Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существуют такая $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$ и такая вектор-функция Ляпунова $V(t,x) = (V_1(t,x),\ldots,V_l(t,x))^T$, что выполнены следующие условия:*

1). $V_1(t,x) \geqslant 0,\ldots,V_l(t,x) \geqslant 0$.

2). $b(\|x\|) \leqslant \sum_{i=1}^{l} V_i(t,x) \leqslant a(\|x\|)$ для всех $(t,x) \in M(\tau)\times\mathbb{R}^n$.

3). $\|(\partial V_i/\partial x)(t,x)\| \leqslant L_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+\times K$, где K – любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $L = (L_1,\ldots,L_l)^T > 0$ – постоянный вектор, зависящий от K.

Кроме того, пусть решения системы сравнения (3) *для системы* (1) *тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$. Тогда решения системы* (1) *тотально ограничены по Пуассону.*

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-139.2017.1.

Библиографические ссылки

1. *Лапин К.С.* Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 40-50.
2. *Лапин К.С.* Ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и функции Ляпунова // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 2. С. 223-235.

ТЕОРЕМА ФИЛИППОВА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ НА МНОЖИТЕЛИ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

А.А. Леваков

Белорусский государственный университет

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

levakov@tut.by

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство; $\mathcal{S}(X)$ — множество всех подмножеств из X, а $\mathrm{cl}\,(X)$, $\mathrm{comp}\,(X)$ — соответственно семейство всех непустых замкнутых, непустых компактных подмножеств из X. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — полное вероятностное пространство с потоком под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$; T — либо $\mathbb{R}_+$, либо отрезок $[0,a]$.

Будем говорить, что отображение $f : T \times \Omega \times X \to Y$, является $(\mathcal{F}_t)$-согласованным отображением Каратеодори, если оно непрерывно по x при всех фиксированных $(t, \omega) \in T \times \Omega$, $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримо при каждом фиксированном $x \in X$ и $(\mathcal{F}_t)$-измеримо при каждых фиксированных $(t, x) \in T \times X$.

Приведем современный вариант теоремы Филиппова о неявной функции.

Предложение 1. Пусть отображение $f : T \times \Omega \times X \to Y$ является $(\mathcal{F}_t)$-согласованным отображением Каратеодори, отображения $\Gamma : T \times \Omega \to \mathrm{comp}(X)$ и $x : T \times \Omega \to Y$ — $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримы $(\mathcal{F}_t)$-согласованы и $x(t, \omega) \in f(t, \omega, \Gamma(t, \omega))$ для всех (t, ω). Тогда существует $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримый $(\mathcal{F}_t)$-согласованный селектор $y : T \times \Omega \to X$ отображения Γ такой, что для всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$ имеет место равенство $x(t, \omega) = f(t, \omega, y(t, \omega))$.

Предложение 1 остается справедливым и в том случае, когда в нем предположение о компактности множества $\Gamma(t, \omega)$ заменено на следующее условие: при каждых фиксированных (t, ω, y) выполняется $\rho(y, Q_n(t, \omega)) \underset{n \to \infty}{\to} \rho(y, H(t, \omega))$, где $H(t, \omega) = \{x \in X : x \in \Gamma(t, \omega), \rho(f(t, \omega, x), x(t, \omega)) = 0\}, Q_n(t, \omega) = \{x \in X : x \in \Gamma(t, \omega), \rho(f(t, \omega, x), x(t, \omega)) < 1/n\}$.

Предложение 2. Пусть $\Gamma : T \times \Omega \to \mathrm{cl}(X)$ — многозначное отображение. Следующие утверждения эквивалентны: 1) отображение Γ — $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримое $(\mathcal{F}_t)$-согласованое; 2) для каждого $x \in X$ функция $(t, \omega) \to \rho(x, \Gamma(t, \omega))$ — $(\beta(T), \mathcal{F})$-измерима $(\mathcal{F}_t)$-согласована; 3) существует $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримое $(\mathcal{F}_t)$-согласованое семейство селекторов, аппроксимирующее отображение Γ.

Предложение 3. Пусть отображения $\Gamma : T \times \Omega \to \mathrm{cl}(X)$ и $x : T \times \Omega \to X$ — $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримы $(\mathcal{F}_t)$-согласованы. Тогда для любого $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримого $(\mathcal{F}_t)$-согласованного отображения $\delta : T \times \Omega \to X$, такого, что $\delta(t, \omega) > 0 \ \forall (t, \omega)$, существует $(\beta(T), \mathcal{F})$-измеримый $(\mathcal{F}_t)$-согласованный селектор $y : T \times \Omega \to X$ отображения Γ такой, что для всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$

$$0 \le \rho(x(t, \omega), y(t, \omega)) - \rho(x(t, \omega), \Gamma(t, \omega)) < \delta(t, \omega).$$

Используя предложение 1 легко доказать следующие утверждения о разложении матриц на сомножители с заданными свойствами, которые используются при построении теории стохастических дифференциальных уравнений и включений.

Предложение 4. Пусть $A : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — предсказуемое отображение такое, что при каждых (t,ω) матрица $A(t,\omega)$ — неотрицательная и симметрическая. Тогда существуют предсказуемые диагональная матрица $\Lambda(t,\omega) = \operatorname{diag}(\lambda_{11}(t,\omega),\ldots,\lambda_{dd}(t,\omega))$, $\lambda_{11} \geq \ldots \geq \lambda_{dd} \geq 0$, и ортогональная матрица $T(t,\omega)$ такие, что $A = T\Lambda T^\top$, где λ_{ii} — собственные значения матрицы $A(t,\omega)$.

Предложение 5. Пусть $A : \mathbb{R}_+\Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — предсказуемое отображение. Существуют предсказуемые диагональная матрица $\Lambda(t,\omega) = \operatorname{diag}(\lambda_{11}(t,\omega),\ldots,\lambda_{dd}(t,\omega))$, $\lambda_{11} \geq \ldots \geq \lambda_{dd} \geq 0$, и ортогональные матрицы $T(t,\omega)$ и $P(t,\omega)$ такие, что $A = T\Lambda P$, где $\lambda_{ii}^2, i = 1,\ldots,d$, — собственные значения матрицы $AA^\top$, T — матрица, столбцы которой — собственные вектора матрицы $AA^\top$.

Предложение 6. Для любого предсказуемого отображения $A : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ существуют предсказуемые симметрическая неотрицательная матрица $B(t,\omega)$ и ортогональная матрица $D(t,\omega)$ такие, что $A(t,\omega) = B(t,\omega)D(t,\omega)$.

В предложениях 4 – 6 σ-алгебру $\mathcal{P}_T$ можно заменить на σ-алгебру Σ_T или на σ-алгебру $\mathcal{M}_T$, или на борелевскую σ-алгебру на $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, где в последнем случае $\Omega = \mathbb{R}^d$.

ДИНАМИКА ЗАВИСИМЫХ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И РАВНОВЕСИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ

О.А. Малафеев, Н.Д. Рединских

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия
malafeyevoa@mail.com, redinskich@yandex.ru

Введение. Е.А. Барбашин в своей кандидатской диссертации «Некоторые вопросы теории обобщенных динамических систем» [1] заложил основы теории динамических систем без предположения единственности. Его работа положила начало многим исследованиям (см. напр. [2–7]) в этой области.

Динамические игры с зависимыми движениями. Динамикой игры с зависимыми движениями называем пару $(\mathcal{D}, A)$, где $\mathcal{D}$ – обобщенная динамическая система в полном локально-компактном метрическом пространстве X, A – управление игры с зависимыми движениями, определяемое аксиоматически следующим образом.