

ВЛОЖИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В.Т. Борухов¹, О.М. Кветко²

¹ Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
borukhov@im.bas-net.by

² Белорусский государственный аграрно-технический университет,
Независимости 99, 220023 Минск, Беларусь
tx1@tut.by

Как известно, в некоторых задачах оптимального синтеза используются интегралы дифференциальных систем. Применим свойство вложимости [1], [2] нелинейных систем в линейные бесконечномерные системы для описания полиномиальных первых интегралов дифференциальных систем вида

$$\dot{x}(t) = F(x), \quad (1)$$

где $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$, $f_\nu(x) = \sum_{|l|=1}^r a_l^\nu x^l$, $l = l_1 \dots l_n$ – мультииндекс, $x^l = x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, $|l| := l_1 + \dots + l_n$, $a_l^\nu \in \mathbb{R}$. Здесь и далее предполагается градуированное лексикографическое упорядочение мультииндексов.

Из [1] следует

Лемма 1. Система (1) вложима в окрестности нуля ($x = 0$, $t = 0$) в линейную дифференциальную бесконечномерную систему

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad (2)$$

где $z(t) = [z_1(t), \dots, z_m(t), \dots]^T$, $z_m(t) = [z_\alpha(t) | |\alpha| = m]$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2r} & A_{2r+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, A_{jm} = \left(\sum_{\nu=1}^n k_\nu a_{l-k+\delta_\nu}^\nu \right)_{\substack{|l|=m \\ |k|=j}},$$

A_{jm} – $N_j \times N_m$ – матрица ($N_j = \frac{n(n+1)\dots(n+j-1)}{j!}$); $\delta_\nu = \delta_{1\nu} \dots \delta_{n\nu}$, $\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{i\nu} = 0$, если $i \neq \nu$; $a_{l-k+\delta_\nu}^\nu = 0$, если $a_{l-k+\delta_\nu}^\nu \notin \{a_\alpha^\nu | 1 \leq |\alpha| \leq r\}$.

Отметим, что в окрестности нуля решение $x(t, x_0)$ задачи Коши $x(0, x_0) = x_0$ системы (1) представимо в виде $x(t, x_0) = Gz(t, Px_0)$, где $z(t, z_0)$ – решение задачи Коши системы (2), $G = [I_n, 0, \dots]$ (I_n – единичная матрица) – отображение согласования, P – отображение вложимости [2] ($Px_0 = [x_0^l | |l| = m, m = 1, 2, \dots]^T$).

Положим $u_i = [u_{j\alpha} \in \mathbb{R} | |\alpha| = j, j = \overline{1, i}]$, $\text{coker} A_i = \{u_i | u_i A_i = 0\}$, где

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} & 0 \\ & \ddots & & & \ddots \\ 0 & A_{ii} & A_{ii+1} & \dots & A_{ir+i-1} \end{bmatrix}.$$

Теорема 1. а) Система (1) имеет полиномиальный первый интеграл степени не более i тогда и только тогда, когда $\dim \text{coker} A_i > 0$. б) Если $u_i \in \text{coker} A_i$, $u_i \neq 0$, то $V(x) = \sum_{j=1}^i \sum_{|\alpha|=j} u_{j\alpha} x^\alpha$ – полиномиальный первый интеграл системы (1).

Пусть x^* – особая точка системы (1), $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ – полный набор собственных значений матрицы первого приближения в точке x^* .

Следствие 1. Если для какой-либо особой точки x^* и любых целых неотрицательных чисел $m_1, \dots, m_n$ таких, что $m_1 + \dots + m_n \geq 1$, выполняются условия вида $m_1 \lambda_1^* + \dots + m_n \lambda_n^* \neq 0$, то система (1) не имеет полиномиальных первых интегралов. В частности, если набор собственных значений $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ принадлежит области Пуанкаре [3], то система (1) не имеет полиномиальных первых интегралов.

Библиографические ссылки

1. Тартаковский В. Явные формулы для локальных разложений около точек покоя. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 72. № 5. С. 853–856.
2. Борухов В.Т., Гайшун И.В. Вложимость нелинейных дискретных уравнений с изменяющейся структурой в линейные системы. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 9. С. 1207–1215.
3. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.