ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Мармыш Д. Е.

БГУ, Минск, Беларусь, e-mail: marmyshdenis@mail.ru

Численно-аналитический метод граничных элементов, развиваемый в работах [1, 2] является эффективным методом решения разнообразных граничных задач теории упругости. Метод основывается на получении универсальных аналитических выражений для точного вычисления интегралов от функций влияния для сосредоточенных нагрузок.

В общем виде интегральные выражения для определения компонент тензора напряжений имеют вид

$$s_{ij} = \int_a^b f(x) G_{ij}(x - x, y)\, dx \tag{1}$$

где $f(x)$ – внешняя нагрузка, распределенная по отрезку $[a;b]$, $G_{ij}(x, y)$ – функции влияния для задач Фламана или Кельвина [3], $i, j = \{x, y\}$.

Так как непосредственное интегрирование выражений (1) для произвольно распределенных нагрузок весьма затруднительно, то предлагается разбить отрезок $[a;b]$ на достаточно малые отрезки $[x_i; x_{i+1}]$, на которых значение функции $f(x)$ принимается постоянным и равным f_i, тогда функция $f(x)$ будет кусочно-непрерывной и интегралы (1) можно привести к виду

$$s_{ij} = \sum_i f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} G_{ij}(x - x, y)\, dx\ . \tag{2}$$

Соответственно возникает задача интегрирования фундаментальных решений от действия сосредоточенных нагрузок представленных в (2).

В случае резкого изменения функции $f(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$, нагрузку можно аппроксимировать линейным распределением вида

$$f(x) = f_0 + f_1 x\ .$$

В этом случае возникает вопрос получения в аналитическом виде интегралов

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} x \cdot G_{ij}(x - x, y)\, dx\ .$$

В работе получены аналитические выражения для определения напряженного состояния, вызванного действием распределенных нагрузок по границе упругого полупространства и распределенных по отрезку в упругом пространстве путем интегрирования фундаментальных решений задач Фламана и Кельвина для сосредоточенных сил.

Литература

1. Мармыш, Д.Е. Непрерывные в полупространстве аналитические решения для равномерного и полиномиального распределений нормальных усилий по треугольной и прямоугольной областям. / Д.Е. Мармыш, С.С. Щербаков // Трибофатика: труды VI симп. по трибофатике МСТФ 2010, Минск 25 окт. – 1 ноябр. В 2 ч. Ч. 2. – Мн., БГУ, 2010. – С. 369 – 377.
2. Мармыш, Д.Е. Моделирование напряжений в полуплоскости при действии распределенной нагрузки методом граничных элементов / Д.Е. Мармыш // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 27. Мн.: БНТУ, 2012. – 374 с. С. 285 – 289.
3. Журавков, М.А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований / М.А. Журавков. – Мн.: БГУ, 2008. – 310 с.

МЕТОД ПРЯМОГО ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ

Нагорный Ю. Е.

БГУ, Минск, Беларусь, e-mail: nagorny.yury@gmail.com

Покажем, как исходя из самых общих принципов классической механики и МКЭ, можно сформировать матрицу жесткости структурного элемента и на этой основе построить конечноэлементную модель системы связанных атомов. Если нет каких-либо специальных ограничений, каждый атом взаимодействует со всеми остальными. Начнем с одномерного случая – движения по прямой. Если частиц N, то степеней свободы также N, а размерность матрицы жесткости $N\times N$. В силу ее симметричности $(N^2\text{-}N)/2$ элементов, лежащих выше главной диагонали, могут быть выражены через расположенные ниже. Рассмотрим первый столбец. Будем исходить из фундаментального положения МКЭ, состоящего в том, что элементы любого столбца матрицы жесткости представляют из себя уравновешенную систему сил необходимых для того, чтобы переместить один из узлов (материальную точку) на единицу длины вдоль соответствующей степени свободы, оставив при этом остальные неподвижными. Таким образом, первое условие равновесия, уравнение статики для сил, позволяет нижний элемент выразить через верхние элементы первого столбца. Также можно поступить со следующими $N-2$ столбцами.

Следовательно, независимые параметры находятся в треугольной части подматрицы размера $(N-1)\times(N-1)$ и их количество подсчитывается по формуле:

$$N_{01}=\frac{(N-1)^2-(N-1)}{2}+N-1=\frac{(N-1)N}{2}. \qquad (1)$$

В случае плоского движения число степеней свободы у системы $2N$, условий равновесия для каждого столбца матрицы жесткости три: два уравнения статики для проекций сил и одно для моментов. Поэтому формула подсчета числа силовых постоянных примет вид:

$$\frac{(2N-3)^2-(2N-3)}{2}+2N-3=\frac{(2N-3)(2N-2)}{2}=(2N-3)(N-1). \qquad (2)$$

За счет выбора ориентации осей координат, это число можно уменьшить еще на единицу:

$$N_{02}=(2N-3)(N-1)-1. \qquad (3)$$