

4. Вариационный подход. Он сводится к нахождению $x(t)$ минимизирующего функционал

$$J[x(\cdot)] = \int_0^T (\langle \dot{x} - f, \Omega_1(\dot{x} - f) \rangle + \langle y - h, \Omega_2(y - h) \rangle) dt. \quad (6)$$

Необходимое условие оптимальности сводится к решению двухточечной краевой задачи. Рассмотрены особенности такой задачи и исследованы условия, при которых она будет некорректно поставленной. Предложен метод, алгоритмы решения и возможность построения оценителя состояния управляемой динамической системы с использованием скользящего интервала.

О СВОЙСТВАХ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ И ТРАЕКТОРИЮ

М.И. Гусев

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН

С. Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия

gmi@imm.uran.ru

Введение. Рассматривается задача описания границы множества достижимости в фиксированный момент времени для нелинейной управляемой системы с совместными интегральными ограничениями на управление и траекторию. Для линейных управляемых систем с выпуклыми квадратичными ограничениями множество достижимости при фиксированном начальном состоянии системы представляет из себя эллипсоид, параметры которого допускают конструктивное описание [1]. В случае нелинейной управляемой системы множество достижимости, как правило, не является выпуклым, его описание и приближенное построение представляет более трудную задачу. В докладе показано, что управления, переводящие систему на границу множества достижимости, являются локальными решениями некоторых вспомогательных задач оптимального управления (см. [2, 3]), что позволяет для построения множества достижимости использовать соотношения принципа максимума Понтрягина.

1. Основные результаты Управляемая система имеет следующий вид

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) \in X^0, \quad (1)$$

$t_0 \leq t \leq t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $X^0 \subset \mathbb{R}^n$, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ непрерывные и непрерывно дифференцируемые по x отображения, удовлетворяющие условиям, обеспечивающим продолжимость решений на промежуток $[t_0, t_1]$. Обозначим $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (Q(t, x(t)) + u^\top(t)R(t, x(t))u(t))dt$, где функция $Q(t, x) \geq 0$ и положительно определенная матрица $R(t, x)$ непрерывны на $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ а $x(\cdot)$ – решение уравнения (1), назовем допустимым управляемым процессом, если $J(x(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu$, $\mu > 0$ – заданное число. Множество достижимости $G(t_1)$ определяется как множество векторов $x(t_1)$, отвечающих всевозможным допустимым процессам.

Теорема 1. Пусть допустимый управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ удовлетворяет условию $\hat{x}(t_1) \in \partial G(t_1)$, и пусть линеаризация системы (1) вдоль $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ вполне управляема. Тогда $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ является локальным решением экстремальной задачи

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \rightarrow \min, \quad x(t_0) \in X^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2,$$

где $x^1 = \hat{x}(t_1)$, при этом $J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \mu$.

Доказательство опирается на теорему Грейвса-Люстерника для накрывающих отображений и использует свойства производной отображения $u(\cdot) \rightarrow x(t_1)$ (при фиксированном $x(t_0)$) и ограничений задачи. Предложен алгоритм построения границы множества достижимости для рассматриваемой системы, в основе которого лежат соотношения принципа максимума для вспомогательной задачи оптимального управления, приведены результаты численного моделирования. Приводится обобщение на случай нескольких интегральных ограничений на управление и траекторию. В последнем случае доказано, что допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является слабо неуплучшаемым (слабо оптимальным по Парето) решением задачи оптимального управления с векторным критерием, компонентами которого являются интегральные функционалы, задающие ограничения на управление и траекторию. Осуществляется редукция рассматриваемой задачи к задаче управления со скалярным

критерием, получены необходимые условия оптимальности управлений, приводящих на границу множества достижимости, в форме принципа максимума.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-29-04191-офи-м.

Библиографические ссылки

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Гусев М. И., Зыков И. В. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 103—115.
3. Gusev M. On Reachability Analysis of Nonlinear Systems with Joint Integral Constraints// Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2017. Lecture Notes in Computer Science. 2018. Vol. 10665. P. 219–227.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ФИРМОЙ С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДСТВА

Н.М. Дмитрук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
dmitrukn@bsu.by

В работе рассматривается задача оптимального управления, возникающая в связи с оптимизацией поведения фирмы, которая использует технологические процессы (ТП) разного уровня экологичности. Фирма, располагая в момент времени $t \geq 0$ собственными средствами $X(t) \geq 0$ и ограниченными заемными средствами $Y(t) \geq 0$, $0 \leq Y(t) \leq kX(t)$, распределяет общий капитал $K(t) = X(t) + Y(t)$ между двумя ТП: $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$. Здесь $K_i(t)$ — капитал, вовлеченный в i -й ТП, его изменение во времени описывается уравнениями

$$\dot{K}_1 = I_1 - aK_1, \quad \dot{K}_2 = I_2 - aK_2, \quad K_1(0) = K_0, \quad K_2(0) = 0, \quad (1)$$

где $I_i(t)$ — инвестиции в i -й ТП, a — норма амортизации. В момент $t = 0$ фирма использует только первый ТП.

ТП различаются производственными и экологическими характеристиками: первый ТП имеет бóльшую производительность ($q_1 > q_2$) и