

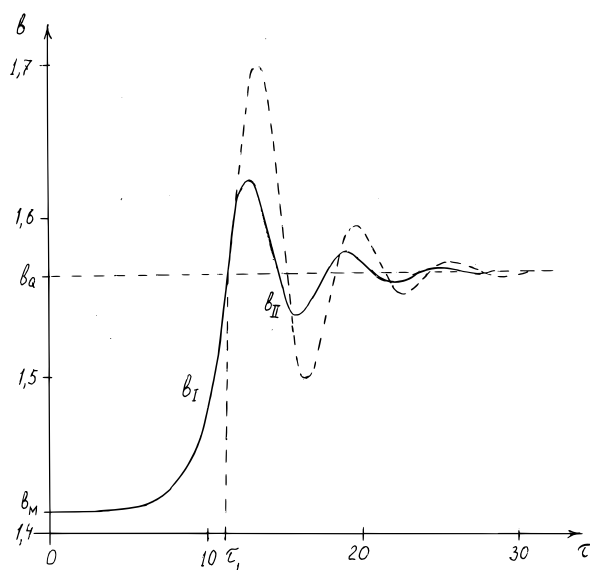


Рис. 2. Изменение амплитуды

Библиографические ссылки

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Красноярск: Издательство Красноярского университета, 1995.

ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И ТОТАЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ПУАССОНУ

К.С. Лапин

Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева
Студенческая 11 А, 430007 Саранск, Россия
klapin@mail.ru

В работах [1] и [2] была начата разработка нового направления в теории ограниченности решений систем дифференциальных уравнений, а именно, развитие теории ограниченности решений по Пуассону. Понятие ограниченности решений по Пуассону, характеризуются тем, что решение может не содержаться полностью в некотором шаре фазового пространства, но обладает свойством счетного числа раз возвращаемости в этот шар. В настоящей работе введено понятие тотальной ограниченности, т.е. ограниченности при малых возмущениях, решений по Пуассону. На основе метода вектор-функций Ляпунова получен достаточный признак тотальной ограниченности решений по Пуассону.

Пусть заданы произвольные системы дифференциальных уравнений от $n \geq 1$ переменных

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x))^T, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + H(t, x), \quad H(t, x) = (H_1(t, x), \dots, H_n(t, x))^T, \quad (2)$$

где вектор-функция $F(t, x)$ и вектор-функция $H(t, x)$, называемая возмущением системы (1), определены и непрерывны в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Здесь через $\mathbb{R}^+$ обозначено множество $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$. Единственности решения задачи Коши для систем (1) и (2) не требуется. Кроме того, пусть система уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi), \quad f(t, \xi) = (f_1(t, \xi), \dots, f_l(t, \xi))^T, \quad (3)$$

где непрерывная вектор-функция $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ удовлетворяет условию Важевского, является системой сравнения для системы (1) с вектор-функцией Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, т.е. выполнено условие $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$.

Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$, будем называть $\mathcal{P}$ -последовательностью. Для каждой $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ через $M(\tau)$ обозначается множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$. Кроме того, через $a(r)$ и $b(r)$ обозначаются произвольные функции, где $r \geq 0$ и $t \geq 0$, обладающие следующими свойствами: $a(r) > 0$ – возрастающая функция, $b(r) \geq 0$ – неубывающая функция и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Определение 1. Будем говорить, что решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону, если для системы (1) найдется такая $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, и для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq \|x\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$, где $\mathbb{R}^+(t_0) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq t_0\}$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, будем говорить, что решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$.

Теорема 1. Пусть для системы (1) существуют такая $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ и такая вектор-функция Ляпунова $V(t, x) = (V_1(t, x), \dots, V_l(t, x))^T$, что выполнены следующие условия:

1). $V_1(t, x) \geq 0, \dots, V_l(t, x) \geq 0$.

2). $b(\|x\|) \leq \sum_{i=1}^l V_i(t, x) \leq a(\|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$.

3). $\|(\partial V_i / \partial x)(t, x)\| \leq L_i, 1 \leq i \leq l$, для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K – любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $L = (L_1, \dots, L_l)^T > 0$ – постоянный вектор, зависящий от K .

Кроме того, пусть решения системы сравнения (3) для системы (1) тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-139.2017.1.

Библиографические ссылки

1. Лапин К.С. Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 40-50.
2. Лапин К.С. Ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и функции Ляпунова // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 2. С. 223-235.

ТЕОРЕМА ФИЛИППОВА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ НА МНОЖИТЕЛИ С ЗАДААННЫМИ СВОЙСТВАМИ

А.А. Леваков

Белорусский государственный университет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
levakov@tut.by

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство; $\mathcal{S}(X)$ — множество всех подмножеств из X , а $\text{cl}(X)$, $\text{comp}(X)$ — соответственно семейство всех непустых замкнутых, непустых компактных подмножеств из X . $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство с потоком под- σ -алгебр $\mathcal{F}_t, t \geq 0$; T — либо $\mathbb{R}_+$, либо отрезок $[0, a]$.