

Теорема 1. Пусть процесс $\bar{\sigma} = (\bar{z}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ глобально оптимален в задаче (P) . Тогда выполняется неравенство:

$$l(\bar{x}(N)) \leq \min\{l(x^{\mathbf{v}}(N)) \mid z^{\mathbf{v}} = (x^{\mathbf{v}}, y^{\mathbf{v}}), y^{\mathbf{v}} = y_N, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\xi}(\bar{\psi}), \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Полученное необходимое условие оптимальности не требует выпуклости входных данных задачи и приводит к итеративной процедуре решения задач оптимального импульсного управления, которая будет представлена в докладе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты №№ 17-01-00733, 16-31-60030.

Библиографические ссылки

1. Дыхта В.А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Докл. РАН. 2015. Т. 462. № 6. С. 653–656.
2. Дыхта В.А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 73–86.
3. Sorokin S.P., Staritsyn M.V. Necessary optimality condition with feedback controls for nonsmooth optimal impulsive control problems // VIII Int. Conf. Optimization and Applications (OPTIMA-2017), 2017. P. 531–538.
4. Sorokin S., Staritsyn M. Feedback necessary optimality conditions for a class of terminally constrained state-linear variational problems inspired by impulsive control // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2017. Vol. 7. No. 2. P. 201–210.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТИПА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

В. А. Срочко, В. Г. Антоник

Иркутский государственный университет
ул. К. Маркса, д. 1, 664003, г. Иркутск, Россия
{srochko, vga}@math.isu.ru

1. Билинейная задача. Рассматривается простейшая невыпуклая задача с билинейным функционалом относительно линейной фазовой системы. На основе нелокальных формул приращения функционала получены достаточные условия оптимальности для экстремальных управлений без переключений и с одной точкой переключения. Полученные условия представляются в форме неравенств и равенств для функций одной переменной (времени) на промежутке управления.

Реализация этих условий не требует итерационных процедур и носит достаточно простой вычислительный характер, сопоставимый с проверкой выполнения принципа максимума.

Задача оптимизации с квадратичным функционалом редуцируется к билинейному случаю. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

Сформулируем задачу оптимального управления

$$\Phi(u) \rightarrow \max, \quad u \in V \quad (P_1)$$

в рамках следующих соотношений

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle a(t), x(t) \rangle u(t) dt,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x^0,$$

$$V = \{u(\cdot) \in PC([t_0, t_1]) : |u(t)| \leq 1, t \in [t_0, t_1]\}.$$

Для управления $u \in V$ и соответствующих траекторий $x(t, u)$, $\psi(t, u)$ фазовой и сопряженной систем определим функцию переключения

$$H_u[t, u] = H_u(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Представим результаты по достаточным условиям оптимальности.

Теорема 1. Если выполняется неравенство

$$H_u[t, 1] \geq 2 \int_{t_0}^t \max\{0, \langle b(\tau), p(\tau, t) \rangle\} d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]$$

с вектор-функцией $p(\tau, t) : p_\tau = -(A(\tau))^T p$, $p(t) = a(t)$, то управление $u = 1$ является оптимальным в задаче (P_1) .

Теорема 2. Если выполняется неравенство

$$H_u[t, 1] \geq 2 \int_t^{t_1} \max\{0, \langle a(\tau), q(\tau, t) \rangle\} d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]$$

с вектор-функцией $q(\tau, t) : q_\tau = A(\tau)q$, $q(t) = b(t)$, то управление $u = 1$ является оптимальным в задаче (P_1) .

Аналогичные соотношения с дополнением условий типа равенства описывают оптимальность управлений с переключениями.

2. Основная задача. Рассматривается нелинейная задача оптимального управления со свободным правым концом. Вводится понятие сильно экстремального управления, которое доставляет максимум функции Понтрягина относительно некоторого множества траекторий. В линейных и квадратичных задачах сильно экстремальные управления являются оптимальными. В общем случае оптимальность обеспечивается дополнительным условием вогнутости функции Понтрягина по фазовым переменным.

Задача определяется следующими соотношениями

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \quad (P_2)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$V = \{u(\cdot) \in PC([t_0, t_1]) : u(t) \in U, t \in [t_0, t_1]\}.$$

Введём множество экстремальных управлений задачи (P_2) относительно принципа максимума

$$\text{Ext}(P_2) = \{u(\cdot) \in V : u(t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi(t, u), x(t, u), w, t), t \in T\}.$$

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое множество, содержащее все фазовые траектории управляемой системы: $x(t, u) \in X, t \in T, u \in V$. Предположим, что функция $\varphi(x)$ выпукла на X .

Определение 1. Управление $u(\cdot) \in \text{Ext}(P_2)$ назовем сильно экстремальным, если

$$u(t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi(t, u), x(t, v), w, t), \quad v \in V, t \in T.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\mathcal{H}(x, t) = H(\psi(t, u), x, u(t), t), \quad x \in X, t \in T.$$

Теорема 3. Пусть управление $u(t), t \in T$ является сильно экстремальным и функция $\mathcal{H}(x, t), \forall t \in T$ вогнута по x на X . Тогда управление $u(t)$ является оптимальным в задаче (P_2) .

Приведены результаты эффективной реализации полученных соотношений.

Библиографические ссылки

1. *Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.
2. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
3. *Антипина Н. В., Дыхта В. А.* Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума // Известия вузов. Математика. 2002. № 12. С. 11–22.
4. *Никольский М. С.* О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. 2005. № 1. С. 35–43.
5. *Аксенюшкина Е. В., Срочко В. А.* Достаточные условия оптимальности для одного класса невыпуклых задач управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 10. С. 1670–1680.
6. *Антоник В. Г., Срочко В. А.* Условия оптимальности типа принципа максимума в билинейных задачах управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 12. С. 2054–2064.
7. *Srochko V., Antonik V., Aksenyushkina E.* Sufficient optimality conditions for extremal controls based on functional increments // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2017. Vol. 7. № 2. С. 191–199.

ОБ УСКОРЕНИИ СУБГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА С ШАГОМ ПОЛЯКА

П.И. Стецюк

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
пр. Глушкова, 40, 03187 Киев, Украина
stetsyukp@gmail.com

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, $x \in \mathbb{R}^n$. Ее субградиент $\partial f(x)$ удовлетворяет условию:

$$(x - x^*, \partial f(x)) \geq f(x) - f^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь (x, y) – скалярное произведение векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$; x^* – точка минимума функции $f(x)$; f^* – минимальное значение функции $f(x)$: $f^* = f(x^*)$.

Пусть известно f^* . Для нахождения точки $x^* \in \mathbb{R}^n$ можно использовать субградиентный метод Поляка [1]:

$$x_{k+1} = x_k - h_k \frac{\partial f(x_k)}{\|\partial f(x_k)\|}, \quad h_k = \frac{f(x_k) - f^*}{\|\partial f(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$