна ... **мДж**. Плотность воды $\rho = 1{,}0\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

11. Двигаясь поступательно по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $\vartheta = 2{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, маленькая шайба наезжает в точке A на шероховатую поверхность перпендикулярно её границе. Коэффициент трения скольжения между шайбой и полосой линейно возрастает от $\mu_1 = 0{,}10$ в точке A до $\mu_2 = 0{,}40$ в точке C. Если в точке C шайба остановилась, то расстояние $\boldsymbol{S_{AC}}$ равно ... **см**.

12. Для откачки нефти из скважины глубиной $H = 0{,}40$ км поставлен насос мощностью $P = 10$ кВт, коэффициент полезного действия которого $\eta = 80$ %. За промежуток времени $\Delta t = 5{,}0$ ч из скважины будет откачана масса нефти $\boldsymbol{m}$ в количестве ... **т**.

3.2. ИМПУЛЬС ТЕЛА. ИМПУЛЬС СИЛЫ

Изменение скорости тела зависит не только от величины и направления действующей на него силы, но и от длительности промежутка времени, в течение которого она действует. Выразим эту зависимость количественно:

$$m\vec{a} = m\frac{\overrightarrow{\vartheta_2} - \overrightarrow{\vartheta_1}}{\Delta t} = \vec{F},$$

$$m\overrightarrow{\vartheta_2} - m\overrightarrow{\vartheta_1} = \vec{F}\Delta t. \qquad (3.12)$$

Произведение массы тела на вектор его скорости называется **импульсом тела** (импульсом):

$$\vec{p} = m\vec{\vartheta}. \tag{3.13}$$

Произведение вектора силы на время её действия называется **импульсом силы** $\vec{F}\Delta t$.

Единицей измерения обеих величин в СИ является килограмм-метр в секунду:

$$[\vec{p}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \text{ и } \left[\vec{F}\Delta t\right] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

С учётом данных определений равенство (3.12) можно сформулировать следующим образом, т. е. получить ещё одну формулировку второго закона Ньютона: «Изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ равно импульсу действующей на него силы $\vec{F}\Delta t$».

Следует обратить внимание, что изменение импульса $\Delta\vec{p}$ имеет такое же направление, что и результирующая сила, действующая на тело.

При решении задач также следует помнить о векторном характере данных физических величин.

Задача 1

Мяч, модуль скорости которого $\vartheta_1 = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, отбрасывается ударом ракетки в противоположную сторону со скоростью $\vartheta_2 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Если модуль изменения импульса мяча при ударе $\Delta p = 2{,}0\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, то изменение его кинетической энергии $\Delta E_\text{к}$ составляет:

1) 10 Дж; 2) 15 Дж; 3) 20 Дж; 4) 25 Дж; 5) 30 Дж.

Решение

Изменение импульса мяча равно $\Delta\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{\vartheta_2} - m\overrightarrow{\vartheta_1}$.

Найдём построением векторную разность $m\overrightarrow{\vartheta_2} - m\overrightarrow{\vartheta_1}$. Она представляет собой вектор, начало которого совпадает с концом вектора $m\overrightarrow{\vartheta_1}$, а конец – с концом вектора $m\overrightarrow{\vartheta_2}$ (рис. 3.7).

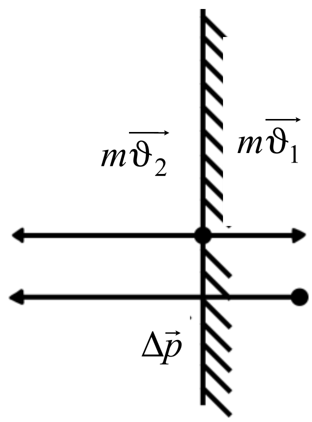


Рис. 3.7

Из рис. 3.7 видно, что модуль изменения импульса тела равен

$$\Delta p = m\vartheta_2 + m\vartheta_1 \Rightarrow m = \frac{\Delta p}{(\vartheta_2 + \vartheta_1)}.$$

Подставляем в выражение изменения кинетической энергии и получаем

$$\Delta E_к = \frac{m\left(\vartheta_2{}^2 - \vartheta_1{}^2\right)}{2} = \frac{\Delta p}{(\vartheta_2 + \vartheta_1)} \times \frac{\left(\vartheta_2{}^2 - \vartheta_1{}^2\right)}{2} = \frac{\Delta p(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{2}.$$

Численно:

$$\Delta E_к = \frac{2{,}0(20 - 10)}{2} = 10 \text{ Дж}.$$

Ответ: 1).

Задача 2

Теннисный мячик массой $m = 56$ г, движущийся со скоростью $\vartheta_1 = 40\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, направленной под углом $\alpha = 30°$ к гладкой закреплённой стенке, абсолютно упруго ударяется об неё и отскакивает. Продолжительность удара составляет $\Delta t = 8{,}0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Средняя сила $F_{ср}$, с которой мячик действует на стенку при ударе, равна ... **Н**.

Решение

При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия мячика не изменяется, значит, модули скоростей до и после удара равны. Направление скорости изменяет сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (сила трения отсутствует). Тогда искомая средняя сила удара мяча о стенку равна модулю нормальной реакции опоры $\vec{F}_{ср} = \vec{N}$. Значит, необходимо найти значение $\vec{N}$.

Как и в предыдущей задаче, строим разность векторов $\overrightarrow{m\vartheta_2} - \overrightarrow{m\vartheta_1}$ (рис. 3.8), где модули векторов равны, и мячик отскакивает от неё под таким же углом $\alpha = 30°$, под каким падает. Значит, при построении получается равносторонний треугольник.

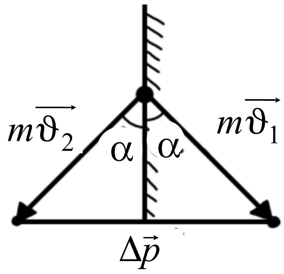


Рис. 3.8

Следовательно, $\Delta p = m\vartheta_1 = F_{ср}\Delta t \Rightarrow F_{ср} = \dfrac{m\vartheta_1}{\Delta t}$.

Численно:

$$F_{ср} = \frac{56 \cdot 10^{-3} \cdot 40}{8 \cdot 10^{-3}} = 280 \text{ Н}.$$

Ответ: 280 Н.

Задача 3

Упругий мяч массой m = 0,2 кг падает с высоты H = 1,8 м на твёрдую горизонтальную поверхность и подскакивает на ту же высоту. Продолжительность удара мяча Δt = 0,1 с. Средняя сила удара мячика $\boldsymbol{F_{ср}}$ о поверхность составит ... **Н**.

Решение

Воспользуемся вторым законом Ньютона, записанным в виде равенства (3.12), где $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$:

$$\overrightarrow{m\vartheta_2} - \overrightarrow{m\vartheta_1} = \left(\vec{N} + m\vec{g}\right)\Delta t,$$

где $\left|\overrightarrow{m\vartheta_2}\right| = \left|\overrightarrow{m\vartheta_1}\right|$, так как подскок происходит на ту же высоту.

Ось OY направим вертикально вверх и запишем данное уравнение в проекции на эту ось:

$$2m\vartheta = \left(N - mg\right)\Delta t \Rightarrow N = m\left(\frac{2\vartheta}{\Delta t} + g\right).$$

Скорость в момент удара определим из уравнений свободного падения:

$$\vartheta = \sqrt{2gH}.$$

Получаем выражение для средней силы удара

$$N = m\left(\frac{2\sqrt{2gH}}{\Delta t} + g\right).$$

Численно:

$$N = 0,2\left(\frac{2\sqrt{2\cdot 10\cdot 1,8}}{0,1}+10\right) = 26 \text{ Н.}$$

Ответ: 26 Н.

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. Траектория движения тела, брошенного с балкона горизонтально, изображена на рис. 3.9. Направление импульса $\vec{p}$ этого тела в точке А обозначено цифрой:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

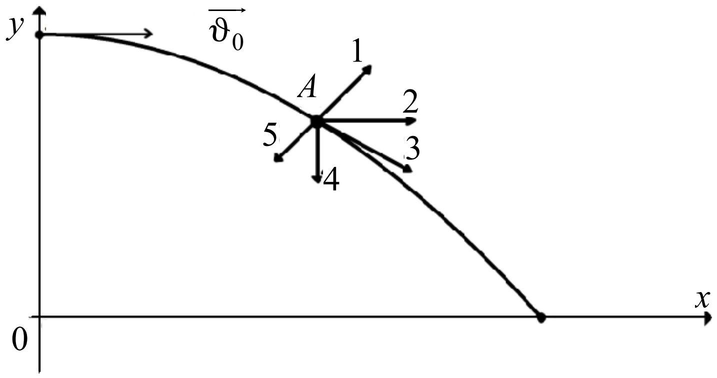


Рис. 3.9

2. Уравнение движения материальной точки массой $m = 100$ г имеет вид $x = 3,0 - 12t + 8,0t^2$ (м). Изменение импульса точки за промежуток времени $\Delta t = 5,0$ с после начала движения равно:

1) 1,2 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 2) 2,8 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 3) 5,6 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 4) 6,8 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 5) 8,0 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

3. Шарик массой $m = 100$ г брошен с поверхности земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $\vartheta_0 = 10,0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Максимальное изменение импульса шарика за время полета равно:

1) 0,66 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 2) 1,0 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 3) 1,7 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 4) 2,0 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$; 5) 2,5 $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

4. Мяч, модуль скорости которого $\vartheta_1 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, отбрасывается ударом ракетки в противоположную сторону со скоростью $\vartheta_2 = 30\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Если изменение его кинетической энергии составляет $\Delta E_к = 40$ Дж, то модуль импульса силы $\boldsymbol{F}\Delta \boldsymbol{t}$, действующий на мяч при ударе со стороны ракетки, равен:

1) 0,8 $Н \cdot с$; 2) 2,0 $Н \cdot с$; 3) 2,5 $Н \cdot с$; 4) 4,0 $Н \cdot с$; 5) 8,0 $Н \cdot с$.

5. Тело массой $m = 2{,}5$ кг брошено со скоростью $\vartheta_0 = 10\,\frac{м}{с}$ горизонтально с высоты $H = 2{,}2$ м. Модуль импульса тела $\boldsymbol{p}$ в последний момент перед падением на землю равен ... $\frac{кг \cdot м}{с}$.

6. Тело массой $m = 1$ кг брошено со скоростью $\vartheta = 10\,\frac{м}{с}$ под углом $a = 60^\circ$ к горизонту. Модуль импульса $\boldsymbol{p}$ тела в высшей точке траектории равен ... $\frac{кг \cdot м}{с}$.

7. Стальной шарик массой $m = 50$ г падает с высоты $H = 80$ см и подскакивает на высоту $h = 50$ см. Модуль импульса силы $\boldsymbol{F}\Delta \boldsymbol{t}$, действующего на плиту за время удара, равен ... $мН \cdot с$.

8. Пластилиновый мяч массой $m = 400$ г падает с высоты $H = 45$ см на горизонтальную поверхность. Если продолжительность удара мяча принять $\Delta t = 0{,}2$ с, то средняя сила удара мячика о поверхность $\boldsymbol{F}_{\textbf{ср}}$ составит ... **Н**.

3.3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой*.

Для такой системы выполняется *закон сохранения импульса*: «Импульс замкнутой системы есть величина постоянная: $\vec{p} = \text{const}$».

Для системы, состоящей из n тел, этот закон можно записать в виде

$$m_1\overrightarrow{\vartheta_1} + m_2\overrightarrow{\vartheta_2} + m_3\overrightarrow{\vartheta_3} + \ldots + m_n\overrightarrow{\vartheta_n} = \text{const}. \qquad (3.14)$$

Закон сохранения механической энергии: «В замкнутой механической системе при любых переходах системы из одного состояния в другое полная энергия системы остаётся неизменной:

$$E = E_к + E_п = \text{const}». \qquad (3.15)$$

При решении задач на законы сохранения следует помнить, что и импульс и энергия зависят от выбора системы отсчёта. Поэтому при составлении уравнений, выражающих законы сохранения импульса и энергии, необходимо рассматривать движения всех тел относительно одной и той же инерциальной системы отсчёта.

Задачи этой темы можно разделить на три большие группы: задачи на закон сохранения импульса, задачи на закон сохранения энергии и комбинированные задачи.

Закон сохранения импульса связывает начальное и конечное значение импульса замкнутой системы и позволяет исключить из рассмотрения внутренние силы.

Если система не замкнута, но есть изолированное направление, то записывается закон сохранения импульса для этого направления.

Если в системе происходит быстрое изменение импульсов из-за взаимодействия тел, то продолжительность взаимодействия считается бесконечно малой. Это позволяет применять закон сохранения импульса даже в тех случаях, когда на систему действуют внешние силы. Например, при столкновениях и взрывах не учитываем действие силы тяжести и силы сопротивления.

Задача 1

Человек массой $m = 60$ кг догоняет тележку массой $M = 90$ кг, движущуюся со скоростью $\vartheta_1 = 2{,}7\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, и вскакивает на неё. После этого тележка начинает двигаться со скоростью $\vartheta_2 = 4{,}5\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Если бы человек вскочил на движущуюся тележку, имея ту же скорость, двигаясь ей навстречу, то тележка начала бы двигаться со скоростью ϑ_3, модуль которой равен ... $\frac{\textbf{см}}{\textbf{с}}$.

Решение

Для момента запрыгивания человека на тележку запишем закон сохранения импульса.

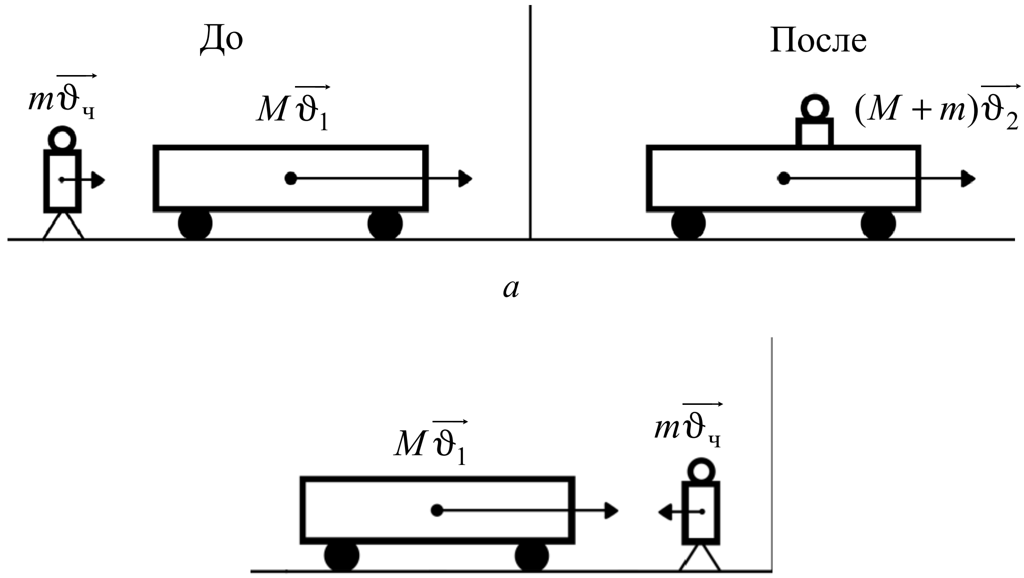
В векторном виде

$$M\overrightarrow{\vartheta_1} + m\overrightarrow{\vartheta_\text{ч}} = (M+m)\overrightarrow{\vartheta_2}.$$

Ось *OX* направим горизонтально в сторону движения тележки.

Закон сохранения импульса в проекции на ось *OX*, когда человек догнал тележку (рис. 3.10, *а*):

$$M\vartheta_1 + m\vartheta_\text{ч} = (M+m)\vartheta_2,$$



а

б

Рис. 3.10

когда двигался навстречу тележке (рис. 3.10, *б*):

$$M\vartheta_1 - m\vartheta_ч = (M+m)\vartheta_{3x}.$$

Определяем проекцию скорости ϑ_{3x}, так как не знаем итоговое направление тележки после запрыгивания бегущего навстречу ей человека:

$$2M\vartheta_1 = (M+m)\vartheta_2 + (M+m)\vartheta_{3x},$$

$$\vartheta_{3x} = \frac{2M\vartheta_1 - (M+m)\vartheta_2}{M+m} = -0{,}35\ \frac{м}{с} = -35\ \frac{см}{с}.$$

Если $\vartheta_{3x} < 0 \Rightarrow$, то тележка с запрыгнувшим человеком будет двигаться по направлению бежавшего к ней человека.

Ответ: $35\ \frac{см}{с}$.

Задача 2

В первой ситуации тело 1 массой $m_1 = 3{,}0$ кг движется по гладкой поверхности навстречу телу 2 массой $m_2 = 2{,}0$ кг вдоль одной прямой и неупруго сталкивается с ним. Во второй ситуации оба тела сталкиваются неупруго, двигаясь по гладкой поверхности навстречу друг другу по взаимно перпендикулярным направлениям. Скорости перед столкновением в каждой ситуации равны $\vartheta_1 = 1{,}5\ \frac{м}{с}$ и $\vartheta_2 = 3{,}0\ \frac{м}{с}$. Общая скорость движения во втором случае $\boldsymbol{u_2}$ отличается от общей скорости движения в первом $\boldsymbol{u_1}$ в ... **раз**:

1) $\dfrac{5}{1}$; 2) $\dfrac{2}{1}$; 3) 1; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) $\dfrac{1}{5}$.

Решение

После неупругого столкновения тела движутся как одно целое.

Запишем закон сохранения импульса в векторном виде для момента столкновения тел:

$$m_1\overrightarrow{\vartheta_1} + m_2\overrightarrow{\vartheta_2} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u}.$$

Ось OX направим в сторону движения второго тела (рис 3.11, *а*).

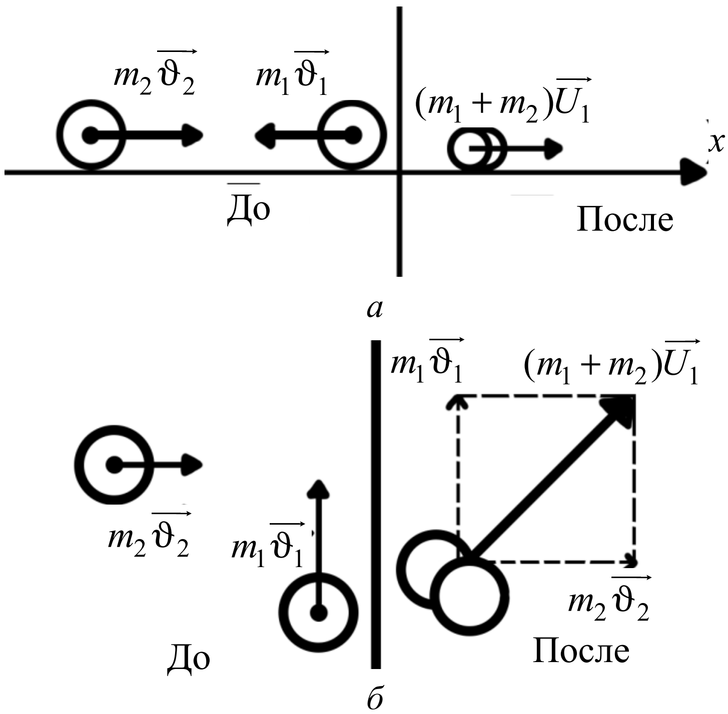


Рис. 3.11

Следовательно, закон сохранения импульса в первой ситуации в проекции на ось OX имеет вид

$$m_2\vartheta_2 - m_1\vartheta_1 = \left(m_2 + m_2\right)u_1,$$

$$u_1 = \frac{m_2\vartheta_2 - m_1\vartheta_1}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения импульса во второй ситуации согласно рис 3.11, *б* имеет вид

$$(m_1\vartheta_1)^2+(m_2\vartheta_2)^2=(m_1+m_2)^2u_2^2,$$

$$u_2{}^2=\frac{(m_1\vartheta_1)^2+(m_2\vartheta_2)^2}{(m_1+m_2)^2}\Rightarrow u_2=\frac{\sqrt{(m_1\vartheta_1)^2+(m_2\vartheta_2)^2}}{m_1+m_2}.$$

Определим отношение $\frac{u_2}{u_1}$ скоростей:

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{\sqrt{(m_1\vartheta_1)^2+(m_2\vartheta_2)^2}}{m_2\vartheta_2-m_1\vartheta_1},$$

$$\frac{u_2}{u_1}=5.$$

Ответ: 1).

Задача 3

Снаряд массой m, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $\vartheta_0=12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, разрывается на два осколка массами m_1 и m_2 ($m_2 = 3\ m_1$), которые разлетаются под равными углами $\alpha=60°$ к первоначальному направлению движения снаряда. Скорости осколков снаряда ϑ_1 и ϑ_2 равны соответственно:

1) 24 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и 8,0 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) 36 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и 9,0 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) 42 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и 14 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

4) 45 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и 15 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 5) 48 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и 16 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение

Запишем закон сохранения импульса в векторном виде для момента взрыва снаряда:

$$m\overrightarrow{\vartheta_0}=m_1\overrightarrow{\vartheta_1}+m_2\overrightarrow{\vartheta_2},$$

где $m\overrightarrow{\vartheta_0}$ – импульс снаряда перед взрывом; $m_1\overrightarrow{\vartheta_1}$ и $m_2\overrightarrow{\vartheta_2}$ – импульсы осколков сразу после взрыва.

Так как по условию задачи осколки разлетаются под равными углами к первоначальному горизонтальному направлению движения снаряда, то изображённый на рис. 3.12 вектор $m\overrightarrow{\vartheta_0}$ является диагональю ромба.

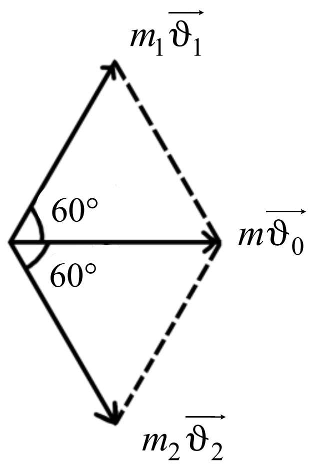


Рис. 3.12

Угол разлёта осколков равен $\alpha = 60°$ к горизонтали, тогда

$$\left|m\overrightarrow{\vartheta_0}\right| = \left|m_1\overrightarrow{\vartheta_1}\right| = \left|m_2\overrightarrow{\vartheta_2}\right|.$$

Значит, $m_2 = 3\ m_1$ и $m_1\vartheta_1 = m_2\vartheta_2 \Rightarrow \vartheta_1 = 3\vartheta_2$.

Вычислим значение скорости первого осколка:

$$m\vartheta_0 = m_1\vartheta_1,$$

$$4m_1\vartheta_0 = m_1\vartheta_1 \Rightarrow \vartheta_1 = 4\vartheta_0 = 48\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow \vartheta_2 = 16\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 5).

Задача 4

Лодка длиной $l = 300$ см и массой $M = 120$ кг стоит в спокойной воде. На носу и корме лодки сидят два человека, масса которых $m_1 = 60{,}0$ кг и $m_2 = 70{,}0$ кг. Они, пройдя по лодке, меняются местами. Если сопротивлением воды пренебречь, то, пока люди менялись местами, лодка сдвинулась на расстояние $\Delta \boldsymbol{l}$, равное ... **см**.

Решение

Систему «лодка – люди» можно считать замкнутой, так как силы, действующие на людей и лодку, направлены по вертикали, в горизонтальном направлении внешние силы отсутствуют. Поэтому к решению задачи применим закон сохранения импульса. До смены местоположения людей все тела системы находились в покое, импульс системы был равен нулю. Когда люди начали переходить с одного края на противоположный, лодка пришла в движение. Запишем закон сохранения импульса в векторном виде:

$$0 = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_л},$$

где $\overrightarrow{p_1} = m_1\overrightarrow{\vartheta_1}$ – импульс первого человека; $\overrightarrow{p_2} = m_2\overrightarrow{\vartheta_2}$ – импульс второго человека; $\overrightarrow{p_л} = M\overrightarrow{\vartheta_л}$ – импульс лодки.

В проекции на ось OX (рис. 3.13):

$$M\vartheta_л + m_1\vartheta_1 - m_2\vartheta_2 = 0.$$

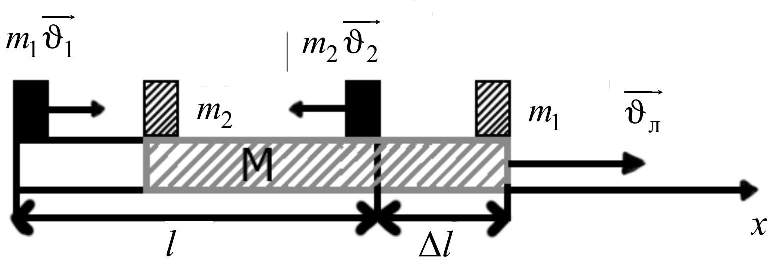


Рис. 3.13

Так как люди и лодка движутся одновременно и время разгона и торможения мало, то

$$\vartheta_1 = \frac{S_1}{\Delta t},\ \vartheta_2 = \frac{S_2}{\Delta t},\ \vartheta_л = \frac{S_л}{\Delta t},$$

где S_1 – перемещение первого человека относительно поверхности воды; S_2 – перемещение второго человека относительно поверхности воды; $S_л$ – перемещение лодки.

Следует обязательно учесть, что скорости тел мы берём относительно неподвижной системы отсчёта (воды), поэтому скорости будут иметь вид

$$\vartheta_1 = \frac{l + \Delta l}{\Delta t},\ \vartheta_2 = \frac{l - \Delta l}{\Delta t},\ \vartheta_л = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Тогда

$$M\frac{\Delta l}{\Delta t} + m_1\frac{l + \Delta l}{\Delta t} - m_2\frac{l - \Delta l}{\Delta t} = 0,$$

откуда

$$\Delta l = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} l = 12 \text{ см}.$$

Ответ: 12 см.

Применение закона сохранения энергии при рассмотрении двух состояний системы взаимодействующих тел позволяет не рассматривать действующие между телами силы, упрощая решение задачи.

Сначала необходимо выбрать два состояния системы, затем – нулевой уровень отсчёта потенциальной энергии и записать закон сохранения энергии между этими состояниями: $E_{1полн} = E_{2полн}$.

Если при переходе из начального выбранного состояния в конечное на тела действовали внешние силы, то работа внешних сил привела к изменению полной энергии системы, т. е. записываем:

$$E_{2полн} - E_{1полн} = A_{внешних\ сил}. \tag{3.16}$$

Задача 5

Камень бросают вертикально вверх с поверхности земли со скоростью, модуль которой $\vartheta_0 = 20\ \frac{м}{с}$. Кинетическая энергия камня $E_к$ равна его потенциальной $E_п$ на высоте $\boldsymbol{h}$, равной ... **м**.

Решение

Первое положение камня находится в точке бросания, второе – на высоте h. За нулевой уровень отсчёта потенциальной энергии принимаем поверхность земли. Согласно закону сохранения энергии,

$$E_{1полн} = E_{2полн} \text{ или } \frac{m\vartheta_0^2}{2} = E_к + E_п.$$

По условию задачи $E_к = E_п$ на искомой высоте h, значит, получаем

$$\frac{m\vartheta_0^2}{2} = 2E_п \text{ или } \frac{m\vartheta_0^2}{2} = 2mgh.$$

Следовательно, $h = \dfrac{\vartheta_0^2}{4g} = 10$ м.

Ответ: 10 м.

При решении комбинированных задач требуется одновременно использовать законы сохранения импульса и энергии. Нередко требуется их сочетание с уравнениями второго закона Ньютона.

Важно правильно использовать понятия абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором сохраняется сумма кинетических энергий и общий импульс соударяющихся тел.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором сохраняется общий импульс соударяющихся тел, но суммарная кинетическая энергия уменьшается на величину Q.

Задача 6

Два тела массами m_1 = 2,00 кг и m_2 = 1,50 кг двигались по гладкой горизонтальной поверхности во взаимно перпендикулярных направлениях с равными по модулю скоростями: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$. В результате абсолютно неупругого столкновения они продолжили движение со скоростью, модуль которой равен $\vartheta = 10{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Количество теплоты $\boldsymbol{Q}$, выделившееся при столкновении, равно ... **Дж**.

Решение

Запишем закон сохранения энергии для абсолютно неупругого удара:

$$E_{\text{к}1} + E_{\text{к}2} = E_{\text{к общ}} + Q,$$

где $E_{\text{к}1}$, $E_{\text{к}2}$ – кинетические энергии двух тел перед столкновением; $E_{\text{к общ}}$ – кинетическая энергия тел, движущихся как единое целое после неупругого удара; Q – количество теплоты, выделившееся при столкновении.

Тогда количество теплоты

$$Q = E_{\text{к}1} + E_{\text{к}2} - E_{\text{к общ}},$$

$$Q = \frac{m_1 {\vartheta_0}^2}{2} + \frac{m_2 {\vartheta_0}^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\vartheta^2}{2},$$

$$Q = \frac{(m_1 + m_2){\vartheta_0}^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\vartheta^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\left({\vartheta_0}^2 - \vartheta^2\right)}{2}.$$

Скорости $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$ перед столкновением неизвестны. Определим их по закону сохранения импульса, который, согласно рис. 3.14, запишем в виде

$$(m_1\vartheta_0)^2 + (m_2\vartheta_0)^2 = (m_1 + m_2)^2\,\vartheta^2,$$

$$\vartheta_0^{\,2} = \vartheta^2 \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^{\,2} + m_2^{\,2}}.$$

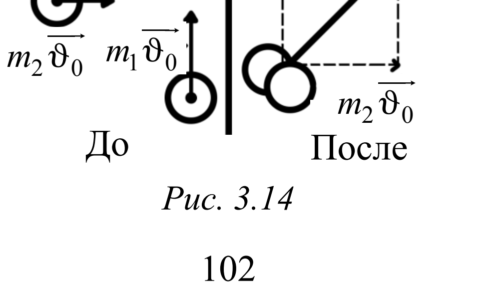


Рис. 3.14

Для удобства преобразуем выражение $\left(\vartheta_0{}^2-\vartheta^2\right)$:

$$\vartheta_0{}^2-\vartheta^2=\vartheta^2\left(\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1{}^2+m_2{}^2}-1\right)=\frac{2m_1m_2\vartheta^2}{m_1{}^2+m_2{}^2}.$$

Подставляем в выражение для Q:

$$Q=\frac{(m_1+m_2)m_1m_2\vartheta^2}{m_1^2+m_2^2}.$$

Ответ: 168 Дж.

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. Орудие, имеющее массу ствола $M=0{,}5$ т, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m=5{,}00$ кг, а его скорость во время вылета из ствола $\vartheta_0=0{,}46\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$. Если при выстреле ствол откатывается на расстояние $S=40$ см, то сила торможения ствола составляет:

1) 0,40 кН; 2) 3,13 кН; 3) 13,2 кН; 4) 15,6 кН; 5) 26,5 кН.

2. В тело массой $M=0{,}99$ кг, лежащее на горизонтальной поверхности, попадает пуля массой $m_0=10$ г и застревает в нём. Скорость пули направлена горизонтально, а её модуль равен $\vartheta_0=0{,}60\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$. Если после попадания пули тело движется поступательно и коэффициент трения скольжения между телом и поверхностью $\mu=0{,}04$, то до остановки тело пройдёт путь $\boldsymbol{S}$, равный:

1) 38 м; 2) 42 м; 3) 45 м; 4) 48 м; 5) 52 м.

3. Два тела массой m_1 и $m_2=3m_1$ двигались во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями, модули которых $\vartheta_1=8{,}0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $\vartheta_2=2{,}0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Если после столкновения тела продолжили движение как единое целое, то модуль их скорости ϑ сразу после взаимодействия равен:

1) 1,2 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) 1,8 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) 2,5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 4) 3,0 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 5) 3,6 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

4. Тело в верхней точке параболической траектории распалось на две равные части. Первая часть имеет скорость, направленную вертикально вниз. Если модуль скорости второй части в $\kappa=2$ раза больше, чем модуль скорости первой части, то угол, под которым направлен вектор скорости второй части к горизонту, равен:

1) 0°; 2) 30°; 3) 45°; 4) 60°; 5) 90°.

5. Горизонтально летящая пуля массой $m_0 = 10{,}0$ г попадает в брусок массой $M = 200$ г, покоящийся на гладкой горизонтальной поверхности, и пробивает его. После вылета из бруска пуля продолжает движение в том же направлении с вдвое меньшей скоростью. Если количество теплоты, выделившейся при взаимодействии пули с бруском, $Q = 590$ Дж, то модуль её начальной скорости ϑ_0 равен:

1) $300\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $360\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) $400\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 4) $450\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 5) $500\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

6. Если тело брошено с некоторой скоростью под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, то потенциальная энергия $E_{\text{пот}}$ тела на максимальной высоте подъема больше его кинетической энергии $E_{\text{кин}}$ в той же точке в:

1) 1 раз; 2) 4 раза; 3) 5 раз; 4) 8 раз; 5) 10 раз.

7. Мяч массой $m = 0{,}20$ кг бросают вертикально вниз с некоторой начальной скоростью с высоты $h = 1{,}0$ м. После второго удара о горизонтальный пол мяч поднимается на первоначальную высоту h. Если после каждого удара о пол модуль скорости мяча уменьшается в два раза, то при его броске была совершена работа $\boldsymbol{A}$, равная ... **Дж**.

8. Шар массой $m = 0{,}50$ кг подвешен на невесомой нерастяжимой нити. Шар отклонили от положения равновесия так, что нить стала горизонтальной, и отпустили. Сила натяжения $\boldsymbol{F}$ нити при прохождении положения равновесия равна ... **Н**.

9. Небольшой шар подвешен на легкой нерастяжимой нити длиной $L = 50$ см. Чтобы шар сделал полный оборот в вертикальной плоскости, его минимальная скорость в положении равновесия ϑ должна быть равна ... $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

10. Два шара массами соответственно m_1 и $m_2 = 2m_1$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях с равными по модулю скоростями. После соударения первое тело останавливается. Выделившееся при ударе количество теплоты составляет от начальной энергии первого тела $\boldsymbol{\frac{Q}{E_1}}$ ... **%**.

11. Пуля массой $m = 10{,}0$ г, летящая горизонтально со скоростью $\vartheta = 210\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, попадает в подвешенный на нити шар массой $M = 60{,}0$ г. Если пуля застревает в шаре, то количество потерянной механической энергии $\boldsymbol{E}$ равно ... **Дж**.

12. На горизонтальной плоскости расположены два связанные нитью одинаковых бруска массой $m = 100$ г каждый. Между брусками находится сжатая пружина (не скрепленная с брусками). Нить пережигают, и бруски разъезжаются в разные стороны так, что расстояние между ними возрастает на величину $S = 40{,}0$ мм. Если коэффициент трения между брусками и плоскостью равен $\mu = 0{,}25$, то потенциальная энергия сжатой пружины $\boldsymbol{E}_{\text{п}}$ равна ... **мДж**.

4. ГИДРОАЭРОСТАТИКА

В данном разделе рассматриваются условия равновесия жидкостей и газов, находящихся под воздействием приложенных к ним сил, и условия равновесия твёрдых тел, находящихся в жидкостях или газах.

Жидкости (газы) действуют на любую поверхность твёрдого тела, которая граничит с ними. Эти силы называются *силами давления*. Они обладают следующими особенностями:

- по своей природе это силы упругости сжатых жидкостей (газов), поэтому они зависят от свойств жидкостей (газов);
- силы давления всегда перпендикулярны поверхности, на которую действуют;
- силы давления распределены по всей поверхности соприкосновения твёрдого тела с жидкостью (газом), поэтому эти силы зависят от размера поверхности.

Для характеристики распределения сил давления вдоль поверхности соприкосновения вводится понятие «давление».

Давление *p* – скалярная физическая величина, равная модулю силы давления $F_д$, действующей на единицу площади поверхности S.

$$p = \frac{F_д}{S}. \tag{4.1}$$

Единица давления в СИ – паскаль $[p] = 1\ \text{Па} = 1\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

Гидростатическое давление – давление покоящейся жидкости, обусловленное её силой тяжести:

$$p = \rho g h, \tag{4.2}$$

где ρ – плотность жидкости; h – высота столба жидкости.

Данная формула позволяет рассчитывать гидростатическое давление жидкости, находящейся в сосуде, движущемся равномерно и прямолинейно.

Если сосуд с жидкостью будет двигаться с ускорением $\vec{a}$, то гидростатическое давление рассчитывается по формуле

$$p = \rho h \left| \left(\vec{g} - \vec{a} \right) \right|. \quad (4.3)$$

Гидростатическое давление не зависит от формы сосуда и от площади его дна.

Графическая зависимость гидростатического давления p от глубины h представлена на рис. 4.1.

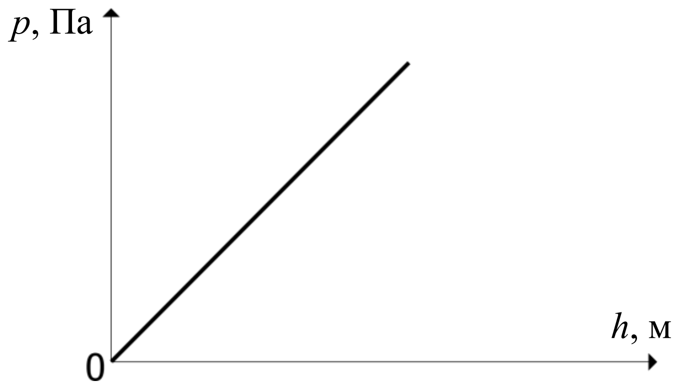


Рис. 4.1

Сила давления на дно сосуда:

$$F_{\text{дно}} = \rho g h S_{\text{дна}}. \quad (4.4)$$

Сила давления на боковую стенку сосуда равна произведению среднего бокового давления на площадь стенки $S_{\text{бок}}$:

$$F_{\text{бок}} = \frac{\rho g h}{2} S_{\text{бок}}, \quad (4.5)$$

где $S_{\text{дна}}$ и $S_{\text{бок}}$ – площади дна и стенки соответственно.

Закон Паскаля. Жидкость (газ) передаёт производимое на неё поверхностными силами внешнее давление по всем направлениям без изменения.

Из закона Паскаля следует:

● полное давление в любой точке жидкости складывается из давления p_0 на её поверхности и гидростатического давления столба жидкости, находящейся над этой точкой:

$$p = p_0 + \rho g h; \quad (4.6)$$

● в сообщающихся сосудах однородные жидкости устанавливаются на одном уровне;

● при равновесии в сообщающихся сосудах разнородных жидкостей отношение высот столбов жидкостей обратно отношению их плотностей:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \tag{4.7}$$

Атмосфера Земли – газовая оболочка, окружающая нашу планету. Находясь в поле тяготения Земли, атмосфера обладает весом, вследствие чего она оказывает давление на Землю. Опытным путём атмосферное давление впервые было измерено в 1644 г. Э. Торричелли. Его классический опыт состоял в том, что стеклянную метровую трубку наполнили ртутью, закрыли, перевернули и опустили в сосуд с ртутью, предоставив возможность ртути в трубке опускаться. Столб остановился на высоте 760 мм. С того момента ведёт своё начало понятие *нормального атмосферного давления*:

$$p_{\text{а}} = 760\ \text{мм рт. ст.} = 101{,}3\ \text{кПа} \approx 10^5\ \text{Па},$$

где мм рт. ст. – миллиметры ртутного столба являются внесистемной единицей измерения атмосферного давления.

Барометр – прибор для измерения атмосферного давления.

Закон Архимеда. На тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила (архимедова), численно равная весу жидкости или газа, вытесненного телом, направленная вертикально вверх и приложенная к центру тяжести вытесненного объёма жидкости (газа):

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{ж}} g V, \tag{4.8}$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; V – объём погруженной части тела.

Задачи данной темы разнообразны по содержанию.

Задача 1

В трёх одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть $\left(\rho_{\text{рт}} = 13{,}6\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$. Если в левый сосуд налить слой воды $\left(\rho_{\text{в}} = 1{,}00\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$ высотой H_1 = 92,0 мм, в правый – высотой H_2 = 112 мм, то в среднем сосуде уровень ртути $\boldsymbol{h_3}$ повысится на ... **мм**.

Решение

В задачах на применение закона сообщающихся сосудов:

● делается чертёж (рис. 4.2);

● записывается выражение на основании несжимаемости жидкости;

● внутри жидкостей выбираются точки, лежащие на одном уровне сообщающихся сосудов, и в этих точках записывается выражение на основании формулы (4.7).

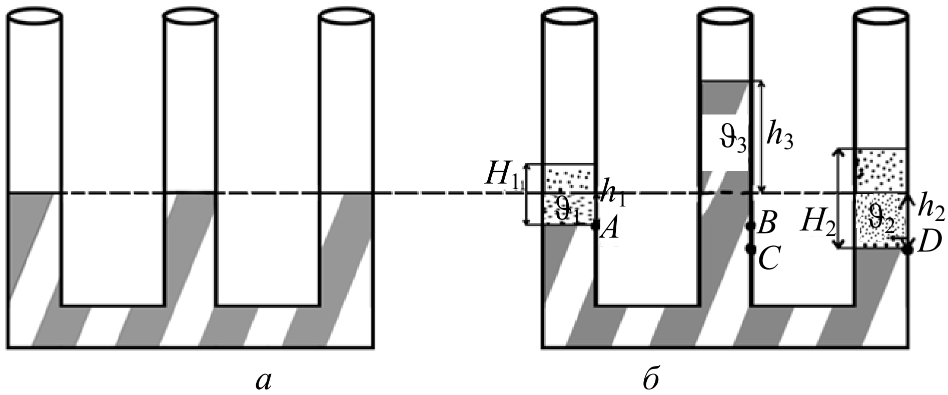


Рис. 4.2

На рис. 4.2, *а* указываем первоначальное состояние ртути. Переносим это состояние пунктирной линией на рис. 4.2, *б*. В принципе, рис. 4.2, *а* делается для большей наглядности, можно обойтись без него, сразу нарисовав пунктирной линией начальный уровень во всех сосудах (рис. 4.2, *б*).

Получаем H_1 и H_2 – высота воды, добавленной в левый и правый сосуды соответственно.

h_1 и h_2 – глубина погружения уровня ртути после добавления воды в левом и правом сосудах соответственно.

V_1 и V_2 – объёмы ртути (под штриховой линией), вытесненной водой в левом и правом сосудах соответственно.

V_3 – объём вытесненной ртути в центральном сосуде.

Из свойства несжимаемости ртути получаем

$$V_3 = V_1 + V_2 \Rightarrow Sh_3 = Sh_1 + Sh_2.$$

Следовательно, искомый уровень ртути в среднем сосуде можно найти так: $h_3 = h_1 + h_2$.

Из закона Паскаля в точках A и B формула (4.7) будет иметь вид

$$\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} = \frac{h_3 + h_1}{H_1} \Rightarrow \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} = \frac{h_2 + 2h_1}{H_1} \Rightarrow h_2 + 2h_1 = \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} H_1.$$

В точках C и D формула (4.7) будет иметь вид

$$\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} = \frac{h_3 + h_2}{H_2} \Rightarrow \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} = \frac{2h_2 + h_1}{H_2} \Rightarrow 2h_2 + h_1 = \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} H_2.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} h_2 + 2h_1 = \dfrac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} H_1, \\[2ex] 2h_2 + h_1 = \dfrac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{рт}} H_2. \end{cases}$$

Откуда выражаем h_1 и h_2:

$$\begin{cases} h_1 = (2H_1 - H_2)\dfrac{\rho_в}{3\rho_{рт}}, \\ h_2 = (2H_2 - H_1)\dfrac{\rho_в}{3\rho_{рт}}. \end{cases}$$

Тогда уровень ртути в среднем сосуде равен

$$h_3 = \frac{\rho_в}{3\rho_{рт}}(H_2 + H_1),$$

$$h_3 = \frac{1{,}00\,\dfrac{г}{см^3}}{3\cdot 13{,}6\,\dfrac{г}{см^3}}(92{,}0\text{ мм} + 112\text{ мм}) = 5\text{ мм}.$$

Ответ: 5 мм.

На законе Паскаля и на свойстве практической несжимаемости жидкости основано действие *гидравлического пресса*.

Гидравлический пресс – это устройство, состоящее из двух сообщающихся между собой цилиндрических сосудов различного диаметра, снабжённых подвижными поршнями (рис. 4.3).

Внешняя сила $\vec{F}_1$ действует на поршень меньшей площади S_1 и создаёт в жидкости давление $p = \dfrac{F_1}{S_1}$. Согласно закону Паскаля, давление в жидкости без изменения передаётся во второй сосуд площадью S_2:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}. \tag{4.9}$$

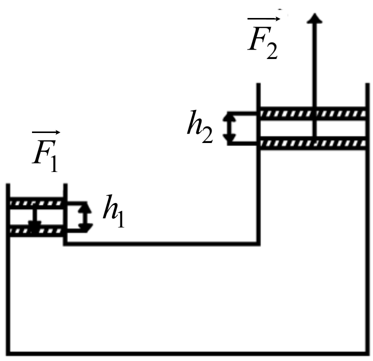


Рис. 4.3

Отсюда

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 = nF_1, \qquad (4.10)$$

где n – отношение площади широкого поршня к площади узкого поршня.

Следовательно, гидравлический пресс *даёт выигрыш в силе* во столько раз, во сколько площадь широкого поршня превышает площадь узкого (n – раз).

Выигрыша в работе пресс не даёт. При опускании узкого поршня за один ход на h_1 сила $\vec{F}_1$ совершает работу $A_1 = F_1 h_1$. Широкий поршень поднимается под действием силы $\vec{F}_2$ на h_2 и совершает работу $A_2 = F_2 h_2$.

Жидкость практически несжимаема, поэтому

$$S_1 h_1 = S_2 h_2,$$

$$A_2 = F_2 h_2 = nF_1 \frac{h_1}{n} = F_1 h_1 = A_1. \qquad (4.11)$$

В реальности из-за наличия трения полезная работа A_2 меньше затраченной A_1 ($A_2 < A_1$) и КПД пресса $\eta < 100$ %.

Задача 2

При помощи гидравлического пресса с отношением диаметров поршней 1 : 10 и мощностью двигателя $P = 5{,}0$ кВт поднимают груз массой $M = 1{,}2 \cdot 10^5$ кг. Если КПД пресса $\eta < 80$ % и за один ход узкий поршень опускается на $h = 20$ см, то число его $\boldsymbol{N}$ ходов в течение времени $\tau = 1{,}0$ мин составляет ... .

Решение

Так как за один ход узкий поршень опускается на $h = 20$ см, то за N ходов опустится на $h_1 = Nh$.

КПД пресса $\eta < 80$ %, значит, полезная работа A_2 по подъёму груза на некоторую высоту h_2 меньше затраченной работы двигателя A_1:

$$A_2 = \eta A_1,$$

$$A_1 = P\tau,\ A_2 = mgh_2,$$

$$mgh_2 = \eta P\tau.$$

Отношение диаметров поршней 1 : 10 означает, что площади широкого и узкого относятся друг к другу как $n = 100$, следовательно,

$$h_2 = \frac{h_1}{n} = \frac{hN}{n},$$

$$mg\frac{hN}{n} = \eta P\tau \Rightarrow N = \frac{\eta P\tau n}{mgh}.$$

Численно:

$$N = \frac{0{,}80 \cdot 5{,}0 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 100}{120 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}20} = 100 \text{ ходов.}$$

Ответ: 100 ходов.

При решении задач на движение в жидкости или газе используется закон динамики с учётом выталкивающей силы и дополнительных кинематических соотношений.

Возможны три ситуации поведения тела в жидкости (газе): тело тонет $(F_a < mg)$, тело всплывает $(F_a > mg)$ и тело плавает $(F_a = mg)$.

Задача 3

Тело массой $m = 8{,}0$ кг, поверхностью которого является сфера, плавает в воде $\left(\rho_1 = 1{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$, погрузившись в нее наполовину. Если внутри тела имеется полость, объем которой $V_\text{п} = 15$ дм^3, то плотность вещества тела $\boldsymbol{\rho_2}$ равна:

1) $0{,}5 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; 3) $3{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; 5) $8{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

2) $1{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; 4) $5{,}0 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

Решение

Тело плавает, значит, сила Архимеда (выталкивающая сила) равна силе тяжести

$$F_a = mg.$$

Подставив формулу (4.8), получаем

$$\rho_1 g\frac{V}{2} = mg,$$

где V – общий объём тела (включая объём полости $V_\text{п}$): $V = V_\text{т} + V_\text{п}$;

$$\rho_1\frac{V_\text{т} + V_\text{п}}{2} = m,$$

$$\frac{\rho_1}{2}\left(\frac{m}{\rho_2} + V_\text{п}\right) = m.$$

После преобразований получаем формулу для определения плотности вещества тела ρ_2:

$$\rho_2 = \frac{m\rho_1}{2m - V_п\rho_1}.$$

Численно:

$$\rho_2 = \frac{8,0 \cdot 1,0 \cdot 10^3}{2 \cdot 8,0 - 15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,0 \cdot 10^3} = 8,0 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}.$$

Ответ: 5).

Задачи для самостоятельного закрепления темы

1. Сосуд в форме куба до половины заполнен водой (плотность воды $\rho_в = 1,0 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$). Отношение модуля силы давления, с которой вода действует на дно сосуда, к модулю средней силы давления, с которой она действует на боковую грань, равно:

1) 1,5; 2) 2,0; 3) 4,0; 4) 8,0; 5) 10.

2. Под действием силы, модуль которой F_1 = 0,3 кН, малый поршень гидравлического пресса опустился на h_1 = 10 см. Если большой поршень при этом переместился на h_2 = 5,0 мм, а трением можно пренебречь, то на больший поршень действует сила, модуль которой $\boldsymbol{F_2}$ равен:

1) 2,0 кН; 2) 3,0 кН; 3) 4,0 кН; 4) 5,0 кН; 5) 6,0 кН.

3. Простейший жидкостный манометр представляет собой U-образную трубку с ртутью. Левое колено манометра открыто, другое соединено с сосудом, в котором измеряют давление газа. Если атмосферное давление p_0 = 100 кПа, а высоты столбов ртути плотностью $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$ в коленах манометра соответственно равны h_1 = 290 мм и h_2 = 190 мм, то давление $\boldsymbol{p}$ газа в сосуде равно:

1) 105 кПа; 2) 110 кПа; 3) 114 кПа; 4) 120 кПа; 5) 125 кПа.

4. Барометрическая трубка наклонена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Если атмосферное давление p = 100 кПа, плотность ртути $\rho = 13,6 \frac{г}{см^3}$, то длина столбика $\boldsymbol{h}$ ртути равна:

1) 76,0 см; 2) 94,0 см; 3) 115 см; 4) 125 см; 5) 147 см.

5. В два сообщающихся цилиндрических сосуда налита жидкость с плотностью $\rho_1 = 1,20\ \frac{г}{см^3}$. Диаметр узкого сосуда в два раза меньше диаметра широкого. В широкий сосуд долили масло плотностью $\rho_2 = 0,80\ \frac{г}{см^3}$, высота столбика которого $h_2 = 22,5$ см. Вследствие этого уровень жидкости в узком сосуде поднялся на Δh:

1) 6,2 см; 2) 8,5 см; 3) 9,3 см; 4) 10 см; 5) 12 см.

6. Через реку на плоту необходимо переправить автомобиль массой $m = 2,0$ т. Длина бревен $L = 10$ м и средняя площадь поперечного сечения $S = 300$ см^2. Плотности дерева и воды соответственно равны $\rho_1 = 0,60\ \frac{г}{см^3}$ и $\rho_2 = 1,0\ \frac{г}{см^3}$. Минимальное количество $\boldsymbol{N}$ бревен, необходимое для переправы, равно:

1) 11; 2) 13; 3) 15; 4) 17; 5) 19.

7. При помощи гидравлического подъёмника поднимают груз. Площадь большого поршня подъёмника превышает площадь малого в $k = 150$ раз, а перемещение малого поршня за один ход $\Delta h_1 = 6,0$ см. Если совершить $N = 1000$ ходов малым поршнем, то груз поднимется на высоту $\Delta \boldsymbol{h_2}$, равную ... **см**.

8. Пробка плавает в сосуде с водой плотностью $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$. Если эту пробку поместить в сосуд с другой жидкостью, то объём погруженной в жидкость части пробки увеличится в $k = 1,25$ раза. Следовательно, плотность этой жидкости ρ_2 равна ... $\frac{кг}{м^3}$.

9. Деревянный шарик (из материала плотностью $\rho_1 = 0,8 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$) лежит на дне сосуда с водой, при этом наполовину погрузившись в воду (плотностью $\rho_2 = 1,0 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$). Если модуль силы взаимодействия шара со дном $F = 7,5$ Н, то масса $\boldsymbol{m}$ шара равна ... **кг**.

10. Если шарик (из материала плотностью $\rho_1 = 0{,}5 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$) начинает всплывать в воде (плотностью $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$), то в начальный момент модуль ускорения ***a*** шарика равен ... $\mathbf{\frac{м}{с^2}}$.

11. Для транспортировки стальных $\left(\rho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}\right)$ труб морем $\left(\rho_2 = 1{,}03 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}\right)$ их заваривают с двух сторон так, чтобы они были водонепроницаемыми. Труба длиной L = 500 см и массой m = 3,90 т не утонет при наименьшем внутреннем диаметре ***d***, равном ... **мм**.

12. Два открытых сообщающихся цилиндрических сосуда, площади сечений которых равны S_1 = 10 см^2 и S_2 = 5,0 см^2, заполнены жидкостью $\left(\rho = 1{,}0\ \frac{г}{см^3}\right)$ до уровня, равного половине высоты узкого сосуда. На поверхности жидкости в широком сосуде лежит невесомый поршень. На поршень осторожно сыплют песок. Если масса песка, при котором жидкость начнёт выливаться из узкого сосуда, m = 750 г, то высота ***h*** узкого сосуда равна ... **дм**.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ ТЕМ

1.1. Равномерное движение.
1. 5; **2.** 3; **3.** 4; **4.** 3; **5.** 5.

1.2. Относительность движения. Сложение скоростей.
1. 540; **2.** 35; **3.** 6,0; **4**. 75; **5.** 36; **6.** 26; **7.** 22; **8.** 13; **9.** 5,0; **10.** 450;
11. 10; **12.** 36 и 45.

1.3. Неравномерное движение. Средняя скорость.
1. 2; **2.** 3; **3.** 3; **4.** 3; **5.** 2; **6.** 1.

1.4. Равноускоренное прямолинейное движение.
1. 3; **2.**5; **3.** 4; **4.** 1; **5.** 4; **6.** 4; **7.** 3; **8.** 18; **9.** 190; **10.** 121;
11. 18; **12.** 5; **13**. 5.

1.5. Движение тела, брошенного горизонтально.
1. 20; **2.** 20; **3.** 10; **4.** 13; **5.** 10; **6.** 15.

1.6. Движение тела по окружности с постоянной по модулю линейной скоростью.
1. 100; **2.** 39; **3.** 40; **4.** 393; **5.** 50; **6.** 36; **7.** 400; **8.** 25; **9.** 233;
10. 3; Указание: $t = \pi R \dfrac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2 \cdot \vartheta_1 \vartheta_2}$.

2.1. Законы Ньютона.
1. 2; **2.** 5; **3.** 3; **4.** 3; **5.** 4; **6.** 4; **7.** 4; **8.** 3.

2.2. Движение тел под действием сил.
1. 3; **2.** 1; **3.** 4; **4**. 4; **5.** 5; **6.** 1; **7.** 1; **8.** 3; **9.** 10; **10.** 1;
11. 600; **12.** 21; **13.** 5; **14.** 36; **15.** 4.

3.1. Работа. Мощность. Энергия.
1. 5; **2.** 3; **3.** 5; **4**. 2; **5.** 3; **6.** 4; **7.** 450; **8.** 70; **9.** 163; **10.** 1;
11. 80; **12.** 36.

3.2. Импульс тела. Импульс силы.
1. 3; **2.** 5; **3.** 2; **4.** 5; **5.** 30; **6.** 5; **7.** 358; **8.** 10.

3.3. Законы сохранения в механике.
1. 3; **2.** 3; **3.** 3; **4.** 2; **5.** 3; **6.** 1; **7.** 30; **8.** 15; **9.** 5; **10.** 50;
11. 189; **12.** 10.

4. Гидроаэростатика.
1. 3; **2.** 5; **3.** 3; **4.** 5; **5.** 5; **6.** 4; **7.** 40; **8.** 800; **9.** 2; **10.** 10;
11. 915; **12.** 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Болсун, А. И. Физика в экзаменационных задачах : справ. пособие для абитуриентов, школьников и студентов / А. И. Болсун, Б. К. Галякевич. – Минск : Беларус. энцыкл. імя П. Броўкі, 2008. – 512 с.

Буров, Л. И. Физика от А до Я / Л. И. Буров, В. М. Стрельченя. – Минск : Попурри, 2006. – 592 с.

Гольдфарб, Н. И. Сборник вопросов и задач по физике : учеб. пособие / Н. И. Гольдфарб. – М. : Высш. шк., 1983. – 351 с.

Демидович, С. В. Физика: 11 класс / С. В. Демидович. – Ростов н/Д : Феникс, 2017. – 95 с.

Дорофейчик, В. В. Физика. Обобщающие и репетиционные тесты для подготовки к ЦТ : пособие для учащихся / В. В. Дорофейчик, Н. Г. Кембровская. – Минск : Сэр-Вит, 2006. – 144 с.

Задачи по физике для подготовительных отделений вузов / Л. А. Аксенович [и др.] ; под ред. А. И. Гущи. Минск : Выш. шк., 1980. – 188 с.

Луцевич, А. А. Решение задач по механике и молекулярной физике / А. А. Луцевич, А. В. Равков, Р. Н. Козел. – Минск : Нар. асвета, 1989. – 175 с.

Практикум по методике решения физических задач / В. И. Богдан [и др]. – Минск : Выш. шк., 1983. – 270 с.

Савченко, Н. Е. Решение задач по физике : справ. пособие / Н. Е. Савченко. – Минск : Выш. шк., 1998. – 367 с.

Стрельченя, В. М. Физика: полный курс подготовки к тестированию и экзаменам / В. М. Стрельченя, В. Г. Шепелевич. – Минск : Универсал-Пресс, 2005. – 592 с.

Физика: готовимся к централизованному тестированию: некоторые особенности ЦТ 2008 г. Методика расчета тестового балла. Решения и комментарии к контрольному тесту. Тренировочные тесты / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск : Юнипресс, 2009. – 128 с.

Централизованное тестирование. Физика: полный сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск : Аверсэв, 2011. – 279 с.

Централизованное тестирование. Физика: полный сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск : Аверсэв, 2015. – 264 с.

Учебное издание

Демидович Светлана Владимировна

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

Пособие

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*
Дизайн обложки *В. Н. Васина*
Технический редактор *Л. В. Жаборовская*
Компьютерная верстка *А. А. Микулевича*
Корректор *А. В. Лебедько*

Электронный ресурс 1,8 Мб

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.