УДК 004.10:519.2

В.М Романчак, П.М.Лаппо

Аппроксимация экспертных оценок сингулярными вейвлетами

Компьютерное моделирование в той или иной степени решает задачу аппроксимации. Поэтому поиск и исследование новых методов аппроксимации представляет значительный интерес и является актуальной прикладной задачей.

Аппроксимация может быть выполнена разными способами. Эффективность параметрического подхода основывается на уверенности, что функция отклика имеет некоторый определенный вид. Но детерминизм параметрической модели ограничивает анализ сложных ситуаций. Можно предположить, что приближение методами непараметрического типа обладает большей универсальностью. При этом любой алгоритм приближения функции должен содержать дополнительную информацию. Поэтому в чистом виде непараметрическую аппроксимацию найти сложно. Например, ядерная оценка Розенблата - Парзена (Надарая—Ватсона) содержит параметр размытости, который уточняется в ходе общего анализа данных [1, с. 157–159], [2, с. 359–372].

Данной работой мы продолжаем развитие нового метода аппроксимации - метода сингулярных вейвлетов [3, с. 100]. Первоначально метод использовался нами для получения регрессионных оценок по экспериментальным данным. Анализ показал, что аппроксимацию сингулярными вейвлетами можно применять для очень широкого круга задач. Например, получено общее решение краевой задачи для уравнения Лапласа путем аппроксимации граничных условий фундаментальными решениями [5, с. 408]. Сингулярные вейвлеты могут применяться при анализе сложной экспериментальной информации в случае нерегулярного расположения узлов и бедной выборки [4, с. 128]. В данной работе приводится общее описание метода, впервые рассматривается необходимое условия сходимости последовательности вейвлет преобразований. Приводится пример применения дискретного варианта метода сингулярного вейвлета применительно к задаче коллаборативной фильтрации (восстановлении пропущенных данных).

Вначале, на нестрогом уровне, поясним отличие классического вейвлета от сингулярного. Пусть $\psi(x)$ – это базисный вейвлет [6] («маленькая волна», «всплеск»), который должен удовлетворять условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0 \ . \qquad (1)$$

В вейвлете варьируют значения параметра масштабирования a и параметра сдвига b:

$$\frac{1}{a}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) . \qquad (2)$$

В теории вейвлетов рассматривают скалярное произведение действительной функции $f(x)$ и вейвлет функции (2), которое называют вейвлет преобразованием:

$$Wf(b,a) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \, . \qquad (3)$$

Можно показать, что если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию допустимости (1), то в преобразовании (3) «малый всплеск» приводит к «маленькой волне», т.е. функция $Wf(b,a)$ для малых a будет близка к нулю [6]. Если базисный вейвлет не удовлетворяет условию допустимости («большой всплеск»), то преобразование (3) может привести к «большой волне», т.е. функция $Wf(b,a)$ может оказаться большой. Между тем, изменив определение интегрального вейвлет преобразования можно устранить эту проблему.

Введем дельта преобразование по формуле:

$$Hf(b,a) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(b))\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \ . \qquad (4)$$

С учетом условия допустимости (1) дельта преобразование (4) совпадает с вейвлет преобразованием (3). Но если в преобразовании (4) выбрать вейвлет, для которого не выполняется необходимое условие допустимости (1), то «большой всплеск» по-прежнему будет приводить к «маленькой волне», т.е. функция

$Hf(b,a)$ для малых a будет близкой к нулю. В качестве вейвлета в дельта преобразовании можно использовать дельта–образные функции, которые применяют при ядерной оценке регрессии [1, с. 157–159], например вейвлетом может быть функция плотности стандартного нормального распределения:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \tag{5}$$

Дельта преобразования (4) с ядром Гаусса (5) можно использовать для получения уравнения регрессии. Так, если интеграл в выражении (4), заменить на промежутке длины d суммой и считать преобразование $Hf(b,a)$ достаточно малой величиной, получим:

$$\frac{d}{na}\sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(b))\psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right) \approx 0 .$$

тогда

$$f(b) \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\psi\left(\frac{t_i - b}{a}\right)} . \tag{6}$$

Мы пришли к непараметрической ядерной оценке Надарая – Ватсона в виде (6), используя дельта преобразование с вейвлетом Гаусса. Для ядерной оценки (6) существенно условие положительности ядра в среднем. Действительно, если в качестве ядерной функции выбрать допустимый базисный вейвлет, который равен в среднем нулю (1), то получить оценку (6) будет невозможно из-за того, что знаменатель в выражении (6) обратится в ноль.

Из рассмотренных примеров следует, что ядерная функция не может быть вейвлетом, если выполняется условие допустимости (1) и вейвлет с таким условием не подходит в качестве ядерной функции. Необходима модификация вейвлет преобразования, которая позволит преодолеть ограничения по выбору базиса аппроксимации и объединит теорию вейвлетов с ядерными оценками регрессии. Назовем такой метод – аппроксимация сингулярными вейвлетами.

Еще отметим, что в классической теории вейвлетов равенство (3) позволяет найти функцию $f(t)$, если нам известно вейвлет преобразование $Wf(b,a)$, с помощью формулы обратного вейвлет - преобразования:

$$f(t) = \frac{1}{C_0}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2}Wf(b,a)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dbda , \tag{7}$$

где

$$C_0 = 2\pi\int_0^{\infty}\frac{|\Psi(u)|^2}{u}du , \tag{8}$$

$\Psi(u)$ – преобразование Фурье стандартного вейвлета $\psi(t)$, удовлетворяющего условию (1).

Аппроксимация сингулярными вейвлетами.

Будет считать, что в данном разделе базисный вейвлет $\psi(t)$ принадлежит L^2 и условие (1) не является обязательным. Введем необходимые определения.

Будет говорить, что для функции $\psi(t)$ выполняется условие убывания на бесконечности, если:

$$|\psi(t)| \le \frac{c}{1+t^2}, c > 0 . \tag{9}$$

Замечание. Из неравенства (9) следует, что интеграл от функции $\psi(t)$ сходится абсолютно, $\psi(t)$ принадлежат L^1 и преобразование Фурье функции $\psi(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией.

Определим вейвлет преобразование функции $f(t)$:

$$Wf(b,a)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \qquad (10)$$

Определим дельта преобразования функции *f*(*t*):

$$Hf(b,a)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)-f(b)\right)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \qquad (11)$$

Определение. Базисный вейвлет называется сингулярным, если

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(t\right)dt=1. \qquad (12)$$

Если вейвлет сингулярный, то дельта преобразование (11) равно разнице между вейвлет преобразованием функции и самой функцией: $Hf(b,a)=-f(b)+Wf(b,a)$. Если для вейвлета выполнено условие допустимости (1), дельта преобразование совпадает с вейвлет преобразованием: $Hf(b,a)=Wf(b,a)$.
Обозначим $P(x)$, $G(x)$, $\Psi(x)$ - преобразование Фурье для функций $f(t)$, $g(t)$ и ψ (t) соответственно, например:

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{ixt}dt.$$

Теорема 1. Пусть ψ - базисный вейвлет, для которого выполняется условие допустимости:

$$2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\left(\Psi(-u)-\Psi(0)\right)\Psi(\mathrm{u})}{u}du=2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\left(\Psi(u)-\Psi(0)\right)\Psi(-u)}{u}du=C \qquad (13)$$

где C – конечная постоянная, тогда для всех f и g из L^2:

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Hf(b,a)Wg(b,a)\frac{da}{a}dbda=C(f,g). \qquad (14)$$

здесь $(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)dt$.

Доказательство. На основании (11) можно записать:

$$Hf(b,a)=-S\cdot f(b)+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \qquad (15)$$

где $S=\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(u\right)du$.

Функцию $f(b)$ в (15) выразим через обратное преобразование Фурье, а для функций под знаком интеграла применим равенство Парсеваля (a>0):

$$Hf(b,a)=-\frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ibx}dx+\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\Psi\left(-ax\right)e^{-ibx}dx. \qquad (16)$$

Поскольку $\Psi(0)=\frac{S}{\sqrt{2\pi}}$, выражение (16) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}Hf(b,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\left(\Psi\left(-ax\right)-\Psi\left(0\right)\right)e^{-ixb}dx. \qquad (17)$$

Для вейвлет преобразования функции $g(x)$ аналогично:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}Wg(b,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(y)\Psi\left(-ay\right)e^{-iyb}dy\,. \tag{18}$$

В правой части выражений (17) и (18) находятся преобразования Фурье для функций $F(x)\left(\Psi\left(-ax\right)-\Psi\left(0\right)\right)$ и $G(y)\Psi\left(-ay\right)$. Проинтегрируем по переменной b произведение выражений (17), (18) и применим равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty}Hf(b,a)Wg(b,a)db=$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\left(\Psi\left(-ax\right)-\Psi\left(0\right)\right)G(-x)\Psi\left(ax\right)dx\,. \tag{19}$$

Умножим теперь выражение (19) на $\frac{da}{a}$ и проинтегрируем на промежутке $[0,\infty]$, а затем применим равенство Парсеваля:

$$2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{da}{a}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\left(\Psi\left(-ax\right)-\Psi\left(0\right)\right)G(-x)\Psi\left(ax\right)dx=$$

$$=C\int_{-\infty}^{\infty}F(x)G(-x)dx=C\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)dt\,,$$

где

$$C=2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\left(\Psi(-ax)-\Psi(0)\right)\Psi(ax)}{a}da\,.$$

Чтобы C - была константной, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$C=2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\left(\Psi(-ax)-\Psi(0)\right)\Psi(ax)}{a}da=2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\left(\Psi(ax)-\Psi(0)\right)\Psi(-ax)}{a}da\,,$$

(в противном случае C будет зависеть от знака x) из которого следует условие допустимости (13). Отметим два важных случая, которые упрощают выбор базисного вейвлета.

1. Если функция $\psi(u)$ четная, $\psi(u)\in L^2$, $u\psi(u)\in L^1$, то $\Psi(u)$ четная непрерывно дифференцируема и тогда условие допустимости (13) выполняется. Постоянная C в этом случае:

$$C=2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\left(\Psi(u)-\Psi(0)\right)\Psi(u)}{u}du\,.$$

2. Если функция $\psi(u)$ нечетная и $\Psi(0)=0$, $\psi(u)\in L^2$, $u\psi(u)\in L^1$, то $\Psi(u)\Psi(-u)=|\Psi(u)|^2$ – четная, непрерывно дифференцируемая и условие допустимости (13) выполняется:

$$C=2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\left|\Psi(u)\right|^2}{u}du$$

Теорема 2. Пусть ψ - базисный сингулярный вейвлет для которого выполняется условие допустимости (13), тогда для любой непрерывной в точке t функции $f(t)$ из L^2 (R):

$$f(t)=\frac{1}{C}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2}Hf(b,a)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dbda \tag{20}$$

Доказательство данной теоремы совпадает с доказательством для стандартного вейвлета [6, с. 114]. Достаточно в качестве функции $g(t)$ выбрать дельта-образную функцию, например функцию Гаусса (5) и перейти к пределу при $a \to 0$.

Теорема 3. Пусть функция $f(t)$ и $\psi(t)$ принадлежит L_1, тогда дельта преобразование $Hf(a,b)$ также принадлежит пространству L_1 для любого фиксированного $a>0$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(b,a)|\, db = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t) - f(b)\,| \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt db =$$

$$\le \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)| \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt db + \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(b)| \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right| dt db \le$$

$$\le 2 \| f \|_1 \| \psi \|_1$$

Теорема 4. Пусть $f(x)$ принадлежит пространству L_1 и $\psi(x)$ удовлетворяет условию убывания на бесконечности (9) и условию сингулярности (12). Тогда в каждой точке непрерывности функции $f(x)$:

$$\lim_{a \to 0, a>0} \left(\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(b) \psi\left(\frac{b-t}{a}\right) db \right) \to f(t)\,,$$

Данная теорема в [7,с. 346] доказана для существенно более общего случая.

Следствие. Пусть функция $f(t)$ принадлежит пространству L_1 и $\psi(t)$ удовлетворяет условию убывания на бесконечности (9) и условию сингулярности (12). Тогда в каждой точке непрерывности функции $f(t)$ выполняется: $Hf(a,t) \to 0$, при $a \to 0$, $a>0$.

Определение. Последовательностью дельта преобразований будем называть рекуррентную последовательность для функции $f(t)$ с сингулярным вейвлетом $\psi(t)$:

$$F^k(t) = -HF^{k-1}(t, a_k)\,, \tag{21}$$

где $F^0(t)=f(t)$, k – номер преобразования, $a_k \to 0$, $a_k>0$, k=1, …, K.

Теорема 5. Пусть функции $f(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x и функция $f(x)$ принадлежит L^1, $\psi(x)$ удовлетворяет условию убывания на бесконечности (9) и условию сингулярности (12), тогда для любой последовательности дельта преобразований (21), получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K} WF^k(x, a_k) + F^K(x)\,, \qquad (22),$$

где $F^k(x)$ – последовательность дельта преобразований, $F^K(x)$ – остаточный член, который можно сделать сколь угодно малым, выбором a_{K-1}. Поясним доказательство теоремы для K=2. Выпишем два члена последовательности (21):

$$F^1(x) = f(x) - \frac{1}{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} F^0(t)\, \psi\left(\frac{t - x}{a_0}\right) dt \tag{23}$$

$$F^2(x) = F^1(x) - \frac{1}{a_1} \int_{-\infty}^{\infty} F^1(t)\, \psi\left(\frac{t - x}{a_1}\right) dt\,. \tag{24}$$

Суммируя равенства (23), (24) получим

$$f(x) = \frac{1}{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} F^0(t)\, \psi\left(\frac{t - x}{a_0}\right) dt + \frac{1}{a_1} \int_{-\infty}^{\infty} F^1(t)\, \psi\left(\frac{t - x}{a_1}\right) dt + F^2(x)\,.$$

Функция $\psi(x)$ принадлежит классу L^1, поскольку для нее выполняется условие убывания на бесконечности (9). $f(x)$ принадлежит классу L^1 по условию теоремы. Тогда функция $F^1(x)$ принадлежит классу L_1 и непрерывна в точке x на основании Теоремы 3, следовательно, и $F^2(x)$ из класса L^1 и непрерывна, ее можно сделать сколь угодно малой в точке x на основании Следствия из Теоремы 4. Для произвольного конечного K доказывается аналогично.

Дискретное дельта-преобразование.

Рассмотрим алгоритм коллаборативной фильтрации [8 с. 27] с применением дискретного дельта преобразования. Коллаборативная фильтрация позволяет предсказать, какой продукт понравится пользователю, имея неполную информацию о его предпочтениях.

Пример. Допустим, у нас имеется матрица оценок *M*, выставленных пользователями различным продуктам. Строки матрицы соответствуют пользователям, столбцы матрицы - продуктам. Не все элементы матрицы заполнены – имеются пропуски. Необходимо предсказать какие из продуктов будут востребованы пользователями. В основе алгоритма лежит предположение, что реальные таблицы содержат похожие между собой объекты (строки и столбцы). Если же избыточность отсутствует (как, например, в таблице случайных чисел), то предпочесть один прогноз другому невозможно. Наша задача аппроксимировать функцию *U* двух переменных *X* и *Y*, каждая из переменных которой является, в свою очередь, вектором. Расстояние между объектами может быть просто евклидовым, если все данные измерены в абсолютной шкале или можно использовать коэффициент корреляции Пирсона для шкалы интервалов.

Пусть *M* – матрица размера $n\times k$, $m_{i,j}$ - элемент матрицы *M*. Не все элементы матрицы *M* нам известны. Матрице *M* поставим в соответствии множество точек Z_{ij} пространства *Z* таких, что $Z_{ij} = (X_i, Y_j)$, где X_i -строка с номером *i* матрицы *M*, Y_j - столбец с номером *j*, матрицы *M*, i=1, …, *I*, j=1, …, *J*. Будем считать m_{ij} значением функции $F(Z_{ij})$. Тогда функция $F(Z)$ определена в точках области *D*, которой соответствует множество известных элементов матрицы *M*. Кроме того, каждой паре точек Z_{ab}, Z_{cd} поставим в соответствие расстояние между ними по формуле

$$d(Z_{ab}, Z_{cd}) = \sum_{(i)} (m_{i,b} - m_{i,d})^2 + \sum_{(j)} (m_{a,j} - m_{c,j})^2 , \qquad (25)$$

где (*i*) - означает суммирование по всем *i*=1, …, *I* для которых определена разность $m_{i,b}$-$m_{i,d}$, (*j*) - означает суммирование по всем *j*=1, …, *J* для, которых определена разность $m_{a,j}$-$m_{c,j}$.
В качестве базисного вейвлета была выбрана функция

$$\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Алгоритм аппроксимации сингулярными вейвлетами.

1. Присваиваем значения коэффициентам вейвлета нулевого порядка

$$W_{i,j}^0 = m_{i,j}$$

где $W_{i,j}^0$ начальное значение дельта преобразования, в области определения *D* функции $F(Z_{ij})$, $m_{i,j}$- заданный элемент матрицы *M*, Z_{ij} – точка, которая принадлежит области *D*.

2. Вычисляем коэффициенты дельта преобразования до *K*-го порядка:

$$W_{i,j}^k = W_{i,j}^{k-1} - \frac{\sum_{ab} W_{a,b}^{k-1} \psi\left(\frac{d(Z_{ab}, Z_{ij,}}{q_k}\right)}{\sum_{ab} \psi\left(\frac{d(Z_{ab}, Z_{ij,}}{q_k}\right)} , \qquad (26)$$

Здесь $W_{i,j}^k$ - значение коэффициентов *k*-го дельта преобразования в точке Z_{ij}, пространства *D*, *i*=1, …, *I*, *j*=1, …, *J*, *k*=1, …. *K*, *a*=1, …, *I*, *b*=1, …, *J*, $q_k=\alpha 2^{-k}$, α- постоянная.

3. Восстанавливаем функцию $F(Z_{ij})$ во всех точках области.

$$F(Z_{ij}) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\sum_{ab} W_{a,b}^{k} \psi\left(\frac{d(Z_{ab}, Z_{ij,}}{q_k}\right)}{\sum_{ab} \psi\left(\frac{d(Z_{ab}, Z_{ij,}}{q_k}\right)} , \qquad (27)$$

где $F(Z_{ij})$ – значение аппроксимирующей функции в точке Z_{ij}, пространства *Z*, *i*=1, …, *I*, *j*=1, …, *J*. Наряду с методом сингулярного вейвлета данные были восстановлены и методом ближайших соседей.

Алгоритм метода ближайших соседей. Для каждого неизвестного элемента находился ближайший элемент по строке и по столбцу в смысле расстояния (25). После чего пропуск заполняется значением, которое минимизирует сумму расстояний до ближайшей строки и столбца. Оба алгоритма тестировались на реальных данных. Результаты типичной аппроксимации представлены в Таблице. Таблица наблюдений была полностью заполнена ответами интервьюеров. Строка Таблицы – это ответы одного интервьюера, столбец таблицы – оценка важности различных изучаемых дисциплин. Далее, часть данных считалась неизвестной и восстанавливалась с помощью метода сингулярных вейвлетов и, для сравнения, по методу ближайших соседей.

Таблица. Результат аппроксимации данных с пропусками.

(4,5) 5 (4,8)	5	3	2	2	3	5
5	(4,0) 5 (5,0)	1	3	2	2	5
5	3	(2,7) 4 (4,0)	4	1	1	5
4	5	5	(3,6) 1 (4,7)	3	4	3
5	5	3	4	(2,1) 3 (2,2)	1	4
5	5	5	3	2	(2,9) 4 (2,3)	4
5	5	4	4	(2,4)1 (2,6)	3	(4,2) 4 (4,2)
4	4	4	3	2	(2,5) 3 (2,1)	5
5	5	3	5	2	1	(4,3) 5 (4,7)

В Таблице приведены наблюдаемые ответы интервьюеров, в скобках - результаты аппроксимации сингулярными вейвлетами (слева) и методом ближайших соседей (справа), соответственно.

Выводы. В работе приводятся определения и теоремы, которые устанавливают фундаментальные свойства сингулярных вейвлетов, что дает возможность использовать данный вариант аппроксимации при решении прикладных задач. Рассмотрен алгоритм дискретного варианта аппроксимации методом сингулярного вейвлета, который можно применять в задачах анализа данных с пропусками. Приведены результаты расчетов на компьютере.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Надарая, Э. А. Об оценке регрессии / Э. А. Надарая // Теория вероятностей и ее применение. -1964.-Т. 9, № 1. - С. 157–159.
2. Watson, G. S. Smooth regression analysis / G. S. Watson // Sankhya. Ser. A. -1964. - V. 26, - P. 359–372
3. Серенков, П.С. Система сбора данных о качестве как техническая основа функционирования эффективных систем менеджмента качества / П.С. Серенков, В.М. Романчак, В.Л. Соломахо // Доклады акад. наук Республики Беларусь. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 100–104.
4. Романчак, В. М., Метод сингулярных вейвлетов в задачах экспертного оценивания сводного показателя качества. / В. М. Романчак, П.С. Серенков, П. М. Лаппо // Приборостроение - 2009: материалы 2-й Междунар. науч.- техн. конф.- Минск, 11-13 ноября 2009 г. / БНТУ; редкол.: О.К. Гусев [и др.]. - Минск,2009. - С.128.
5. Романчак, В.М. Аппроксимация граничных задач теории потенциала./ В.М. Романчак// Наука – образованию, производству, экономике : материалы Тринадцатой междунар. науч.-техн. конф., Минск, 2015 г.: в 4 т. / Белорус. нац. техн. ун-т ; редкол.: Б. М. Хрусталев, Ф. А. Романюк, А. С. Калиниченко. – Минск, 2015. - т.3 - С.408
6. Чуи, К. Введение в вейвлеты./К. Чуи - М.: Мир, 2001. – 412 с.
7. Фрейзер, М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры / М. Фрейзер. - М.: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2008. - 487 с.
8. Сегаран ,Т. Программируем коллективный разум./ Т. Сегаран – СПб: Символ-Плюс, 2008 - 368 с.

References

1. Nadaraya E. A. About a regression assessment . Probability theory and its application,1964, vol. 9, No. 1, pp. 157–159.
2. Watson G. S. Smooth regression analysis. Sankhya, Ser. A, 1964, vol. 26, pp. 359–372.
3. Serenkov P. S., Ramanchak V. M., Solomakho V. L., System of collection of data on quality as technical basis of functioning of effective systems of quality management . Reports of the academician of sciences of Republic of Belarus, 2006, vol. 50, No. 4., pp 100-104.

4. Ramanchak V. M., Serenkov P. S., Lappo P. M. Method of singular wavelet in problems of expert estimation of a summary indicator of quality. Instrument making - 2009: materials 2-nd International scientifically - technical conference , Minsk, 2009, pp. 128.
5. Ramanchak V. M. Approximation of boundary tasks of the potential theory. Science – to education, production, economy: materials of the thirteenth international scientifically - technical conference, Minsk, 2015, vol. 3, pp. 408
6. Chui K. Introduction in wavelet. Moscow, 2001, 412 p.
7. Frazier M. An introduction to wavelet through linear algebra, Moscow, 2008, 487 p.
8. Segaran,T. Programming Collective Intelligence, St. Petersburg, 2008, 368 p.

УДК 004.10:519.2

В.М Романчак., П.М.Лаппо. Аппроксимация сингулярными вейвлетами.

В работе рассматривается алгоритм аппроксимации сингулярными вейвлетами, который можно использовать для компьютерного анализа сложных математических моделей. Особенностью алгоритма является объединение метода вейвлет анализа сигналов и ядерных оценок типа Парзена-Розенблатта (Надарая-Ватсона).

Во введении рассматриваются классические вейвлет функции и ядерные оценки. Отмечается, что в классической теории вейвлетов нельзя использовать ядерные функции, а базисные вейвлеты нельзя выбирать с целью получения ядерных оценок регрессии.

Формулируется, что целью исследования является преодоление ограничения по выбору базиса аппроксимации и объединении методов теории ядерных оценок с теорией вейвлетов, изучение общих свойств аппроксимации сингулярными вейвлетами и развитее алгоритмов аппроксимации функций.

В основной части работы доказано, что для сингулярных вейвлетов имеет место аналог равенства Парсеваля. Этот результат позволяет использовать в качестве базисного вейвлета ядерные функции.

В основной части вводится понятие последовательности сингулярных преобразований, которую удобно применять при аппроксимации функции сингулярными вейвлетами.

Последовательность сингулярных преобразований дает возможность представить непрерывную функцию в виде суммы ряда из сингулярных вейвлетов (“маленьких волн”).

Используя различное число членов ряда из сингулярных вейвлетов, мы можем получить различную степень сглаживания функции или, при необходимости, интерполировать экспериментальные данных.

Доказывается сходимость последовательности вейвлет преобразований.

Приводится пример применения разложения в ряд по сингулярным вейвлетам для дискретного случая.

В заключении отмечается, что в работе получено теоретическое обоснование и численные результаты, которые подтверждают возможность применения аппроксимации сингулярными вейвлетами к широкому кругу прикладных задач.

Ключевые слова: вейвлет преобразование, оценка Парзена-Розенблатта, аппроксимация уравнения регрессии Надарая-Ватсона.

V. M Romanchak., P.M.Lappo. Approximation by singular wavelet.

In work the algorithm of approximation by singular wavelet is considered, it can be used for the computer analysis of difficult mathematical models. Feature of algorithm is join of a wavelet based method analysis of signals and kernel estimates like Parzen–Rosenblatt (Nadaraya – Watson).

In introduction are considered classical wavelet analysis and kernel estimates. It is noted that in the classical theory of wavelet it is impossible to use kernel functions, and basic wavelet cannot be chosen for the purpose of receiving nuclear estimates of regression.

It is formulated that a research objective is overcoming of restriction on the choice of basis of approximation and join of methods kernel estimation theory with the theory of basic wavelet, studying of the common properties of approximation by singular basic wavelet and development of algorithms of approximation of functions.

In the main part of work it is proved that for singular basic wavelet the analog of equality of Parseval takes place. This result allows us to use kernel functions as a basic of wavelet.

In the main part the concept of sequence of singular transformations which is convenient for applying at function approximation by singular basic wavelet is entered.

The sequence of singular transformations gives the chance to present the continuous function in the row sum from singular basic wavelet («small waves»).

Using various number of terms of a row from singular basic wavelet, we can receive various extent of smoothing of function or, if necessary, interpolate the experimental of data.

Convergence of sequence is proved basic wavelet transformations.

The example of application of an expansion in a series on singular basic wavelet for a discrete case is given.

In the conclusion it is noted that in work theoretical justification and numerical results which confirm a possibility of application of approximation with singular basic wavelet to a wide range of applied tasks is received.

Keywords: wavelet transform, Parzen–Rosenblatt density estimator, kernel estimators, Nadaraya – Watson regression estimators, wavelet.