ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА СОГЛАСОВАННЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В.А. Зайцев

Удмуртский государственный университет,

Университетская 1, 426034 Ижевск, Россия

verba@udm.ru

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему с дискретным временем

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

$$y(t) = C^*(t)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}^k. \tag{2}$$

Предполагаем, что функция $A(\cdot)$ вполне ограничена [1], то есть при каждом t существует $A^{-1}(t)$, и найдется такое a, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{Z}} \|A(t)\| \leqslant a$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{Z}} \|A^{-1}(t)\| \leqslant a$. Через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначим полный спектр показателей Ляпунова [2, с. 57] свободной системы

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде линейной обратной связи по выходу $u(t) = U(t)y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда система (1), (2) переходит в замкнутую систему

$$x(t+1) = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Исследуется задача о локальном управлении полным спектром показателей Ляпунова $\lambda_1(A + BUC^*) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + BUC^*)$ системы (4).

Определение 1. *Полный спектр показателей Ляпунова системы (4) называется локально управляемым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого набора чисел $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, удовлетворяющего неравенству $\max\limits_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \alpha_j| \leqslant \delta$, найдется управление $U(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, такое, что $\|U(t)\| \leqslant \varepsilon$, $t \in \mathbb{Z}$, для которого $\lambda_j(A + BUC^*) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$.*

Данное определение является дискретным аналогом соответствующего определения, введенного для управляемых дифференциальных систем с непрерывным временем в работе [3].

Построим по системе (1), (2) «большую систему» [4]

$$z(t+1) = F(t)z(t) + G(t)v(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^{mk}, \tag{5}$$

$$F(t) = A(t) \otimes (A^T(t-1))^{-1}, \quad G(t) = B(t) \otimes \overline{C(t)}. \tag{6}$$

Здесь $\otimes$ — прямое произведение матриц. В работе [4] было введено определение согласованности для системы (1), (2). Это определение аналогично соответствующему определению [5] для систем с непрерывным временем. Согласованность системы (1), (2) (с невырожденной матрицей $A(t)$) на промежутке $[t_0, t_1)$ равносильна [4] полной управляемости большой системы (5), (6) на $[t_0, t_1)$. Введем следующее определение: будем говорить, что система (1), (2) *равномерно согласованна*, если большая система равномерно вполне управляема (в смысле Калмана). Система (3) называется *диагонализируемой* [3], если она приводится ляпуновским преобразованием к системе с диагональной матрицей.

Теорема 1. *Пусть система* (1), (2) *равномерно согласованна, а система* (3) *диагонализируема. Тогда полный спектр показателей Ляпунова системы* (4) *локально управляем.*

Теорема 1 является дискретным аналогом теоремы 5 [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16–01–00346-а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

Библиографические ссылки

1. *Демидович В.Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.
3. *Попова С.Н., Тонков Е.Л.* Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1949–1957.
4. *Зайцев В.А.* Согласованность и управление спектром собственных значений дискретных билинейных систем // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 1498–1509.
5. *Попова С.Н., Тонков Е.Л.* Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.